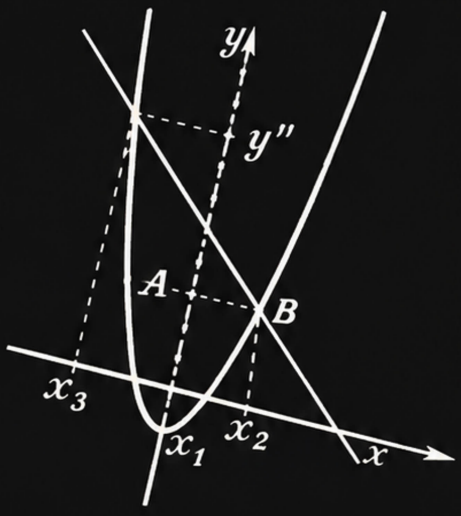
Н. С. ЗАЛОГИН

# Конкурсные задачи по математике



*Н. С. ЗАЛОГИН*

# КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Второе стереотипное издание

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ТЕХНІКА“
Киев — 1964

51
3-24

51 (076.1/.2)

В книге помещены задачи и примеры, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах в высшие учебные заведения Украинской ССР. За некоторыми исключениями, ко всем задачам и примерам приведены методы их решения.

Книга представляет собой пособие для поступающих в вузы, которое может быть использовано студентами физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов, а также учителями математики.

Рецензент *Г. Г. Островский*

Редакция литературы по вопросам машиностроения и транспорта

Заведующий редакцией инж. *М. А. Василенко*

## Содержание


Стр.

Предисловие . . . . . 3

**Задачи и примеры**

*Раздел I.* Арифметика . . . . . 5
*Раздел II.* Алгебра . . . . . 10
*Раздел III.* Геометрия . . . . . 55
*Раздел IV.* Тригонометрия . . . . . 73
*Раздел V.* Разные задачи . . . . . 84

**Решения задач и примеров**

*Раздел I.* Арифметика . . . . . 85
*Раздел II.* Алгебра . . . . . 94
*Раздел III.* Геометрия . . . . . 311
*Раздел IV.* Тригонометрия . . . . . 484
*Раздел V.* Разные задачи . . . . . 564

Приложения . . . . . 572

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В Программе Коммунистической партии Советского Союза, принятой XXII съездом КПСС, отмечено, что «в связи с бурным развитием науки и техники следует непрестанно совершенствовать систему профессионально-технического образования и производственного обучения с тем, чтобы мастерство работающих на производстве сочеталось с повышением их общеобразовательной подготовки в области общественных и естественных наук и получением инженерно-технических, агрономических, медицинских или других специальных знаний».

Все большее значение приобретает для специалистов во всех отраслях народного хозяйства знание математики. Изучение этой науки закладывает основы для овладения многими техническими профессиями.

В связи с быстрым техническим прогрессом во всех отраслях народного хозяйства и стремительным ростом культурного и жизненного уровня трудящихся особое значение приобрело самостоятельное и заочное обучение. Поэтому книга рассчитана, главным образом, на поступающих в вузы непосредственно с производства, из колхозов, а также на лиц, занимающихся самообразованием.

В данной книге помещены в основном задачи и примеры, которые предлагались на конкурсных экзаменах лицам, поступавшим в высшие учебные заведения Украинской ССР, а также ряд задач прикладного характера.

При этом автор ставил перед собой цель подобрать такие задачи и примеры, решение которых помогало бы учащимся достигнуть уровня знаний и практических навыков по математике, требуемого от поступающих в высшие учебные заведения Украинской ССР.

Задачи и примеры в книге распределены по четырем основным разделам: арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия. За некоторым исключением, ко всем задачам и примерам приведены решения или указания.

В процессе подготовки настоящего издания автором были учтены ценные пожелания Общества юных математиков средней школы № 26 г. Винницы и учителя математики И. И. Липея, приславших их после выхода в свет книги «Конкурсні задачі з математики», изданной Гостехиздатом УССР в 1959 г. Автор выражает глубокую благодарность математику И. Я. Шапиро, проделавшему большую работу по редактированию всего материала и предложившему ряд новых решений, например к таким задачам, как № 844, 845, 849, 853, 854, 1061.

Критические замечания и пожелания просим направлять по адресу: Киев, 4, Пушкинская, 28, издательство «Техніка».

## РАЗДЕЛ I
## АРИФМЕТИКА

Вычислить выражения:

1. $\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\cdot\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:0{,}16\right\}$.

2. $\dfrac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)\,1\frac{9}{11}\right]4{,}2}{0{,}008}$.

3. $\dfrac{3:\frac{2}{5}-0{,}09:\left(0{,}15:2\frac{1}{2}\right)}{0{,}32\cdot 6+0{,}03-(5{,}3-3{,}88)+0{,}67}$.

4. $6:\frac{1}{3}-0{,}8:\dfrac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}$.

5. $\dfrac{\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1{,}75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80}-0{,}0325\right):400}:(6{,}79:0{,}7+0{,}3)$.

6. $\dfrac{\left(84{,}63:2{,}1-\frac{7}{8}\cdot 35{,}2+2\frac{5}{42}-7\frac{43}{48}\right):7\frac{25}{56}}{\left(14\frac{1}{6}-3{,}2:4\right):\left(17{,}25:2{,}3+\frac{2}{15}\right)\frac{229}{802}}$.

7. $\left[\dfrac{1{,}5:0{,}3}{0{,}6\cdot 5:\frac{3}{5}}-\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{15}\right)\frac{30}{77}}{\left(2\frac{3}{25}+\frac{22}{7}\right)25}\right]:\frac{1}{3}+\frac{1}{307}$.

8. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0{,}8+2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}$.

**9.** Найти $x$, если

$$\frac{(2{,}7-0{,}8)\,2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{7}}+x+8\frac{9}{11}-\frac{(1{,}6+154{,}66:70{,}3):1{,}9}{\left(2\frac{2}{5}-1{,}3\right):4{,}3}=2{,}625.$$

**10.** Найти $x$, если

$$\frac{\left[\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):x+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right]:1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}=\frac{17}{27}.$$

Решить задачи:

**11.** Вычислить выражение

$$\frac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\frac{1:\frac{1}{4}}{1\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}}$$

и полученное число разделить на три части обратно пропорционально числам $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ и 2.

**12.** Найти вес орудийного патрона, зная, что заряд весит 0,8 *кг*, вес снаряда составляет $\frac{2}{3}$, а гильзы — $\frac{1}{4}$ веса всего патрона.

**13.** 14 *см*$^3$ железа весят 109,2 *г*. Сколько граммов весит кусок железа, объем которого равен 42 *см*$^3$?

**14.** Зубчатое колесо с 8 зубцами делает 95 оборотов в минуту. Сколько оборотов в минуту сделает колесо, сцепленное с первым и имеющее 20 зубцов?

**15.** 29 каменщиков выложат стену при 6-часовом рабочем дне за 8,4 дня. Сколько дней должны работать 24 каменщика с такой же производительностью труда, чтобы при 7-часовой ежедневной работе выложить такую же стену?

**16.** В совхозе $\frac{2}{5}$ всей пахотной земли засевается озимой пшеницей, $\frac{1}{3}$ — яровой пшеницей, $\frac{1}{7}$ — рожью и оставшиеся 780 *га* — кукурузой. Сколько гектаров земли имеет совхоз?

**17.** Прибыль составляет 11 $\frac{1}{4}$% продажной стоимости товара. Сколько процентов это составит от себестоимости товара?

**18.** Вычислить выражение

$$\left\{\frac{1{,}4\cdot 0{,}15}{0{,}75-0{,}03:\frac{1}{20}}-[0{,}0\,(6)+1{,}1]:1{,}1\,(6)\right\}:0{,}85+471\frac{9}{17}$$

и полученное число разделить на три части так, чтобы 50% первой части равнялось 60% второй и 80% третьей части.

**19.** Задача Л. Н. Толстого о косарях (в несколько измененной редакции).

Косари нанялись выкосить два луга. Начав косить с утра большой луг, они после полудня поделили между собой работу: одна половина косарей осталась на первом лугу и до вечера его докосила, а вторая половина косарей перешла косить траву на второй луг, площадь которого вдвое меньше первого луга. Сколько было косарей, если известно, что на следующий день остаток работы выполнил один косарь?

Указания: а) полдень разделяет рабочий день косарей на две равные части; б) производительность всех косарей одинакова.

**20.** Морская вода содержит 5% (по весу) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 40 *кг* морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

**21.** Если из 225 *кг* руды получается 34,2 *кг* меди, то каково процентное содержание меди в руде?

**22.** От швеллерной балки отрезали часть, составляющую 72% ее длины. Вес оставшейся части равен 45,2 *кг*. Сколько весит отрезанная часть швеллерной балки?

**23.** Два завода $A$ и $B$ взялись выполнить заказ в 12 дней. Через 2 дня завод $A$ был закрыт на ремонт, и в дальнейшем над выполнением заказа работал только завод $B$. Зная, что производительность завода $B$ составляет $66\frac{2}{3}\%$ производительности завода $A$, определить, через сколько дней будет выполнен заказ.

**24.** При выполнении работы по математике 12% учеников класса совсем не решили задачи, 32% решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

**25.** Найти число, 4,8% которого равно

$$\frac{15\frac{13}{29}\cdot 3{,}625 + 28 : \frac{7}{15}}{\frac{20}{49}\cdot 9{,}8 + 0{,}625 : 0{,}75}.$$

**26.** Мясо теряет при варке 35% своего веса. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы приготовить 260 порций по 100 *г* вареного мяса в каждой?

**27.** Молоко дает 21% сливок, сливки — 23% масла. Сколько килограммов молока нужно взять, чтобы получить 483 *кг* масла?

**28.** Собака, находясь в точке $A$, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 *м* от собаки. Скачок собаки равен 2 *м*, скачок лисицы — 1 *м*. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от точки $A$ собака догонит лисицу?

**29.** Кусок сплава меди с оловом весом 12 *кг* содержит 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав имел 40% меди?

**30.** Сплав из серебра и меди весит 2 *кг*. Вес серебра в сплаве составляет $14\frac{2}{7}\%$ веса меди. Сколько содержится серебра в этом сплаве?

**31.** Высота колхозной плотины 2 *м*; средняя скорость течения воды 80 *см/сек*; средняя глубина реки перед плотиной 150 *см*; ширина реки 5 *м*. Определить полезную мощность водяной турбины, если она равна 75% мощности воды.

**32.** Сумма двух чисел равна 527. Найти числа, если известно, что 8% первого числа равняется 7,5% второго числа.

**33.** Два числа относятся один к одному, как 5 : 6. Если от 0,7 первого числа вычесть 0,2(6) второго, то получим 76. Найти эти числа.

**34.** Сколько литров воды нужно долить до 5 *л* 90%-ного спирта, чтобы получить 60%-ный спирт?

**35.** Разделить 125 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2 : 3, вторая к третьей, как 3 : 5, а третья к четвертой, как 5 : 6.

**36.** Сумма трех дробей равна $\frac{23}{60}$. Числители этих дробей пропорциональны числам 3, 1 и 2. Знаменатель первой дроби относится к знаменателю второй, как 2 : 1, а знаменатель второй к знаменателю третьей, как 2 : 3. Найти эти дроби, если известно, что они несократимы.

**37.** Число отсутствующих учеников класса составляло $\frac{1}{10}$ часть присутствующих. В класс явился еще один ученик, тогда число отсутствующих учеников стало относиться к числу присутствующих, как 2 : 31. Сколько учеников в классе?

**38.** За перепечатку рукописи уплачено 12,3 руб. Перепечатка производилась тремя машинистками: первая работала 8 *ч*, перепечатывая по 6 страниц в час; вторая — 6 *ч*, перепечатывая по 10 страниц в час; третья — 7 *ч*, перепечатывая по 8 страниц в час. Сколько заработала каждая машинистка?

**39.** Завод выпустил продукции за последний год на 10% больше, нежели за предшествующий, а за предшествующий год он выпустил на 10% больше, нежели ему было запланировано. На сколько процентов перевыполнил завод план за второй год, сравнивая с первоначальным планированием?

**40.** Смешали 21 *л* спирта крепостью 60°, 45 *л* спирта крепостью 48° и 6 *л* воды. Какую крепость имеет полученная смесь?

**41.** Потери горючего от испарения в цистернах, окрашенных в темный цвет, составили 1,24%, а в светлый — 0,83%. Определить потери горючего в поезде, который имеет 45 цистерн, если известно, что количества цистерн, окрашенных в темный и светлый цвета, обратно пропорциональны числам 2 и 3. Емкость цистерны 16,5 *т* горючего.

**42.** Разность двух целых чисел равна 48. Если первое число разделить на второе, то в частном получится 4, а в остатке — 3. Найти эти числа.

**43.** В колхозном саду 2860 плодовых деревьев. На каждые 10 яблонь приходится 3 грушевых и 2 сливовых дерева, а количество вишневых деревьев составляет $33\frac{1}{3}\%$ яблонь, груш и слив вместе взятых. Сколько в саду каждого вида деревьев?

**44.** Четыре товарища в 1960 г. купили в складчину футбольный мяч. Первый внес половину суммы, второй — $\frac{1}{3}$ того, что внесли все его товарищи, третий — $\frac{1}{4}$ того, что все его товарищи, четвертый — оставшиеся 5 руб. Сколько было уплачено за футбольный мяч?

**45.** Доказать, что нет целых чисел, которые от перестановки начальной цифры в конец увеличиваются в 5 раз.

РАЗДЕЛ II

# АЛГЕБРА

## Преобразование алгебраических выражений. Радикалы и действия над ними

**46.** Представить в виде суммы двух квадратов

$$3x^2 - 5x + 8.$$

**47.** Упростить выражение

$$\left(\frac{2a+10}{3a-1} + \frac{130-a}{1-3a} + \frac{30}{a} - 3\right)\frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}.$$

**48.** Упростить выражение

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right],$$

полученный результат вычислить при $x = \frac{1}{a-1}$.

**49.** Найти числовое значение выражения

$$\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x}} + \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}} \text{ при } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**50.** Упростить выражение

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}.$$

**51.** Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$$

**52.** Доказать тождество

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1).$$

**53.** Упростить выражение

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$$

Разложить на множители:

54. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

55. $11x-3x^2+70$.

56. $x^3+5x^2+3x-9$.

57. $x^3+2x^4+4x^2+x+2$.

58. Доказать, что если

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$

то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0,\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0.$$

59. Доказать, что двучлен $3x^4+1$ есть сумма трех квадратов.

60. Упростить выражение

$$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

если $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$, причем $k>1$.

61. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{2^{-2}}{a}\right)\left[(a-1)\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}-\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2-1)(a-1)}}\right].$$

62. Доказать равенство

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

63. Вычислить выражение

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}} \text{ при } x=\frac{2mn}{n^2+1};\quad m>0,\ n>1.$$

64. Упростить выражение

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}.$$

65. Упростить выражение

$$\left(\frac{a+\sqrt[3]{2a^2x}}{\frac{2x+\sqrt[3]{4ax^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x}}}-1-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-6}.$$

**66.** Делением числителя на знаменатель упростить выражение

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}.$$

**67.** Уничтожить иррациональность в знаменателе

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}.$$

**68.** Доказать, что

$$y=a+bp^{\frac{1}{3}}+cp^{\frac{2}{3}}$$

удовлетворяет уравнению

$$y^3-3ay^2+3y(a^2-bcp)-a^3-b^3p-c^3p^2+3abcp=0.$$

**69.** Доказать, что при любом целом значении $x$ числовая величина выражения $x^4+6x^3+11x^2+6x$ кратна 24.

**70.** Уничтожить иррациональность в знаменателе

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}.$$

Упростить выражения:

**71.** $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$; $x\geqslant 1$.

**72.** $\dfrac{(a+2b)^3-(a-2b)^3}{(2a+b)^3+(2a-b)^3}:\dfrac{3a^4+7a^2b^2+4b^4}{4a^4+7a^2b^2+3b^4}$; $a\neq 0$.

**73.** $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\left(\dfrac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)$.

**74.** $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{x(\sqrt{b}+\sqrt{3x^{-1}})^2}$.

**75.** Доказать, что дробь

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$$

несократима ни при каких целых значениях $a$.

**76.** Вычислить выражение

$$\left\{\frac{(1+a)^{\frac{1}{2}}}{(1+a)^{\frac{1}{2}}-(1-a)^{\frac{1}{2}}}+\left[\frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}-1+a}{1-a}\right]^{-1}\right\}(\sqrt{a^{-2}-1}-a^{-1});$$

$$-1<a<1,\quad a\neq 0.$$

**77.** Доказать, что если $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, то $(a+b+c)^3=27abc$.

78. Определить значение $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ в выражении

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right)=\alpha.$$

79. Вычислить

$$(1+x^{-1})^{-2}+(1-x^{-1})^{-2},$$

если $x=(1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ и $n>1$.

80. Разложить на рациональные множители

$$x^{10}+x^5+1.$$

81. Найти значение выражения $x^3+ax+b$ при

$$x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}.$$

82. Упростить выражение

$$\left\{\frac{1}{2}[(1+\sqrt{a})^5+(1-\sqrt{a})^5]-(a\sqrt{5}-1)^2\right\}:2a.$$

83. Доказать тождество

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

84. Разложить на множители

$$x^4+5x^3+15x-9.$$

85. Доказать, что если $a-1$ делится на $k^m$, то $a^k-1$ делится на $k^{m+1}$ ($k$ и $m$ — целые положительные числа, $a$ — целое число, $k\neq 1$ и $a\neq 1$).

86. Показать, что при любом целом значении $n$ выражение $n^5-5n^3+4n$ делится на 120.

87. Доказать тождество

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c).$$

88. Упростить выражение

$$\frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

89. Доказать тождество

$$(x+y+z)^3-[(x+y-z)^3+(x+z-y)^3+(y+z-x)^3]=24xyz.$$

90. Доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 24, если $p$ — простое число и $p \geqslant 5$.

## Уравнения и системы уравнений 1-й степени *

Решить уравнения:

91. $\frac{6b + 7a}{6b} - \frac{3ay}{2b^2} = 1 - \frac{ay}{b^2 - ab}$.

92. $2x(3x - 2) - 3\left[1 - (2 - x)(2x + 3) - \frac{x - 3}{2}\right] = 13$.

93. $\frac{x - a - b}{c} + \frac{x - b - c}{a} + \frac{x - c - a}{b} = 3; \quad abc \neq 0$.

94. $\frac{3ab + 1}{a} x = \frac{3ab}{a + 1} + \frac{(2a + 1)x}{a(a + 1)^2} + \frac{a^2}{(a + 1)^3}; \quad a \neq 0, \ a \neq -1$.

Решить системы уравнений:

95. $\begin{cases} \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = 2; \\ \frac{3}{x + y} + \frac{4}{x - y} = 7. \end{cases}$

96. $\begin{cases} \frac{xy}{x + y} = a; \\ \frac{xz}{x + z} = b; \\ \frac{yz}{y + z} = c; \end{cases} \qquad abc \neq 0.$

97. $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{a + b - \frac{ab}{a + b}}{a - b + \frac{ab}{a - b}}; \\ x + y = 2a^3; \end{cases} \qquad |a| \neq |b|.$

98. $\begin{cases} \frac{bx + 1}{a + y} = 1; \\ \frac{x + y}{x - y} = \frac{a + b}{a - b}; \end{cases} \qquad a \neq 0, \ b \neq 0; \ a - b \neq 0.$

99. $\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

* При отсутствии специальных указаний относительно области допустимых значений параметров следует считать, что речь идет о совокупности действительных чисел.

**100.** $\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0; \\ b^3 + b^2x + by + z = 0; \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0. \end{cases}$

**101.** $\begin{cases} ax + by + cz = a + b + c; \\ bx + cy + az = a + b + c; \\ cx + ay + bz = a + b + c; \end{cases} \quad a + b + c \neq 0.$

**102.** $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4k = 30; \\ 2x - 3y + 5z - 2k = 3; \\ 3x + 4y - 2z - k = 1; \\ 4x - y + 6z - 3k = 8. \end{cases}$

**103.** $\begin{cases} x + y + 2z + 3u = 1; \\ 3x - y - z - 2u = -4; \\ 2x + 3y - z - u = -6; \\ x + 2y + 3z - u = -4. \end{cases}$

**104.** $\begin{cases} \dfrac{x_1 - a_1}{m_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{m_2} = \ldots = \dfrac{x_n - a_n}{m_n}; \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a; \end{cases} \quad m_i \neq 0,\ i = 1, 2 \ldots, n.$

**105.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3; \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3; \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9; \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6; \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2; \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

**106.** При каких целых значениях $k$ решения системы

$$\begin{cases} kx - 2y = 3; \\ 3x + ky = 4 \end{cases}$$

удовлетворяют условию $x > 0$, $y < 0$?

Решить задачи:

**107.** В литейном цехе изготовлено за день 90 крупных, средних и мелких отливок. Средних отливок было на четыре меньше, чем крупных, а мелких на 10 больше, чем крупных и средних вместе. Сколько было отливок каждого вида?

**108.** Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 12 дней. После 8 дней один из них отказался продолжать работу и другой окончил ее сам за 5 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу?

**109.** Разделить число 18 000 на две части так, чтобы 4% первой части и 6% второй составили бы вместе столько же, сколько 5,5% всего числа.

**110.** Найти значение $a$ и $b$ в двучлене $y = ax + b$ при условии, что $y = -11$, если $x = -2$, и $y = 1$, если $x = 2$.

**111.** На заводском складе находится железный лом, который содержит в среднем 2% кремния, и чугун с содержанием 6% кремния. Для технологического процесса необходимо составить 100 *кг* смеси со средним содержанием 3,2% кремния. Сколько требуется для этого железа и сколько чугуна?

**112.** Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $2\frac{2}{3}$; разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

**113.** Сплав из меди и цинка весом в 24 *кг* при погружении в воду потерял в весе $2\frac{8}{9}$ *кг*. Определить количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде $11\frac{1}{9}\%$ веса, а цинк $14\frac{2}{7}\%$.

**114.** Имеется два сплава золота и серебра; в первом количества этих металлов находятся в отношении 2 : 3, во втором — в отношении 3 : 7. Сколько необходимо взять каждого сплава, чтобы получить 8 *кг* нового сплава, в котором количества золота и серебра были бы в отношении 5 : 11?

**115.** Вычислить вес и пробу сплава серебра с медью, зная, что, сплавив его с 3 *кг* чистого серебра, получат сплав 900-й пробы, а сплавив его с 2 *кг* сплава 900-й пробы, получат сплав 840-й пробы.

**116.** На участке одноколейного железнодорожного пути длиною в 20 *км* надо уложить рельсы. Для укладки имеются рельсы длиной в 25 *м* и 12,5 *м*. Если уложить все рельсы длиною в 25 *м*, то рельсов длиной в 12,5 *м* надо будет добавить 50% от всего их количества. Если же уложить все рельсы длиною в 12,5 *м*, то рельсов длиною в 25 *м* надо добавить $66\frac{2}{3}\%$ от всего их количества. Определить количество рельсов того и другого рода.

**117.** От станции $A$ отправился поезд, который идет со скоростью 30 *км/ч*; через некоторое время за ним отправился второй поезд со скоростью 40 *км/ч*. Оба поезда должны были прибыть на станцию $B$ в одно и то же время, но когда первый поезд прошел $\frac{2}{3}$ расстояния между станциями, его скорость уменьшилась вдвое, поэтому второй

поезд догнал первый, не доезжая до станции $B$ 8 *км*. Определить расстояние между станциями $A$ и $B$.

**118.** Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 24 *ч*, если бы делали ее все одновременно. Вместо этого они приступили к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если приступивший к работе первым, проработал в 5 раз больше, чем приступивший к ней последним?

**119.** Самолет летел сначала со скоростью 220 *км/ч*. Когда ему осталось пролететь на 385 *км* меньше, чем он пролетел, он изменил скорость и стал двигаться со скоростью 330 *км/ч*. Средняя скорость его на всем пути оказалась равной 250 *км/ч*. Какое расстояние пролетел самолет?

**120.** Колхозник, идущий из колхоза на автобусную станцию, прошел за первый час 3 *км*. Он рассчитал, что опоздает к автобусу на 40 *мин*, если будет двигаться с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 *км/ч* и прибыл на автостанцию за 45 *мин* до отхода автобуса. Каково расстояние от колхоза до автостанции?

**121.** Сосуд, наполненный жидкостью, имеет два крана. Если открыть оба крана на $a$ *ч* и потом второй кран закрыть, то вся оставшаяся жидкость в сосуде выльется через первый кран за $b$ *ч*, но если через $a$ *ч* вместо второго крана закрыть первый, то жидкость выльется через второй кран за $c$ *ч*.

За сколько времени вся жидкость может вылиться через каждый кран отдельно?

**122.** В первом сосуде в восемь раз больше воды, чем во втором. Из первого сосуда перелили во второй $a$ *л* воды, и в результате этого установили, что количество воды во втором сосуде равно $\frac{1}{4}$ того количества, которое осталось в первом. Сколько было воды в каждом сосуде?

**123.** Для экскурсии нужно собрать деньги. Если каждый экскурсант внесет по 75 коп., то на расходы нехватит 4,4 руб.; если каждый внесет по 80 коп., то останется 4,4 руб. Сколько человек принимает участие в экскурсии?

**124.** Два туриста, находящиеся друг от друга на расстоянии $a$ *км*, отправляются одновременно из пунктов $A$ и $B$, двигаясь по прямой $AB$ в одном направлении, и встречаются через $b$ *ч*. Они встретились бы через $c$ *ч*, если бы шли навстречу друг другу. Найти скорость каждого туриста.

**125.** Из прямоугольного жестяного листа периметром 96 *см* сделана открытая сверху коробка следующим образом: с углов листа вырезано по квадрату со стороной в 4 *см* и края спаяны. Каких размеров был лист, если объем полученной коробки равен 768 $см^3$?

**126.** Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и

за ним меньшее число, а к меньшему приписать справа большее число и затем нуль, то из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

**127.** Мотоциклист ехал из одного города в другой со скоростью $a$ *км/ч*. Назад он ехал на $b$ *км/ч* быстрее. Таким образом, на возвращение было затрачено на $c$ *ч* меньше. Какое расстояние между городами?

**128.** Расстояние между двумя городами машина прошла за 3 дня. За первый день она прошла $\frac{3}{8}$, а за второй — $\frac{5}{12}$ всего расстояния. За третий день она прошла на 40 *км* больше шестой части всего расстояния. Найти расстояние между городами.

**129.** Два бульдозера различной мощности должны расчистить участок. Сначала работал первый в течение $\frac{2}{5}$ того времени, за которое второй мог бы выполнить всю работу; затем они стали работать оба и закончили работу. Если бы с самого начала работали оба бульдозера вместе, то работа была бы закончена на 2 *ч* 15 *мин* раньше, причем первый расчистил бы в 5 раз больше, чем фактически сделал второй.

За сколько часов каждый бульдозер, работая отдельно, может расчистить этот участок?

**130.** Две бригады начали совместную заготовку 22 400 $м^3$ дров; при этом они предполагали закончить всю заготовку за 40 рабочих дней. После 10 дней совместной работы производительность первой бригады повысилась на 30%, а производительность второй — на 16%, поэтому им удалось выполнить оставшуюся работу за 24 рабочих дня. Определить, сколько кубических метров в день предполагала первоначально заготовить каждая бригада?

**131.** Трое рабочих должны выполнить определенную работу. Производительность в день третьего рабочего равна среднему арифметическому производительностей первых двух. Если бы третий рабочий проработал сначала один $a$ дней, то для окончания остальной работы первому потребовалось бы $b$ дней, а второму — $c$ дней. За сколько дней может выполнить всю работу каждый рабочий отдельно?

**132.** Длина обода переднего колеса экипажа на $a$ *м* меньше длины заднего. Переднее колесо на расстоянии $b$ *м* сделало столько оборотов, сколько заднее на расстоянии $c$ *м*. Определить длину обода каждого колеса.

**133.** Некоторое количество денег было разложено на $n$ кучек. После этого $\frac{1}{n}$ часть денег из первой кучки переложили во вторую. Затем $\frac{1}{n}$ часть денег, оказавшихся во второй кучке, переложили в

третью и т. д. Наконец, $\frac{1}{n}$ часть денег, оказавшихся в $n$-й кучке, переложили в первую кучку. После этого в каждой кучке стало $N$ руб. Сколько денег в каждой кучке было до перекладывания (можно ограничиться случаем $n = 5$)?

134. Два автомобиля выезжают одновременно в одном направлении: один из города $A$, а другой из города $B$. Расстояние между городами равно $a$ *км*. Автомобили едут в направлении от $A$ к $B$ и встречаются в городе $C$. Скорость одного автомобиля в два раза больше скорости другого. Затем автомобиль, имеющий меньшую скорость, возвращается обратно, а вслед за ним через $b$ *ч* едет другой, и они вновь встречаются на расстоянии $c$ *км* от города $B$. Определить скорости автомобилей и время, прошедшее до первой их встречи.

135. Два куска латуни весят $a$ *кг*. В первом куске имеется чистой меди $p\%$, во втором $q\%$, при этом в первом куске чистой меди на $b$ *кг* больше, чем во втором. Сколько весит каждый кусок латуни?

136. Рабочий изготовил в установленный срок некоторое число одинаковых деталей. Если бы он ежедневно изготовлял их на 10 шт. больше, то выполнил бы эту работу на $4\frac{1}{2}$ дня раньше, а если бы он делал в день на 5 деталей меньше, то опоздал бы на 3 дня. Сколько деталей и в какой срок он изготовил?

137. Лодочник проплыл в лодке по течению реки расстояние от $A$ до $B$ и затем вернулся обратно в пункт $A$. Выяснилось, что против течения лодочник плыл на $6\frac{2}{3}$ *ч* больше, чем по течению. Определить скорость, с какой бы он плыл в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что за 3 *ч* лодочник проплыл по течению реки столько же километров, сколько за 7 *ч* против течения. Расстояние от $A$ до $B$ равно 21 *км*.

138. Из пункта $A$ в пункт $B$ по течению реки отплыл плот. Расстояние между пунктами в 3,6 раза больше, чем скорость течения. Через 2 *ч* 24 *мин* вдогонку плота направилась моторная лодка со скоростью 20 *км/ч*. Лодка догнала плот и сразу же поплыла обратно в пункт $A$. Моторная лодка в пункт $A$, а плот в пункт $B$ прибыли одновременно. Определить скорость течения реки.

139. Определить плотность двух веществ, если плотность смеси, которая содержит 1 *г* первого вещества и 2 *г* второго, равна $\frac{1}{3}$ *г/см*$^3$, а смеси, имеющей 2 *г* первого и 1 *г* второго, составляет $\frac{1}{4}$ *г/см*$^3$.

140. Две точки движутся по двум окружностям, радиусы которых относятся, как 1 : 6. Определить скорость движения каждой точки, если известно, что за 10 *сек* точка, движущаяся по большой окружности, прошла на 2 *м* больше и совершила при этом в 5 раз меньше оборотов.

## Квадратные уравнения

**141.** Составить квадратное уравнение по его корням

$$x_1 = \frac{3+2\sqrt{5}}{3}, \quad x_2 = \frac{3-2\sqrt{5}}{3}.$$

**142.** Составить квадратное уравнение по его корням

$$x_1 = \frac{a}{a-b}, \quad x_2 = \frac{b}{b-a}.$$

**143.** Уравнение $x^2 + px + q = 0$ с рациональными коэффициентами имеет корень $x_1 = 1 + \sqrt{3}$. Найти второй корень уравнения.

**144.** $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2 - ax + a - 1 = 0$. Найти значение $a$ ($a$ — действительное число), чтобы величина выражения $x_1^2 + x_2^2$ была наименьшей.

**145.** Пусть $x_1$ и $x_2$ корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Составить такое квадратное уравнение, корни которого были бы равны $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$.

**146.** Корни $x_1$ и $x_2$ квадратного уравнения $x^2 + px + 12 = 0$ удовлетворяют уравнению $x_1 - x_2 = 1$. Найти коэффициент $p$.

**147.** Составить квадратное уравнение, один корень которого равен $\frac{1}{3}$ большего корня, а второй корень на 3 меньше меньшего корня уравнения $x^2 - 14x + 45 = 0$.

**148.** Дано квадратное уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Составить такое квадратное уравнение, чтобы его корни:

а) отличались от корней данного уравнения только знаками;

б) были бы обратными корням данного уравнения;

в) были бы на данную величину $n$ больше (меньше) корней данного уравнения;

г) равнялись бы корням данного уравнения, умноженным (поделенным) на $n$.

**149.** Разложить $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ на два множителя, сумма которых была бы равна $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

**150.** При каком вещественном значении $m$ выражение $x^2 + m(m-1)x + 36$ есть полный квадрат?

**151.** При некоторых значениях $p$ уравнение

$$x^2 + 3x + 3 + p(x^2 + x) = 0$$

имеет равные корни. Составить квадратное уравнение, имеющее корнями эти значения $p$.

**152.** При каких значениях $k$ квадратное уравнение $(2k-1)x^2 + (k+1)x + k - 4 = 0$ имеет равные корни?

153. Составить квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

154. Доказать, что если $a$, $b$ и $c$ — стороны треугольника, то корни уравнения $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ мнимые.

155. $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$, где $a$ — целое положительное число.

Доказать, что $x_1^5 + x_2^5$ есть целое число, и вычислить, при каком наименьшем значении $a$ эта сумма делится на 25.

156. При каких целых значениях $k$ корни квадратного уравнения $kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$ рациональны?

157. Решить уравнение

$$\frac{(a-x)^2 - (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}, \text{ где } |a| \neq |b|.$$

158. Показать, что если в равенстве

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$$

коэффициенты $a$, $b$ и $c$ рациональны, то $a = b = c = 0$.

Решить уравнения:

159. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-b} = 1 + \frac{1}{b}$.

160. $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} = 0$.

161. $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$.

162. $1 - \frac{2b}{x-a} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + x^2 - 2ax}$.

163. Найти все корни уравнения

$$16x^4 + 625 = 0.$$

164. Доказать, что корни уравнения

$$x^2 + 4kx - 4(k+1) = 0$$

при любом действительном значении $k$ — действительные числа.

Выяснить знаки корней при возможных значениях параметра $k$.

165. Найти такие значения для $p$ и $q$, чтобы корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ были также равны $p$ и $q$.

166. Доказать, что все корни уравнения $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ действительные числа, если $a$, $b$ и $c$ тоже действительные числа.

167. При каких вещественных значениях $m$ в уравнении

$$2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$$

один корень будет в два раза больше другого; найти эти корни.

**168.** Решить уравнение

$$8x^4 + 8x^3 - x = a.$$

**169.** Решить уравнение

$$1 + lx + \frac{x^2}{a-x} = \frac{a^2}{a-x}.$$

**170.** Будут ли эквивалентными уравнения

$$x - 7 = 2 \quad \text{и} \quad x^2 - 7x = 2x?$$

Решить задачи:

**171.** Сумма числа сторон выпуклого многоугольника и числа его диагоналей равна 10. Определить число сторон многоугольника.

**172.** За *n ч* трактор вспахивает на *p га* больше лошади. Сколько гектаров вспахивает за *n ч* лошадь и сколько трактор, если трактор пашет 1 *га* на *t ч* быстрее лошади?

**173.** К материальной точке приложены две силы, угол между которыми равен 60°. Одна из приложенных сил на 1 *н* больше другой, а равнодействующая сила на 2 *н* больше, чем меньшая сила. Определить величину приложенных сил.

**174.** Две бригады рабочих укладывали шпалы на железнодорожном полотне. Первая бригада работала на *t* дней больше, чем вторая, и за время работы уложила шпалы на *s км* полотна. Вторая бригада укладывала в день на *m км* пути больше первой и за время своей работы уложила на *n км* пути меньше, чем первая. Сколько километров пути укладывала каждая бригада в один день?

**175.** За выгрузку товара уплачено *a* руб. Так как рабочих явилось на 3 меньше, то каждый из них получил на 3 руб. больше, чем предполагалось. Сколько намечалось рабочих на выгрузку товара? Провести исследование решения задачи.

**176.** Знаменатель дроби на 2 единицы больше числителя. Если от обратной величины этой дроби с числителем, уменьшенным на 1, отнять данную дробь, то получится $\frac{11}{15}$. Найти величину данной дроби.

**177.** Трое рабочих должны выкопать канаву определенной длины. Если канаву разделить на три равные части, то первый кончит свою часть работы на 2 *ч* раньше третьего, а второй выполнит свою часть на 30 *мин* раньше, чем первый сможет сделать две части. Если же первый, закончив свою треть работы, станет помогать третьему, то третий (вместе с первым) закончит свою часть одновременно со вторым. За сколько часов все трое закончат работу, работая вместе?

**178.** Два каменщика выполняют некоторую работу на протяжении 1 *ч*, после чего второй каменщик заканчивает ее за 30 *мин*. Если бы каждый из них работал во столько раз медленнее, сколько часов ему необходимо для выполнения всей работы, то им вместе пришлось бы работать 2 *ч*, и, кроме того, второму каменщику — еще 2,5 *ч*. Сколько нужно времени каждому из них для выполнения всей работы?

**179.** Со станции $A$ вышел в 5 *ч* утра почтовый поезд по направлению к станции $B$, отстоящей от $A$ на 1080 *км*. В 8 *ч* утра вышел со станции $B$ по направлению к $A$ скорый поезд, который проходил в час на 15 *км* больше, чем почтовый поезд. Когда встретились поезда, если их встреча произошла на середине пути между $A$ и $B$?

**180.** Для выпечки пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для выпечки ржаного хлеба взято на 10 *кг* больше муки, а именно столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 *кг* хлеба?

**181.** Из пункта $A$ выехали одновременно в пункт $B$ три автомобиля, причем скорость второго на $a$ *км/ч*, а скорость третьего на $2a$ *км/ч* больше скорости первого.

Третий автомобиль, достигнув пункта $B$ и возвращаясь сразу же обратно в пункт $A$, встретил по дороге второй автомобиль на $\frac{3a}{70}$ *ч* раньше, чем первый.

Найти скорость первого автомобиля, если известно, что время, затраченное третьим автомобилем на дорогу от $A$ в $B$, численно равно $\frac{1}{10}$ скорости первого автомобиля.

**182.** Двое рабочих, работая одновременно, могут выполнить определенную работу за 1 день. Если бы, работая один за другим, каждый был занят такую часть дня, какую часть работы в день он может выполнить, то они сделали бы $\frac{1}{a}$ часть всей работы. За какое время каждый рабочий, работая отдельно, может выполнить всю работу?

**183.** Переднее колесо трактора делает на расстоянии $a$ *м* на $b$ оборотов больше заднего. Найти длину окружности каждого колеса, если окружность заднего на $t$ *м* больше окружности переднего.

**184.** Две молотилки обмолачивают весь хлеб за $a$ дней. Если бы первая молотилка обмолотила половину всего хлеба, а затем вторая — остальную часть, они бы проработали $b$ дней. За сколько дней каждая из них в отдельности могла бы окончить эту работу? Провести исследование.

**185.** При прохождении одного и того же расстояния в $S$ *км* трехтонная автомашина расходует бензина на $a$ *л* больше полуторатонной. Сколько литров бензина расходует каждая машина на пробег этого расстояния, если полуторатонная машина при расходовании 1 *л* бензина проходит на $b$ *м* больше трехтонной?

**186.** Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Первая автомашина едет со скоростью 40 *км/ч*, а скорость второй составляет 125% скорости первой. Через 30 *мин* из того же пункта и в том же направлении выехала третья автомашина, которая обогнала вторую на 1,5 *ч* позже, чем первую. Какова скорость третьей автомашины?

**187.** Поезд, выезжающий из города $A$ в город $B$, должен приехать туда через $a$ *ч*. Одновременно с ним из города $C$ выезжает другой поезд. Чтобы успеть приехать в $B$ вместе с первым поездом, он должен каждый километр проезжать на 1 *мин* скорее, чем первый поезд. Расстояние от $C$ до $B$ на $b$ *км* больше расстояния от $A$ до $B$. Определить эти расстояния.

**188.** Через два крана при совместном их действии бассейн наполняется за $p$ *ч*. Если бы сначала один кран наполнил $\frac{1}{n}$ часть бассейна, а второй — остальную часть, то для заполнения всего бассейна потребовалось бы $a$ *ч*. За какое время наполняется бассейн через каждый кран в отдельности?

**189.** Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из $A$ в $B$ и из $B$ в $A$. После встречи один из них находится в пути еще 2 *ч*, а другой — $\frac{9}{8}$ *ч*. Определить их скорости, если расстояние между $A$ и $B$ равно 210 *км*.

**190.** Два спортсмена выбегают одновременно (первый — из $A$ в $B$, второй — из $B$ в $A$) и встречаются на расстоянии $a$ *м* от $A$. Пробежав дорожку $AB$ до конца, каждый из них поворачивает обратно, и они вновь встречаются на расстоянии $b$ *м* от $B$. Найти длину беговой дорожки $AB$.

**191.** Из двух пунктов $A$ и $B$ одновременно навстречу один другому выехали два велосипедиста и встретились через $t$ *ч*. С какой скоростью двигался каждый велосипедист, если первый проезжал $m$ *км* на $q$ *ч* быстрее второго и если расстояние $AB$ равно $s$ *км*?

**192.** Два велосипедиста выехали одновременно навстречу один другому из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми равно 28 *км*. Через час езды они встретились и, не останавливаясь, продолжали ехать с той же скоростью. Первый прибыл в пункт $B$ на 35 *мин* раньше, чем второй прибыл в пункт $A$. Какова скорость каждого велосипедиста?

**193.** Из двух станций одновременно выехали навстречу один другому два поезда — товарный и пассажирский. К моменту встречи товарный поезд прошел на $d$ *км* меньше, чем пассажирский. Остаток пути к конечной станции пассажирский поезд прошел за $m$ *ч*, а товарный за $n$ *ч*. Найти расстояние между станциями и скорость каждого поезда. Движение поездов предполагается равномерным.

**194.** Длина трамвайной линии 15 *км*. Когда увеличили скорость трамвая на 3 *км/ч*, он начал затрачивать на каждый рейс на полчаса меньше, чем раньше (рейсом называется пробег трамвая в оба конца). Сколько времени затрачивает трамвай на рейс и какова его скорость?

**195.** Группа экскурсантов должна была заплатить за обед в ресторане $a$ руб. Если бы их было на $b$ меньше и они дополнительно заказали бы еще еды на $d$ руб., то каждому пришлось бы заплатить на $c$ руб. больше. Сколько было экскурсантов?

**196.** Расстояние между $A$ и $B$ по железной дороге 66 *км*, а по водному пути — 80,5 *км*. Из $A$ поезд выходит на 4 *ч* позже парохода и прибывает в $B$ на 15 *мин* раньше. Определить среднюю скорость поезда и парохода, если первая больше второй на 30 *км/ч*.

**197.** Дирижабль пролетел расстояние 40 *км* против ветра (скорость ветра 30 *км/ч*), а затем возвратился обратно, затратив в оба конца 2,5 *ч*. Определить скорость дирижабля в покоящемся воздухе.

**198.** Три автомобиля выезжают одновременно из города $A$ по направлению к городу $B$. Расстояние между городами равно $s$ *км*. Скорость второго автомобиля на $a$ *км/ч*, а скорость третьего на $2a$ *км/ч* больше, чем скорость первого.

Через $t$ *сек* после выезда из $A$ третий автомобиль возвращается обратно и, встретившись с первым автомобилем не доезжая города $B$, вновь направляется с увеличенной в $\frac{5}{4}$ раза скоростью к городу $B$, куда и прибывает одновременно со вторым автомобилем. Определить скорость первого автомобиля.

**199.** Определить целое положительное число по следующим данным: если приписать к нему справа цифру 5, то получим число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 3, при этом частное должно быть на 16 меньше делителя.

**200.** Два автомобиля, расстояние между которыми равно $a$ *км*, едут по одной прямой дороге в направлении к пункту $A$ с равными скоростями $v$ *км/ч*. В пункте $A$ направление дороги меняется так, что угол между двумя трассами дороги составляет 90°. Определить наименьшее расстояние между автомобилями (по прямой линии) после выезда из пункта $A$ впереди едущего автомобиля и время от того момента, когда последний свернул на другое направление дороги.

**201.** Два машиностроительных завода получили заказ для строительства гидростанций: первый — изготовить 120 моторов, второй — 80 моторов, причем первый должен был выполнить заказ на 2 дня позже второго. Чтобы скорее выполнить задание, каждый из заводов стал производить на 2 двигателя в день больше, чем предполагалось, и поэтому закончил выполнение заказа на 2 дня раньше намеченного срока. За сколько дней каждый из заводов должен был выполнить заказ?

**202.** Два прокатных стана могут, если они будут работать одновременно, прокатать определенное количество железа за 9 *ч* 36 *мин*. Если будет работать только первый стан, то на прокатку того же количества железа надо будет затратить на 8 *ч* больше, чем при работе одного второго стана. За какое время может прокатать это железо каждый стан отдельно?

**203.** Промышленное предприятие получило задание увеличить вдвое объем выпускаемой продукции на протяжении двух лет. Каким (в процентах) должен быть ежегодный прирост продукции, если он одинаков для каждого года?

**204.** После проведенной реконструкции на металлургическом заводе выплавка стали увеличилась с $a$ *т* до $b$ *т*. Производство стали на одного рабочего увеличилось на $c$ *т*. Найти количество выплавляемой стали на одного рабочего до реконструкции завода и после нее, если количество рабочих увеличилось на $d$ человек.

**205.** Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев будет изготовлять 6000 единиц продукции. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготовлять в месяц на 70 единиц больше, чем было предусмотрено, и на месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 единиц. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 единиц продукции?

**206.** Бассейн наполняется двумя трубами за 6 *ч*. Одна первая труба заполняет его на 5 *ч* скорее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

**207.** Три трактора разной мощности вспахивают поле. Третий трактор может вспахать поле на $a$ *ч* быстрее, чем первый, но на $b$ *ч* медленнее, чем второй. Первый и второй тракторы вместе могут вспахать поле на $c$ *ч* быстрее третьего. За сколько часов третий трактор вспашет поле?

**208.** Три землечерпалки углубляли фарватер при входе в гавань. Если бы работала только первая из них, то на работу потребовалось бы на 10 дней больше, а если бы только вторая,— то на 20 дней больше. При работе одной лишь третьей землечерпалки углубление фарватера заняло бы в 6 раз больше времени, чем при одновременном действии всех трех машин. Сколько времени потребуется для выполнения всей работы каждой землечерпалкой в отдельности?

**209.** В сосуде было 64 *л* спирта. Часть спирта отлили и долили столько же воды. Потом из сосуда отлили такое же количество литров смеси, после чего осталось 49 *л* чистого спирта. Сколько спирта вылили в первый раз и сколько во второй раз?

**210.** Два раствора, первый из которых содержал 800 *г*, а второй 600 *г* безводной серной кислоты, смешали и получили 10 *кг* нового раствора серной кислоты. Определить вес первого и второго растворов, вошедших в смесь, если известно, что процент содержания безводной серной кислоты в первом растворе на 10 больше, чем процент содержания безводной серной кислоты во втором.

**211.** В сосуде было 20 *л* чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

**212.** Из пункта $A$ по направлению в $B$ вышел пешеход. Через $a$ *ч* из $B$ навстречу пешеходу выехал велосипедист; через $b$ *ч* после своего выезда он встретил пешехода. Сколько времени надо велосипедисту и сколько пешеходу, чтобы пройти весь путь между $A$ и $B$, если велосипедисту на это требуется на $c$ *ч* менше, чем пешеходу?

**213.** Двое рабочих за выполненную работу получили — один $a$ руб., другой $b$ руб.; первый работал на $c$ *ч* больше второго. Если бы первый рабочий работал столько часов, сколько второй, а второй столько часов, сколько первый, то они получили бы поровну. Сколько часов работал каждый рабочий?

**214.** Трое рабочих могут выполнить определенную работу за $2\frac{1}{7}$ *ч*. Первый может выполнить эту работу вдвое быстрее второго и на 1 *ч* быстрее третьего. За какое время каждый рабочий может выполнить всю работу?

**215.** Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за $m$ дней. Если сначала один выполнит $\frac{3}{5}$ всей работы, а потом второй оставшуюся часть, то они затратят на это $n$ дней. Сколько времени требуется каждому рабочему, чтобы выполнить всю работу?

**216.** Тело, взвешенное на неравноплечих весах, уравновешивается при взвешивании на одной чашке грузом $p$, на другой — грузом $q$. Каков истинный вес тела?

**217.** По кругу движутся два тела; первое тело проходит круг на $d$ *сек* скорее, чем второе. Если тела движутся в одном направлении, то они встречаются каждые $m$ *сек*. Какую часть круга проходит каждое тело в секунду?

**218.** Разложить число $a$ на два таких слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим.

**219.** Найти условие, при котором можно вписать в окружность радиуса $r$ прямоугольник, равновеликий квадрату со стороной $k$.

**220.** Число $a$ разложить на два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

**221.** В зрительном зале имеется $a$ стульев, расположенных одинаковыми рядами. Если в каждом ряду добавить по $b$ стульев, а число рядов уменьшить на $c$, то общее число мест в зрительном зале увеличится на $\frac{1}{10}$. Сколько было стульев в каждом ряду?

**222.** Температура воздуха была утром $a°$. За день она поднялась на определенное число процентов, а к ночи снизилась на такое же число процентов, считая от максимальной дневной температуры, и стала равной $b°$. Определить процент изменения температуры.

**223.** Баржу с грузом в 600 $m$ разгрузили за три дня, при этом в первый и третий дни было выгружено $\frac{2}{3}$ всего груза. Во второй день было выгружено меньше, чем в первый, а в третий меньше, чем во второй. Разность между процентом уменьшения выгрузки в третий день по отношению к выгрузке второго дня и процентом уменьшения выгрузки второго дня по отношению к выгрузке первого дня была равна 5. Определить, сколько выгружалось каждый день и процент уменьшения выгрузки во второй и третий дни.

**224.** Имелось два разных сплава меди, причем процент содержания меди в первом был на 40% меньше, чем во втором. После того как

их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Определить процентное содержание меди в обоих сплавах, если известно, что в первом ее было 6 *кг*, а во втором — вдвое больше.

**225.** Две машины, работающие с двух сторон тоннеля, должны закончить проходку за 60 дней. Если первая машина выполнит 30% своей работы, а вторая $26\frac{2}{3}\%$ своей, то обе они пройдут 60 *м* тоннеля. Если бы первая машина выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы второй машины по проходке этого тоннеля, а вторая — 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого на 6 дней больше, чем второй. Определить, сколько метров в день проходит каждая машина.

## Иррациональные уравнения*

Решить уравнения:

**226.** $mx^{\frac{1}{2}} + x = n; \quad m > 0.$

**227.** $x\sqrt{3} + mx + \sqrt{x} = 0.$

**228.** $x^2 - 5 + \sqrt{x^2 - 6} = 7.$

**229.** $\sqrt{2x+1} + \sqrt{1-2x} = \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}.$

**230.** $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2.$

**231.** $\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}.$

**232.** $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x + 1.$

**233.** $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1.$

**234.** $\frac{5}{x-\sqrt{x^2-5}} - \frac{5}{x+\sqrt{x^2-5}} = 4.$

**235.** $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 = 3x + 7.$

**236.** $x\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15} = 2.$

**237.** $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}.$

**238.** $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$

---

* Под корнем четной степени будем понимать только его арифметическое значение. Что касается решений иррационального уравнения, то допустимыми будем считать только те, при которых подкоренные выражения корней четной степени данного уравнения не отрицательны.

239. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

240. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.

241. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

242. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34$.

243. $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{28}$.

244. $\sqrt{1+3x}+2=3\sqrt[4]{1+3x}$.

245. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$.

246. $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}}$.

247. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

248. $\frac{1}{\sqrt{x-6}}-\frac{2}{\sqrt{x^2-36}}-\frac{1}{\sqrt{x+6}}=0$.

249. $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{8+x}=2\sqrt[3]{2}$.

250. $\sqrt[5]{32-x}+\sqrt[5]{x}=2$.

251. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$.

252. $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$.

253. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

254. $\sqrt[m]{x(x+a)^2}+2\sqrt[m]{x^3}=3\sqrt[m]{x^2(x+a)}$; $a>0$.

255. $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}$.

256. $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20$.

257. $\sqrt{\frac{a}{x}-1}+\sqrt{\frac{x}{a}+1}=\sqrt{\frac{2a}{x}}$; $a>0$.

258. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$.

259. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

260. $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=\sqrt{2x+7}$

261. $\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=\frac{5}{2}$.

262. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

263. $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1.$

264. $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}.$

265. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

266. $\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=a\sqrt{x}.$

267. $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}.$

268. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}.$

269. $(x^2+\sqrt{x^4-a^2})^4(x^2-\sqrt{x^4-a^2})=a^2.$

270. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}.$

271. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1}, \quad n>0.$

272. $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2.$

273. $\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}; \quad a\neq 0, \quad b\neq 0.$

274. $\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left[\frac{1-a^2}{(1+a)^2}\right]^{\frac{1}{4}}; \quad |a|<1.$

275. $\sqrt{a+\sqrt{a}}+\sqrt{a-\sqrt{a}}=\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a+\sqrt{a}}}.$

276. $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a; \ a>c.$ Определить $y.$

277. $\frac{(x+a)\sqrt{x+b}+(x+b)\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}=\sqrt{ab}; \quad ab>0.$

278. $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}.$

279. $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}.$

280. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}.$

281. $x+\sqrt{a+x^2}-\frac{a^2+a}{2\sqrt{a+x^2}}=0; \quad a\geqslant 0.$

282. $\dfrac{1}{\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}}=\dfrac{2\sqrt{b}}{a+b}$; $a>0,\quad b>0.$

283. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{15}{8}\sqrt[3]{\dfrac{x}{15}}.$

284. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$

285. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$

286. $\dfrac{1}{\sqrt{11-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{4}{3}.$

287. $\sqrt[5]{(7x-3)^3}+8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}}=7.$

288. $\sqrt{a+bx}+\sqrt{b-cx}=\sqrt{a+b+(b-c)x};\quad b\neq 0,\ c\neq 0.$

289. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}.$

290. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}.$

291. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$

292. $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}=\sqrt{\dfrac{b+x}{b-x}}+\sqrt{\dfrac{b-x}{b+x}}.$

293. $\sqrt[3]{\dfrac{a+x}{a-x}}+\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\dfrac{b-x}{b+x}}+\sqrt[3]{\dfrac{b+x}{b-x}}.$

294. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}=\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{3+x}}-\sqrt[3]{\dfrac{3+x}{3-x}}.$

295. $\dfrac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{a-cx}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{ax-b}}=\dfrac{\sqrt{a-bx}-\sqrt{a-cx}}{\sqrt{a-bx}-\sqrt{ax-b}}.$

296. $\dfrac{\sqrt{1+a^{-2}x^2}-\dfrac{x}{a}}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}+\dfrac{x}{a}}=\dfrac{1}{4}.$

297. $\dfrac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a^3\,\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}.$

298. $\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}+\sqrt[3]{x^2-a^2}=\sqrt[3]{a^2}.$

299. $\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}=4;\quad a>0.$

300. $\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=x-a.$

Решить системы уравнений:

**301.** $\begin{cases} 3\sqrt{4x+2y}-5\sqrt{2x-y}=2; \\ 7\sqrt{4x+2y}+2\sqrt{2x-y}=32. \end{cases}$

**302.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2; \\ 4y^2-1=3y(x-1). \end{cases}$

**303.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^3}{y}}-\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}=\dfrac{65}{6}; \\ x-y=5. \end{cases}$

**304.** $\begin{cases} \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{17}=0; \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6. \end{cases}$

**305.** $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\dfrac{2}{3}x+5; \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

**306.** $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{y}+\dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{2x}=\dfrac{81}{182}; \\ \dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{y}-\dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x}=\dfrac{1}{182}. \end{cases}$

**307.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-1=\dfrac{61}{\sqrt{xy}}; \\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78. \end{cases}$

**308.** $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=80; \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=5. \end{cases}$

**309.** $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}; \\ x^3+2y^3=18. \end{cases}$

**310.** $\begin{cases} 1+y+\sqrt{x}=0; \\ y+\sqrt{x+23}=0. \end{cases}$

**311.** $\begin{cases} \sqrt{1-\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{x-1}; \\ 4x+y^2=4. \end{cases}$

**312.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}}+\sqrt{\dfrac{5x}{x+y}}=\dfrac{34}{15}; \\ x+y+xy=29. \end{cases}$

## Системы уравнений степени выше первой

Решить системы уравнений:

313. $\begin{cases} x^2+y^2=68; \\ xy=16. \end{cases}$

314. $\begin{cases} |x+y|=5; \\ |xy|=6. \end{cases}$

315. $\begin{cases} x^2y+xy^2=126; \\ x+y=9. \end{cases}$

316. $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7; \\ x^2+y^2+xy=133. \end{cases}$

317. $\begin{cases} y^2+xy=231; \\ x(x+y)=210. \end{cases}$

318. $\begin{cases} x^2-x^2y^2+y^2=19; \\ x-xy+y=4. \end{cases}$

319. $\begin{cases} x^3-y^3=37; \\ x-y=1. \end{cases}$

320. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7; \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

321. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=7; \\ xy=1728. \end{cases}$

322. $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{23}{4}; \\ x-y=1. \end{cases}$

323. $\begin{cases} \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=2; \\ x^2y+xy^2=2. \end{cases}$

324. $\begin{cases} x^3=5x+y; \\ y^3=x+5y. \end{cases}$

325. $\begin{cases} x+y=-4; \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{21}. \end{cases}$

326. $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11; \\ x^2+2xy+3y^2=17. \end{cases}$

327. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19(x-y)^2; \\ x^2-xy+y^2=7(x-y). \end{cases}$

328. $\begin{cases} x^3+y^3=1; \\ x^2y+2xy^2+y^3=2. \end{cases}$

329. $\begin{cases} 7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=48; \\ 7\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=48. \end{cases}$

330. $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25; \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$

331. $\begin{cases} x-y=\frac{2a}{a^2-1}; \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{2}{a}; \end{cases} \quad |a|\neq 1, \quad a\neq 0.$

332. $\begin{cases} xy+x+y=29; \\ x^2y+xy^2=180. \end{cases}$

333. $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2; \\ \frac{1}{xy}-xy=\frac{9}{20}. \end{cases}$

334. $\begin{cases} x^2+y^2=8; \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}. \end{cases}$

335. $\begin{cases} y^3+x^3y^3+x^3=17; \\ y+xy+x=5. \end{cases}$

336. $\begin{cases} x^2-y^2=z^2; \\ y-z=1; \\ (x+y+2)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=576. \end{cases}$

337. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4; \\ x+xy+y=2. \end{cases}$

338. $\begin{cases} x^4+y^4=b^4; \\ x+y=a. \end{cases}$

339. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481; \\ x^2+xy+y^2=37. \end{cases}$

340. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=84; \\ x+\sqrt{xy}+y=14. \end{cases}$

341. $\begin{cases} x^4+3x^2y^2+y^4=109; \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

342. Решить систему уравнений, не делая подстановок:

$$\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 24xy + 3x - 4y + 2; \\ 8x + 7y = 68. \end{cases}$$

343. $\begin{cases} x - z = y^2; \\ x^2 - z^2 = 3y^4; \\ y^3 + 3y + x + z = 26. \end{cases}$

344. $\begin{cases} xy + yz = a^2; \\ zx + xy = b^2; \quad abc \neq 0. \\ yz + zx = c^2; \end{cases}$

345. $\begin{cases} x + y + z = 13; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61; \\ xy + xz = 2yz. \end{cases}$

346. $\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + by + cz = d; \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$

347. $\begin{cases} x + y + z = 4; \\ x + 2y + 3z = 5; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$

348. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{7}{12}; \\ \dfrac{z+t}{zt} = \dfrac{5}{18}; \\ x + y + z + t = 22; \\ xyzt = 648. \end{cases}$

349. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ xy + yz + zx = 47; \\ (z - x)(z - y) = 2. \end{cases}$

350. $\begin{cases} x + y = 3z; \\ x^2 + y^2 = 5z; \\ x^3 + y^3 = 9z. \end{cases}$

351. $\begin{cases} xy + a(x - y) = m; \\ yz - a(y - z) = n; \\ zx - a(z + x) = p. \end{cases}$

352. $\begin{cases} x(x+y-z)=a; \\ y(x+y-z)=b; \\ z(x+y-z)=c; \end{cases}$ $abc \neq 0$.

353. $\begin{cases} (x+y+z)(ax+y+z)=1; \\ (x+y+z)(x+ay+z)=m; \\ (x+y+z)(x+y+az)=n. \end{cases}$

354. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z=\frac{7}{2}; \\ xyz=1. \end{cases}$

355. $\begin{cases} \frac{x(y+z)}{a}=\frac{y(z+x)}{b}=\frac{z(x+y)}{c}; \\ xy+yz+zx=(a+b+c)xyz; \end{cases}$ $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ и $abc \neq 0$.

356. $\frac{x+y-z}{5}=\frac{y+z-x}{7}=\frac{z+x-y}{11}=\frac{xyz}{3}$.

357. $\begin{cases} y^3+z^3=9a^3x^3; \\ y+z=3ax; \\ ax+y=z. \end{cases}$

358. $\begin{cases} x+y+z=0; \\ x-y+z=a; \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=b. \end{cases}$

359. $\begin{cases} y^2+yz+z^2=a^2; \\ x^2+xz+z^2=b^2; \\ x^2+xy+y^2=c^2; \end{cases}$ $a>0,\ b>0,\ c>0$.

## Показательные и логарифмические уравнения*

360. Во сколько раз логарифм выражения $\lg^2 a$ больше $\lg \lg a$ ($a > 10$)?

361. Определить $\lg 5$ без помощи таблиц, если $\lg 2 \approx 0{,}30103$.

362. Что больше $\log_a 2$ или $\log_a 3$?

---

* Показательную функцию будем рассматривать при положительном основании, отличном от единицы, на множестве действительных значений аргумента: $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $x$ — действительное число.

Логарифмическую функцию будем также рассматривать при положительном основании, отличном от единицы, на множестве действительных положительных значений аргумента: $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $x$ — действительное положительное число.

363. Определить $x$ без помощи таблиц, если $x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}$.

364. Вычислить выражение $15^{2\log_{15}40}$.

365. Найти, чему равно $7^{\log_{49}5-1}$.

366. Вычислить выражение $125^{\log_{25}16}$.

367. Вычислить с помощью таблиц выражение

$$x = \sqrt[8]{\frac{0{,}03586\sqrt[4]{257}}{0{,}00501}}.$$

368. Найти наибольшее значение выражения $\log_2^4 x + 12\log_2^2 x \times \log_2\frac{8}{x}$, если $1 < x < 64$.

369. Зная, что $\log_{12}2 = a$, найти $\log_6 16$.

370. Найти область существования функции

$$y = \sqrt{\lg\frac{x-5}{x^2-4}}.$$

371. Найти без таблиц $\log_9 5 \cdot \log_{25}27$.

372. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab$, то

$$\lg\frac{a+b}{3} = \frac{1}{3}(\lg a + \lg b),$$

где $a > 0$, $b > 0$.

373. Найти $\lg 15$, если известно, что

$$\lg 2 = 0{,}3010 \quad \text{и} \quad \lg 3 = 0{,}4771.$$

374. Найти, к чему стремится $x$, если известно, что $\log_5\log_4\log_3\log_2 x$ неограниченно уменьшается, т. е. стремится к $-\infty$.

375. Доказать, что $\lg_b a = \lg_{b^n} a^n$ при $a > 0$.

Решить уравнения:

376. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

377. $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

378. $5^x - 5^{3-x} = 20$.

379. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

380. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

381. $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}} = 5^{\sqrt{x}-4}$.

382. $x^x = x$ (найти положительные решения).

383. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

384. $\log_{a^k} a^x = b$; $a > 0$.

385. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \sqrt[4]{1{,}5}$.

386. $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$.

**387.** $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0.$

**388.** $10 \cdot 2^x - 4^x = 16.$

**389.** $3^{x^2-7,7x+16,5} = 27\sqrt{3}.$

**390.** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{7x-3}.$

**391.** $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$

**392.** $15^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}.$

**393.** $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}.$

**394.** $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$

**395.** $\left(\frac{57}{37}\right)^{1+x} + \left(\frac{57}{37}\right)^{1-x} = 10.$

**396.** $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$

**397.** $[2\,(2^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4.$

**398.** $\lg\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right) = 0.$

**399.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}.$

**400.** $x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}.$

**401.** $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1).$

**402.** $x^{\log_a x} = a^2 x.$

**403.** $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6.$

**404.** $\lg\frac{3x-5}{2x} + \lg\frac{x+1}{2\,(2x-7)} = \lg\frac{5}{x}.$

**405.** $2\,(\lg x - \lg 6) = \lg x - 2\lg(\sqrt{x} - 1).$

**406.** $\lg(x^3 + 8) - \lg(x + 2) = 1.$

**407.** $\frac{1}{2}\lg(x + 3) = 1 - \frac{1}{2}\lg(x + 24).$

**408.** $\lg 2 - \lg(y^2 - 4y + 5) = 1 - 2\lg\sqrt{y^2 + 4y + 5}.$

**409.** $\lg\left(\sqrt[\frac{1}{x}]{2^{x+6x^{-1}-5}} + 1\right) = \lg 2.$

**410.** $\lg 8 + 4\lg 2 = \lg 3 - \lg 12 + \lg 2^{3x^2-20x+2}.$

**411.** $2x^{\lg x} + 3x^{-\lg x} = 5.$

412. $\lg 10 + \frac{1}{3}\lg(271 + 3^{\sqrt{3x}}) = 2.$

413. $\lg(5 - x) + 2\lg\sqrt{3 - x} = 0.$

414. $2^{\frac{1}{\log_2 x}} = 4.$

415. $x^{\log_5 x} = 625.$

416. $4^{\lg x} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1 - \lg\frac{5}{2}}.$

417. $x^{\log_x 9} = 4x^2.$

418. $x^{\lg x} = \frac{100}{x}.$

419. $\log_{15}\log_4\log_3 x = 0.$

420. $\lg(3x + 4) + \lg(x - 8) = 2.$

421. $\lg(3x - 91) - \lg(30 - x) = 1.$

422. $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0.$

423. $x^{\log_3 3x} = 9.$

424. $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1.$

425. $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5.$

426. $\lg(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1) - 1 = \lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2\right) - 2\lg 2.$

427. $\lg(6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25.$

428. $\lg\sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1.$

429. $\lg(64^{-1}\sqrt[24]{2^{x^2-25}}) = 0.$

430. $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}.$

431. $\lg(3x^2 + 7) - \lg(3x - 2) = 1.$

432. $10^{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^4} = 0{,}0001.$

433. $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 50.$

434. $\lg\sqrt[3]{2^{4x-1}} = 1 - \lg 1{,}25.$

435. $3^{2-\log_3 x} = 81x.$

436. $1 - \lg a = \frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2} + \lg x + \frac{1}{3}\lg a\right);\ a > 0.$

**437.** $100x^{\lg x} = x^3$.

**438.** $x^{\lg x+1} = 100$.

**439.** $(\log_2 x)^2 + 3 = 2\log_2 x^2$.

**440.** $x^{2(\lg x)^2 - \frac{3}{2}\lg x} = \sqrt{10}$.

**441.** $\sqrt[\lg x]{x} = 10^{x^4}$

**442.** $\log_a (x+1) + \log_a x = 2;\ a > 0$.

**443.** $\log_2 (9x^2 - 20) - 2 = \log_2 6 + \log_2 x$.

**444.** $\log_7 \left(2x - \frac{9}{4}\right) - \log_7 x = \log_7 (x-3)$.

**445.** $\log_3 8^{x-1} \cdot \log_2 27 = x + 7$.

**446.** $\frac{\lg (25\sqrt{x} - 5\sqrt{x}) - 2}{\lg 6} = 1$.

**447.** $x^{\log_2 x} = 2^{(\log_2 x)^2}$.

**448.** $2\log_3 \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

**449.** $x = 100^{\frac{1}{2} - \lg \sqrt[4]{4}}$.

**450.** $\log_2 \log_2 x = \log_2 3 + \log_2 4$.

**451.** $\lg (2x - 51) - \lg (22 - x) = 2$.

**452.** $\lg \lg x = \sqrt{\frac{(m+n)^{\lg (m-n)}}{(m-n)^{\lg (m+n)}}}$.

**453.** $x = \sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt{ab}} \sqrt[-2]{\frac{a}{b}}}$ (вычислить путем логарифмирования).

**454.** $2\log_5 3 + 4\log_{25} 7 = \log_5 x$.

**455.** $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2 x} a = 0$.

**456.** $\log_{3x} 3 = (\log_3 3x)^2$.

**457.** $\lg \sqrt{1+x} + 3\lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$.

**458.** $\log_a 3 + \log_a (4^{x-2} + 9) = 1 + \log_a (4^{x-2} + 1)$.

**459.** $\lg (3x-4)^2 + \lg (2x-4)^2 = 2$.

**460.** Найти без помощи таблиц $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

Решить системы уравнений:

**461.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648; \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$

**462.** $\begin{cases} 8^x = 10y; \\ 2^x = 5y. \end{cases}$

**463.** $\begin{cases} x^y = y^x; \\ x^3 = y^2. \end{cases}$

**464.** $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200; \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689. \end{cases}$

**465.** $\begin{cases} x^{y+1} = 27; \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

**466.** $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3}; \\ (x+y)\,2^{y-x} = 3. \end{cases}$

**467.** $\begin{cases} \log_2 (x+y) - \log_3 (x-y) = 1; \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

**468.** $\begin{cases} \log_{xy} (x-y) = 1; \\ \log_{xy} (x+y) = 0. \end{cases}$

**469.** $\begin{cases} (\log_a x + \log_a y - 2) \log_{\frac{4}{9}} a = -1; \\ x + y - 5a = 0. \end{cases}$

**470.** $\begin{cases} xy = a; \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2} \lg^2 a. \end{cases}$

**471.** $\begin{cases} xy = a^2; \\ (\lg x)^2 + (\lg y)^2 = \frac{5}{2} (\lg a^2)^2. \end{cases}$

**472.** $\begin{cases} (mx)^{\lg m} = (ny)^{\lg n}; \\ n^{\lg x} = m^{\lg y}. \end{cases}$

**473.** $\begin{cases} \sqrt[\lg (xy)]{(xy)^{xy}} = 10; \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$

**474.** $\begin{cases} \frac{\lg x + \lg y}{\lg (x+y)} = 1; \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

475. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1;$
$\lg(x + y - 3) = 1.$

476. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13; \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = 3\lg 2. \end{cases}$

477. $\begin{cases} xy = 40; \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$

478. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}; \\ xy = 16. \end{cases}$

479. $\begin{cases} x^3 + y^2 = 33; \\ 3\lg x + 2\lg y = 2 + \lg 2. \end{cases}$

480. $\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457; \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890. \end{cases}$

481. $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77; \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7. \end{cases}$

482. $\begin{cases} \frac{\lg(x - y) - 2\lg 2}{1 - \lg(x + y)} = 1; \\ \frac{\lg x - \lg 3}{\lg y - \lg 7} = -1. \end{cases}$

483. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2; \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2; \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$

484. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0; \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

**Графики функций и графический способ решения уравнений**

Начертить графики функций:

485. $3x + y = 5.$

486. $y = x^2 + x - 6.$

487. $y = x^3.$

488. $y = 2^x.$

489. $y = \lg x.$

490. $y = \sin x.$

491. $y = \frac{1}{x^2}$.

492. $y = \frac{1}{x-5}$.

493. $y = \frac{x}{x-5}$.

494. $y = \frac{x^2+1}{x^2}$.

495. $y = |x|$.

496. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

497. $y = \frac{a}{x}$; $a = 12$.

498. $x^2 + y^2 = 25$.

Решить графически уравнения:

499. $2^x = 4x$.

500. $3^x = x^2$.

501. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{x}{2}$.

502. $2^x - x^2 + 1 = 0$.

503. $x \cdot 3^x - 18 = 0$.

504. $x^x = 64$.

505. $x \cdot 2^{3x} = 1$.

Решить графически системы уравнений:

506. $\begin{cases} x + y = 5; \\ x^2 = y + 1. \end{cases}$

507. $\begin{cases} x + y = 5; \\ xy = 6. \end{cases}$

508. $\begin{cases} y^2 = 2x + 1; \\ x^2 = 3y. \end{cases}$

509. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3; \\ y^2 = 2x. \end{cases}$

510. $\begin{cases} x^2 + y = 4; \\ x + y^2 = 10. \end{cases}$

511. Решить графически уравнение

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$$

Решить системы неравенств:

512. $\begin{cases} 3x - \frac{x-1}{2} < 4x - 5; \\ x + \frac{2}{7} > 4 - \frac{x}{5}. \end{cases}$

513. $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{7}{8} > \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}; \\ \frac{x+1}{4} < 2 - \frac{1-2x}{3}. \end{cases}$

514. Найти пары целых чисел $x$ и $y$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0; \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

515. При каких значениях $a$ система неравенств

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

удовлетворяется при всех значениях $x$?

516. При каких значениях $a$ дробь $\frac{3a-8}{5-a}$ будет положительной?

517. При каких значениях $a$ дробь $\frac{2-3a}{2a+7}$ будет отрицательной?

Доказать неравенства:

518. $5(x-1) < x^5 - 1 < 5x^4(x-1)$; $x - 1 > 0$.

519. $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geqslant 0$; $x + y \geqslant 0$.

520. $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$; $a + b + c = 1$.

521. $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$; $a > 0$, $b > 0$.

522. $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

523. $3(1 + a^2 + a^4) \geqslant (1 + a + a^2)^2$.

524. Доказать, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2},$$ где

$n$ — целое положительное число, не равное единице.

525. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1$, $a_2$, $a_3$ и $b_1$, $b_2$, $b_3$ справедливо неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\text{*}.$$

526. Доказать, что для положительных чисел $a$, $b$, $c$ имеют место неравенства

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3;$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c},$$

причем равенства справедливы только при $a = b = c$.

527. Доказать неравенство Буняковского, утверждающее, что

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2,$$

причем равенство имеет место только при

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

528. Доказать неравенство Коши, утверждающее, что для положительных чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ всегда

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2a_3 \ldots a_n},$$

причем равенство имеет место при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

529. Показать, что при любом натуральном $n$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

530. Каким условиям должно удовлетворять число $d > 0$, чтобы при $R \geqslant r > 0$ имело место неравенство

$$0 < \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2dR} \leqslant 1.$$

## Прогрессии

531. Вставить между числами 5 и 12 восемь средних арифметических.

532. Сколько надо взять членов арифметической прогрессии 5; 9; 13; 17; ..., чтобы получить сумму, равную 10 877?

533. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел.

534. Показать, что если члены арифметической прогрессии — целые числа, то сумма последовательных четырех ее членов не может быть точным квадратом при $d = 2n + 1$ ($d$ — разность прогрессии; $n$ — целое число или 0).

* Данное неравенство есть частный случай неравенства Буняковского—Коши (см. задачу 527).

**535.** Найти арифметическую прогрессию с разностью 4, зная, что сумма первых пяти членов ее в 3 раза меньше суммы последующих пяти членов.

**536.** Найти такую арифметическую прогрессию, чтобы сумма $n$ первых ее членов равнялась $(n + 1)$ раз взятой половине $n$-го члена.

**537.** Доказать, что если положительные числа $a$, $b$, $c$ образуют арифметическую прогрессию, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

**538.** Сколько одинаковых членов находится в двух арифметических прогрессиях:

$$\div 5;\ 8;\ 11;\ \ldots$$
$$\div 3;\ 7;\ 11;\ \ldots,$$

если в каждой из них $n = 100$?

**539.** Чтобы заасфальтировать участок длиной 117 *м*, используют два катка. Первый каток установили в одном конце участка, второй — в противоположном. Работать они начали одновременно. За первую минуту первый каток прошел 1 *м*, а за каждую последующую — на 0,5 *м* больше, чем за предшествующую. Второй каток в каждую минуту проходил 6 *м*. Через сколько минут оба катка встретятся?

**540.** Стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 2 *см*. Площадь треугольника равна 6 *см*$^2$. Найти стороны.

**541.** Вычислить сумму $n$ первых членов ряда $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)$.

**542.** Вычислить сумму $n$ первых членов ряда $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

**543.** Сколько можно провести различных прямых линий, соединяя попарно $n$ точек на плоскости, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой?

**544.** Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, сколько бы их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих членов.

**545.** Найти арифметическую прогрессию, зная, что сумма трех первых ее членов равна 15, а произведение 80.

**546.** Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, а площадь его равна $10^{\lg 6}$. Найти стороны треугольника.

**547.** Доказать, что если числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

548. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии 124, сумма последних четырех членов 156. Сумма всех членов составляет 210. Найти эту прогрессию.

549. Доказать, что если через $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, ..., $S_n^{(p)}$ обозначить суммы членов $p$ арифметических прогрессий, содержащих по $n$ членов и имеющих соответственно первыми членами и разностями числа 1, 3, 5, ..., $(2p-1)$; 1, 3, 5, ..., $(2p-1)$, то

$$S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \ldots + S_n^{(p)} = \frac{n(n+1)}{2} p^2.$$

550. Могут ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

551. Найти $n$ из уравнения

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) + \left(3{,}5 + 5 + 6{,}5 + \ldots + \frac{7+3n}{2}\right) = 105.$$

552. Сумма первых $p$ членов арифметической прогрессии $S_p = q$, а сумма первых $q$ членов $S_q = p$. Найти сумму $S_{p+q}$ первых $p+q$ членов этой прогрессии $(p \neq q)$.

553. Найти сумму $n$ членов арифметической прогрессии

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots + \frac{1}{x}.$$

554. Два тела падают на землю, причем первое тело начало падать на 2 *сек* раньше второго. За первую секунду падающее тело пролетает 4,9 *м*, а за каждую последующую его скорость увеличивается на 9,8 *м* (сопротивление воздуха во внимание не принимается). Определить, через сколько времени расстояние между телами будет равняться 1000 *м*.

555. Найти сумму $n$ первых членов ряда

$$7 + 77 + 777 + \ldots$$

556. Вычислить сумму $n$ первых членов ряда

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2).$$

557. Вычислить сумму $n$ первых членов ряда

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

558. Знаменатель геометрической прогрессии $\frac{1}{3}$, третий член прогрессии $\frac{1}{9}$ и сумма всех членов прогрессии $1\frac{4}{9}$. Найти число членов прогрессии.

559. Найти сумму

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n.$$

**560.** Найти геометрическую прогрессию, зная, что

$$a_3 - a_1 = 16 \text{ и } a_5 - a_3 = 144.$$

**561.** Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, у которой первый член больше второго на 36, а третий больше четвертого на 4.

**562.** Найти первый и третий члены геометрической прогрессии, если $q = -2$, а $S_8 = 85$.

**563.** Решить уравнение

$$x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sin^2 45°,$$

где $|x| < 1$.

**564.** Три числа, сумма которых равна 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найти эти числа.

**565.** Два товарища поспорили о том, что Днепр в районе Киева должен покрыться льдом не раньше 20 декабря. Они условились, что если Днепр покроется ледяным покровом раньше, то первый из товарищей платит, а если позже, то получает за первый день 1 коп, а в каждый последующий день в $\frac{3}{2}$ раза больше. Днепр покрылся льдом 12 декабря. Сколько первый товарищ должен заплатить?

**566.** Найти сумму следующего ряда:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}.$$

**567.** Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 448. Найти первый член и знаменатель.

**568.** Определить сумму бесконечной прогрессии

$$\sqrt{5} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \ldots$$

**569.** Три числа, составляющие арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к этим трем числам прибавить соответственно 1; 4 и 19, то получим три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

**570.** Сумма членов некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии в два раза больше суммы первых $n$ членов. Определить знаменатель прогрессии.

**571.** Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1; 6 и 3, то получим три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

**572.** В арифметической прогрессии, содержащей 9 членов, первый член равен единице, а сумма равна 369. Геометрическая прогрессия тоже содержит 9 членов, причем первый и послед-

ний ее члены совпадают с соответствующими членами данной арифметической прогрессии. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

573. В квадрат, сторона которого равна $a$, вписан другой квадрат, а в него вписан третий и т. д., до бесконечности. Найти предел суммы площадей всех этих квадратов.

574. Написать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, начинающуюся с 3, если сумма ее членов равна $\frac{7}{2}$.

575. Доказать, что если три числа, взятые в одном и том же порядке, составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии, то они равны между собой.

576. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма кубов ее членов равна $\frac{1728}{7}$. Найти сумму первых десяти членов этой прогрессии.

577. Задача Гольдбаха*. Найти сумму всех дробей вида $\frac{1}{(n+1)^{(m+1)}}$, где $m$ и $n$ пробегают натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

578. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключенных между положительными целыми числами $a$ и $b$ $(a < b)$.

## Метод математической индукции

579. Доказать, что

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

580. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

581. Доказать, что $n$ различных прямых, проходящих через одну точку, делят плоскость на $2n$ частей.

582. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

583. Доказать, что

$$S_n = (n+1)! - 1,$$

где

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + nn!$$

---

* Гольдбах Христиан (1690—1764) — математик, член Петербургской Академии наук (с 1725 г.). С 1726 по 1740 г. был конференц-секретарем Академии наук.

584. Доказать, что $(n^3 + 5n)$ делится на 6, где $n$ — произвольное натуральное число.

585. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

## Соединения и бином Ньютона

586. Определить $x$, если $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$.

587. Доказать, что

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}.$$

588. Доказать, что

$$\frac{A_{n+2}^2 P_n}{P_{n+1}} - 2 = n.$$

589. Решить уравнение

$$\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132.$$

590. При каких значениях $x$ справедливо равенство $\frac{C_x^4}{C_x^2} = 1$?

591. Делится ли на 7 число $C_{1000}^{500}$?

592. Доказать, что если каждый коэффициент в разложении $x(1+x)^n$ разделить на показатель степени $x$, при которой этот коэффициент стоит, то сумма полученных частных будет равна $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

593. Два участника шахматного турнира выбыли, сыграв только по три партии каждый, в результате на турнире было сыграно всего 84 партии. Сколько было участников вначале, если они играли друг с другом только по одной партии?

594. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 1, 2 и 0.

595. Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по 2 туза?

596. Каким числом способов можно разместить шесть человек за одним круглым столом?

597. Какое максимальное число слонов одного цвета можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не угрожали друг другу, и сколькими способами их можно расставить?

598. Сколько можно составить различных произведений, по 4 цифры в каждом, из цифр 2, 3, 5, 6, 8, 9?

599. В разложении $\left(a\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^m$ найти член, который после упрощений содержит букву $a$ в 6-й степени, если разность коэффициентов третьего и второго членов равна 35.

600. Найти тот член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\sqrt{a}\right)^7$, который после упрощений содержит $a$ в первой степени.

601. В разложении $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^8$ найти тот член, который не содержит $x$.

602. Некоторый член разложения $(a+5)^n$ имеет коэффициент, равный 853125, его биномиальный коэффициент равен 1365. Найти показатель бинома $n$ и номер $p$ этого члена.

603. Решить уравнение

$$A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101.$$

604. Сумма коэффициентов при 2-м и 3-м членах разложения $\left(\sqrt[5]{z^2}+z^{-\frac{1}{6}}\right)^n$ равна 153. Определить член разложения, в котором нет $z$.

605. Найти $(p+2)$-й член от конца в разложении $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

606. Решить уравнение

$$\frac{A_x^{10}+A_x^9}{A_x^8}=9.$$

607. Решить уравнение

$$C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^3.$$

608. При каких значениях $x$ третий член разложения $(x^{\lg x}+x)^5$ равен 100?

609. Определить, при каком значении $x$ шестой член разложения бинома $\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^m$ равен 21, если известно, что биномиальные коэффициенты второго, третьего и четвертого членов разложения представляют соответственно первый, третий и пятый члены арифметической прогрессии.

610. Найти наибольший член разложения $(1+\sqrt{2})^{50}$.

611. Найти средний член разложения

$$\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{a}-ax^{-\frac{3}{4}}\right)^m,$$

зная, что коэффициент третьего члена разложения равен 66.

**612.** Доказать, что коэффициент члена, содержащего букву $x$ в степени $n$ в разложении $(1+x)^{2n}$, в два раза больше соответствующего коэффициента в разложении $(1+x)^{2n-1}$.

**613.** В разложении $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ сумма коэффициентов на 240 меньше суммы коэффициентов разложения $(a+b)^{2n}$. Найти третий член первого разложения.

**614.** Найти члены, не содержащие иррациональности в разложении бинома

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5.$$

**615.** Определить, при каком значении $x$ разность между увеличенным в 9 раз третьим членом разложения бинома

$$\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^m$$

и пятым членом того же разложения равна 240, если известно, что разность между логарифмом утроенного биномиального коэффициента четвертого члена разложения и логарифмом биномиального коэффициента второго члена равна единице.

**616.** Двум бригадам рабочих была уплачена сумма денег в рублях, равная коэффициенту того члена разложения бинома $\left(x^{-\frac{2}{3}}+x^{\frac{3}{5}}\right)^{13}$, который содержит $x^4$. Число рублей, полученных каждым рабочим первой бригады, равно числу членов арифметической прогрессии, у которой $S_n = 462$; $a_6 = 27$; $a_{10} = 43$. Число рублей, полученных каждым рабочим второй бригады, равно корню уравнения $\lg 10 + \frac{1}{3}\lg(3^{2\sqrt{x}}+271) = 2$. Сколько рабочих было в каждой бригаде, если в первой было на 4 человека больше, чем во второй?

## Комплексные числа

**617*.** Представить в тригонометрической форме и подсчитать $\sqrt{1+i}$.

Вычислить выражения:

**618*.** $\sqrt[3]{1+i}$.

**619.** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

**620.** $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$.

---

* Примеры, помеченные звездочкой, предлагаются читателям, знакомым с формулой Муавра.

**621***. Определить все значения $\sqrt[3]{i}$.

**622.** Вычислить выражение $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

**623.** Вычислить

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}.$$

**624.** Представить в тригонометрической форме числа $-i$; $1+i$; $-1$ и найти площадь треугольника, длины сторон которого равны модулям этих чисел.

**625.** Найти $x$ и $y$ из соотношения

$$(x+y)^2+6+ix=5(x+y)+i(y+1).$$

**626***. Решить уравнение $z^8=1$.

**627.** Решить уравнение

$$3x^4-5x^3+3x^2+4x-2=0,$$

если известно, что один из корней $1+i$.

**628.** Какому условию должно удовлетворять комплексное число $a+bi$ для того, чтобы его можно было представить в виде

$$a+bi=\frac{1-ix}{1+ix},$$

где $x$ — число вещественное.

**629***. Доказать, что

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\varphi,$$

если

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\varphi.$$

**630.** Доказать, что последовательность чисел

$$a_1=\cos x+i\sin x;$$

$$a_2=\cos 2x+i\sin 2x;$$

$$a_3=\cos 3x+i\sin 3x;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\cos nx+i\sin nx$$

есть геометрическая прогрессия. Найти знаменатель этой прогрессии. Пользуясь формулой для суммы $S_n$ $n$ членов геометрической прогрессии, найти $S_n$ и привести $S_n$ к виду $a+ib$, где $a$ и $b$ — действительные числа.

**631.** Найти $x$ и $y$, если $x+iy=\sqrt{a+bi}$; $x$, $y$, $a$, $b$ — действительные числа.

**632.** Упростить выражение

$$\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{a-bi}{a+bi}.$$

**633.** Найти область $|z| \leqslant 1$.

**634.** Решить уравнение

$$(6-i)x^2-2(3-2i)x+1=0.$$

**635.** При каких действительных значениях $x$ и $y$ справедливо равенство

$$\frac{x-2+(y-3)i}{1+i}=1-3i?$$

**636*.** По формуле Муавра найти $\sin 4\varphi$; $\cos 4\varphi$.

**637.** При каких действительных значениях $m$ корни уравнения

$$(m+2)x^2-2mx+m-1=0$$

будут мнимыми?

**638.** Пусть $x$ и $y$ — комплексные числа. Доказать, что

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2[|x|^2+|y|^2].$$

РАЗДЕЛ III

# ГЕОМЕТРИЯ

## Планиметрия

**639.** Разрезать данный треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

**640.** Вершины $A$ и $B$ острых углов прямоугольного треугольника $ABC$ скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. По какой линии будет двигаться вершина $C$ прямого угла?

**641.** Построить треугольник, зная центры квадратов, построенных на его сторонах, как на основаниях, и расположенных вне треугольника.

**642.** Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме второго катета и гипотенузы.

**643.** В данный треугольник вписать прямоугольник данного периметра.

**644.** Построить треугольник по углу и двум высотам, опущенным на стороны данного угла.

**645.** Построить треугольник по стороне, сумме двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

**646.** Построить прямоугольный треугольник по сумме двух катетов и углу, лежащему против одного из катетов.

**647.** Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и медиане, проведенной к основанию.

**648.** Построить треугольник по трем медианам.

**649.** Построить треугольник по основанию, углу, прилегающему к основанию, и углу между медианой, проведенной из вершины данного угла, и стороной, к которой проведена медиана.

**650.** Построить треугольник, равновеликий данному, с тем же углом при основании, высота которого равна данному отрезку $h$.

**651.** Доказать, что если в двух треугольниках сумма двух углов равна 180°, то площади их относятся, как произведения сторон, прилегающих к этим углам.

**652.** Доказать, что в прямоугольном треугольнике куб гипотенузы больше суммы кубов катетов.

**653.** Доказать, что сумма трех медиан треугольника больше $\frac{3}{4}$ периметра, но меньше периметра.

**654.** Внутри прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C$ прямой) взята точка $O$ так, что треугольники $OAB$, $OBC$ и $OCA$ равновелики.

Доказать, что $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

**655.** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AB$ в такой точке $D$, что $AC \cdot CB = 2\,AD \cdot DB$. Доказать, что треугольник прямоугольный.

**656.** Ортоцентр делит высоты треугольника на части, произведение которых является постоянным для данного треугольника. Доказать это.

**657.** Построить равносторонний треугольник, равновеликий данному $\triangle ABC$.

**658.** В треугольнике $ABC$ $\angle C - \angle B = 90°$. Биссектриса внутреннего угла $A$ пересекает $BC$ в точке $L$, а биссектриса внешнего угла при вершине $A$ пересекает продолжение $BC$ в точке $L_1$. Доказать, что биссектрисы $AL$ и $AL_1$ равны.

**659.** Доказать, что если стороны треугольника $a < b < c$ образуют арифметическую прогрессию, то $ac = 6Rr$ ($R$ — радиус окружности, описанной около треугольника; $r$ — радиус вписанной окружности).

**660.** Доказать, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной вокруг этого треугольника.

**661.** Доказать, что сумма произведений высот остроугольного треугольника на соответствующие отрезки их от ортоцентра до вершин равна полусумме квадратов сторон.

**662.** Построить параллелограмм по основанию, высоте и диагонали.

**663.** Построить ромб по сумме диагоналей и углу между диагональю и стороной.

**664.** Доказать, что квадрат стороны правильного вписанного пятиугольника равен сумме квадратов радиуса и стороны десятиугольника.

**665.** В треугольник $ABC$ вписан прямоугольник $KLMN$ так, что $K$ и $N$ лежат на стороне $BC$. Доказать, что если площадь прямоугольника $KLMN$ наибольшая, то сторона $LM$ делит высоту $AA_1$ пополам.

**666.** Пронумеруем стороны шестиугольника (по направлению или против движения стрелки часов) *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6*. Если каждые две стороны *1* и *4*, *2* и *5*, *3* и *6* (называемые противоположными) равны и параллельны, то диагонали шестиугольника, каждая из которых делит его на два четырехугольника (соединяющие противоположные вершины), пересекаются в одной точке. Доказать.

**667.** Найти траектории точек окружности шестеренки, вращающейся без скольжения внутри неподвижной шестеренки. Радиусы шестеренок относятся как 1 : 2.

**668.** Найти геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных прямых $m$ и $l$ равна длине $a$ данного отрезка. Разобрать случаи пересекающихся и параллельных прямых.

**669.** Точка $M$ лежит внутри треугольника. Расстояния от этой точки до сторон треугольника равны $d_1$, $d_2$, $d_3$, а соответствующие высоты — $h_1$, $h_2$, $h_3$. Доказать, что

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}=1.$$

**670.** Доказать, что если угол ромба равен 30°, то сторона его есть средняя пропорциональная между диагоналями.

**671.** Доказать, что в описанной равнобедренной трапеции диаметр окружности есть среднее пропорциональное между ее основаниями.

**672.** Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

**673.** Доказать, что выпуклый четырехугольник с разными углами должен иметь хотя бы один тупой угол.

**674.** В параллелограмме $ABCD$ точка $M$ — середина $CB$, $N$ — середина $CD$. Доказать, что прямые $AM$ и $AN$ делят диагональ $BD$ на три равные части.

**675.** Через точку внутри данного угла провести прямую, отсекающую от его сторон равные отрезки.

**676.** Прямоугольный треугольник повернут на 90° вокруг вершины прямого угла. Доказать, что сумма площадей, описанных катетами, равна площади круга, описанного около треугольника.

**677.** В полукруг радиуса $R$ вписать окружность, касающуюся диаметра, хорды, равной $2a$, и перпендикуляров, опущенных из концов этой хорды на диаметр.

**678.** $OA_i$ и $OB_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) — лучи, проведенные из центра $O$ квадрата $ABCD$ через точки $A_i$ и $B_i$, делящие соответственно стороны $AB$ и $BC$ на $m$ равных отрезков. Определить все отношения $OA_i$ и $OB_i$, на которые их делит отрезок $AB_k$ ($0 < k < m$).

**679.** Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная.

**680.** Построить окружность, касательную к двум данным концентрическим окружностям и к данной прямой.

**681.** Провести касательную к данной окружности, одинаково наклоненную к двум данным прямым.

**682.** Доказать, что прямая, соединяющая середины диагоналей описанного четырехугольника, проходит через центр окружности.

**683.** Вписать квадрат в данный сектор так, чтобы одна сторона стягивала часть дуги.

**684.** В круге проведены два радиуса. Провести хорду так, чтобы она делилась радиусами на три равные части.

**685.** В треугольнике $ABC$ $AM$ — медиана и $AD$ — биссектриса. Через точки $A$, $M$ и $D$ проведена окружность. Доказать, что окружность отсекает от сторон $BA$ и $CA$ равные отрезки $BL$ и $CN$.

**686.** Будет ли описанный равносторонний многоугольник правильным?

**687.** Через точку $K$ внешнего касания двух окружностей проведены секущие $AKB$ и $CKD$ ($A$ и $C$ на одной окружности). Доказать, что хорды $AC$ и $BD$ параллельны.

**688.** Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность в точках, которые являются концами ее диаметра.

**689.** Доказать, что в прямоугольном треугольнике

$$0{,}4 < \frac{r}{h_c} < 0{,}5,$$

где $h_c$ — высота треугольника, опущенная на гипотенузу, а $r$ — радиус вписанной в треугольник окружности.

**690.** Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся как $m : n$. Найти углы треугольника.

**691.** Найти углы треугольника, если известно, что высота, биссектриса и медиана, проведенные из его вершины, делят угол на четыре равные части.

**692.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ даны: катет $CA = b$ и угол $BAC = \alpha$. Из вершины $C$ прямого угла опущен перпендикуляр $CD$ на гипотенузу $AB$. Из точки $D$ опущен перпендикуляр $DC_1$ на катет $BC$, из точки $C_1$—перпендикуляр $C_1D_1$ на гипотенузу $AB$ и т. д. Найти предел суммы $CD + C_1D + C_1D_1 + C_1D_2 + \ldots$ длин этих перпендикуляров.

**693.** Радиус описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности относится к радиусу вписанной в этот треугольник окружности как 5 : 2. Найти углы данного треугольника.

**694.** Доказать, что во всяком треугольнике произведение двух сторон равно произведению высоты, опущенной на третью сторону, и диаметра описанной окружности.

**695.** На данной прямой найти такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к данной окружности, были данной длины.

**696.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ вдвое больше угла $B$, $AB = c$ и $AC = b$. Определить третью сторону $BC$.

**697.** Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найти ее радиус, если катеты равны 3 *см* и 4 *см*.

**698.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 *см*, высота, на нее опущенная, равна 12 *см* и служит диаметром окружности, которая делит каждый из катетов на две части. Найти эти части.

**699.** Может ли быть правильным треугольник, расстояния от вершин которого до двух взаимно перпендикулярных прямых выражаются целыми числами?

**700.** Построить треугольник по его высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной вершины.

Построить отрезки:

**701.** $x = \frac{a^2 b}{c^2}$.

**702.** $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}$.

**703.** $x = \sqrt{ab\sqrt{6}}$.

**704.** $x = \sqrt[4]{abcd}$.

**705.** $x = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

**706.** $x = \frac{ab \sin \alpha}{c}$.

**707.** Найти площадь треугольника, если известно, что $m_b = 6$ *см*, $\angle A = 45°$; $\angle B = 15°$.

**708.** Доказать, что вписанная в прямоугольный треугольник окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, произведение которых равно площади данного треугольника.

**709.** Найти отношение площади данного треугольника к площади треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.

**710.** Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна $a$. Определить площадь меньшего сегмента, который отсекается стороной треугольника ($a = 6$ *см*).

**711.** Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4, 5. Найти отношение площадей вписанного и описанного кругов.

**712.** Произвольная точка гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами $a$ и $b$ соединена с вершиной прямого угла, из которой проведены две медианы образовавшихся треугольников. Определить площадь треугольника, заключенного между медианами ($a = 24$; $b = 7$).

**713.** Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависимая от положения точки на окружности.

**714.** Найти площадь треугольника, вписанного в окружность радиуса $R$, если перпендикуляры из двух его вершин на касательную к окружности в третьей вершине треугольника равны $p$ и $q$.

**715.** Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане одного из катетов.

**716.** Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами двух противоположных сторон. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь фигуры, ограниченной проведенными линиями?

**717.** Выразить разность квадратов диагоналей параллелограмма через его стороны и площадь.

**718.** Построить квадрат, равновеликий $\frac{3}{8}$ данного квадрата.

**719.** Найти сумму внутренних острых углов пятиугольной звезды.

**720.** В равнобочной трапеции диагональ делит угол при основании пополам. Нижнее основание в два раза больше верхнего. Найти все стороны трапеции, зная, что ее площадь равна $27\sqrt{3}\,см^2$.

**721.** В равнобедренной трапеции средняя линия равна $m$, а диагонали взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь трапеции.

**722.** Окружности двух равных кругов, лежащих в одной плоскости, пересекаются под прямым углом. Найти отношение площади общей части этих кругов к площади круга.

**723.** Если соединить прямыми основания трех высот какого-нибудь треугольника, то треугольники, образовавшиеся при этом у вершин, будут подобны ему. Исходя из этого, доказать, что для треугольника с вершинами в основаниях высот последние служат биссектрисами.

**724.** К двум окружностям радиусов $r_1$ и $r_2$, расстояние между центрами которых равно $f$, проведена общая внутренняя касательная. Найти углы, которые образуют с линией центров радиусы, проведенные в точки касания.

**725.** Из точки, находящейся на расстоянии $d$ от центра окружности радиуса $r$, проведены две секущие. Одна из секущих проходит через центр, а другая образует хорду, равную $a$. Найти угол между секущими.

**726.** Доказать, что в любой трапеции площадь треугольника, основанием которого служит одна из непараллельных сторон, а вершиной — середина противоположной стороны, равняется половине площади трапеции.

**727.** Найти площадь трапеции и двух треугольников, образованных отрезками диагоналей и основаниями трапеции, если известно, что основания равны $a$ и $b$, а диагонали — $c$ и $d$

**728.** Через произвольную точку в середине треугольника проведены три прямые параллельно сторонам треугольника. Эти прямые делят площадь треугольника на шесть частей. Три из них — треугольники, площади которых соответственно равны $S_1$, $S_2$, $S_3$. Найти площадь данного треугольника.

**729.** Основания трапеций равны 1 и 7 *см*. Найти длину отрезка прямой, которая параллельна основаниям и делит площадь трапеции пополам.

**730.** Найти острый угол равнобедренной трапеции, если площадь ее $S$, а основания $a$ и $b$ $(a < b)$.

**731.** Из точки $A$ проведено $n$ лучей так, что углы между двумя соседними лучами одинаковы и каждый из них равен $\frac{2\pi}{n}$.

На одном из лучей на расстоянии $d$ от $A$ взята точка $B_0$, из нее опущен перпендикуляр $B_0B_1$ на соседний луч, из $B_1$ — основания перпендикуляра $B_0B_1$ — в том же направлении снова опущен перпендикуляр на соседний луч и т. д. Найти длину $l$ полученной таким образом бесконечной ломаной линии при фиксированном конечном значении $n$.

Выяснить, как будет изменяться $l$, если $n$ будет увеличиваться, в частности, когда $n$ будет увеличиваться неограниченно.

**732.** Окружность радиуса 64 *см* разделена на шесть равных частей, и точки деления соединены с центром. Один из радиусов спроектирован на другой ближайший радиус, на третьем радиусе построена проекция первой проекции, на четвертом — проекция второй проекции и т. д. Определить величину последней (шестой) проекции на первый радиус.

**733.** По радиусу $R$ и хордам $a$ и $b$ двух дуг окружности определить хорду суммы этих дуг.

**734.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. $CD$ — их общая внешняя касательная. Через точки $B$, $C$ и $D$ проведена окружность. Доказать, что ее диаметр есть среднее пропорциональное между диаметрами данных окружностей.

## Стереометрия

**735.** Доказать, что перпендикуляры, опущенные из концов диагонали параллелограмма на плоскость, проходящую через другую его диагональ, равны между собой.

**736.** Доказать, что расстояние от центра тяжести треугольника до плоскости, которая не лежит в плоскости треугольника, есть среднее арифметическое расстояний от его вершин до этой же плоскости.

737. Если стороны одного треугольника параллельны сторонам другого, то прямые, соединяющие вершины равных углов, пересекаются в одной точке.

738. Найти геометрическое место точек, расположенных на плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

739. Найти геометрическое место таких точек пространства, чтобы каждая из них одинаково отстояла от всех трех ребер трехгранного угла.

740. Из всех прямых, идущих из одной точки плоскости и лежащих в этой плоскости, найти такую, которая образует наибольший угол с другой плоскостью, пересекающейся с первой.

741. Отрезок, длина которого равна $a$, лежит в плоскости $P$. Из одного конца его проведена наклонная под углом $\alpha$ к плоскости. Найти расстояние $BD$ между другим концом отрезка и наклонной, если расстояние этого конца от проекции наклонной равно $b$.

742. Из точки $A$ выходят три прямые $AB$, $AC$, $AD$, являющиеся ребрами некоторого трехгранного угла. Доказать, что плоскости $P_1$, $P_2$, $P_3$, соответственно перпендикулярные этим прямым, пересекаются в одной точке.

743. В трехгранном угле один из плоских углов прямой, прилежащие к нему двугранные углы равны по 45°. Найти третий двугранный угол.

744. Найти двугранные углы трехгранного угла, если плоские углы содержат по 108°.

745. В трехгранном угле найти двугранные углы, если плоские углы соответственно равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

746. Прямой двугранный угол пересечен плоскостью, образующей с каждой гранью угол $\alpha$ (плоскость одинаково наклонена к обеим граням). Найти угол между линиями пересечения этой плоскости с гранями данного угла.

747. На двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых, кратчайшее расстояние между которыми $PQ = h$, даны две точки $A$ и $B$, из которых отрезок $PQ$ виден под углами $\alpha$ и $\beta$. Определить угол наклона отрезка $AB$ к отрезку $PQ$.

748. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 60°. Точка $A$ лежит на первой прямой, точка $B$ — на второй, причем расстояния от этих точек до общего перпендикуляра данных прямых равны расстоянию между двумя данными скрещивающимися прямыми. Найти угол между общим перпендикуляром прямых и прямой $AB$.

749. В основании прямой призмы лежит ромб. Через середину сторон нижнего основания, параллельно его меньшей диагонали, и вершину верхнего основания проведено сечение под углом $\alpha$ к плоскости основания. Найти площадь сечения, если объем призмы равен 120 $см^3$, высота ее $h = 6$ $см$.

**750.** Прямая призма имеет основанием равносторонний треугольник. Плоскость, проведенная через одну из его сторон под углом $\alpha$ к основанию, отсекает от призмы треугольную пирамиду с объемом $V$. Определить площадь сечения.

**751.** Прямую треугольную призму пересекли двумя параллельными плоскостями, которые образуют с боковыми ребрами угол $\alpha$. Определить поверхность призмы, заключенной между этими плоскостями, зная, что расстояние между ними $l$, а периметр основания данной призмы равен $2p$.

**752.** Через диагональ грани куба построить сечение, равновеликое грани.

**753.** Вычислить и построить кратчайшее расстояние между непересекающимися диагональю основания и диагональю боковой грани правильной четырехугольной призмы, если известно, что сторона основания ее равна $a$, а боковое ребро равно $b$.

**754.** Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны $a$ и $b$. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол $\alpha$. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

**755.** Правильный тетраэдр пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился квадрат.

**756.** Ребро куба равно $a$. Определить периметр и площадь сечения, проведенного через диагональ грани параллельно скрещивающейся диагонали куба.

**757.** Правильную четырехугольную призму требуется пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб с острым углом $\alpha$. Найти угол наклона секущей плоскости к основанию.

**758.** Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб, острый угол которого равен $\alpha$. Под каким углом к плоскости основания нужно провести плоскость, чтобы в сечении получить квадрат с вершинами на боковых ребрах призмы?

**759.** Высота правильной усеченной шестиугольной пирамиды равна $h$, боковое ребро равно $a$. Найти апофему ($h = 2$ *см* и $a = 8$ *см*).

**760.** Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник, площадь которого равна 16 $см^2$. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность всей пирамиды равна 100 $см^2$.

**761.** Пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами $a$ и $b$, с равными между собой боковыми ребрами $l$ рассечена плоскостью, параллельной основанию, на две равновеликие части. Найти расстояние от плоскости сечения до вершины.

**762.** Найти множество всех значений параметра $a$, при которых существует треугольная пирамида с ребрами основания

$l$, $a$, $a$ и $c$ соответственно противолежащими боковыми ребрами $l$, $l$, $a$.

**763.** Определить полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при основании боковой грани равен $\alpha$, а радиус вписанной в основание окружности равен $r$.

**764.** В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен $\alpha$. Определить наклон бокового ребра к плоскости основания.

**765.** Две равные боковые грани треугольной пирамиды перпендикулярны к плоскости основания. Зная, что один из углов основания равен 60°, а равные боковые ребра составляют с основанием угол $\alpha$, найти плоский угол у вершины третьей боковой грани.

**766.** Основание четырехугольной пирамиды — квадрат. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, две остальные составляют с плоскостью основания равные двугранные углы $\alpha$. Высота пирамиды $h$. Определить боковую поверхность пирамиды.

**767.** В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна $a$, а боковое ребро равно $2a$, через середину бокового ребра, перпендикулярно к нему, проведена плоскость. Определить площадь образовавшегося сечения.

**768.** Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный $h$, и перпендикуляр на боковую грань, равный $b$. Найти объем пирамиды.

**769.** В треугольной пирамиде $OABC$ проведено сечение $A_1B_1C_1$ параллельно основанию. $P$ — середина стороны $BC$; $Q$ — середина стороны $CA$; $R$ — середина стороны $AB$. Точка $A_1$ соединена с $P$, точка $B_1$ — с $Q$, точка $C$ — с $R$. Доказать, что:

1) прямые $A_1P$, $B_1Q$ и $C_1R$ пересекаются в одной точке;

2) геометрическое место точек пересечения этих прямых при поступательном движении $A_1B_1C_1$ (параллельно плоскости основания) — есть прямая, которая соединяет вершину пирамиды с центром тяжести ее основания.

Если представить боковые ребра неограниченно продолженными в обе стороны, то при каком положении движущейся плоскости указанные прямые будут параллельны?

**770.** Найти угол между двумя противоположными ребрами правильного тетраэдра.

**771.** Два треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$ с попарно непараллельными сторонами лежат в пересекающихся плоскостях. Прямые, соединяющие точки $A$ с $A_1$, $B$ с $B_1$ и $C$ с $C_1$, пересекаются в одной точке. Доказать, что соответствующие стороны треугольников ($AB$ и $A_1B_1$, $AC$ и $A_1C_1$, $BC$ и $B_1C_1$) пересекаются и точки их пересечения лежат на одной прямой.

**772.** Доказать, что:

1) середины ребер правильного тетраэдра могут служить вершинами правильного октаэдра;

2) прямые, соединяющие середины противоположных ребер правильного тетраэдра, пересекаются в одной точке, делятся в точке пересечения пополам и взаимно перпендикулярны, а также перпендикулярны соответствующим ребрам тетраэдра;

3) плоскость, проходящая через две прямые, соединяющие середины противоположных ребер правильного тетраэдра, делит объем тетраэдра пополам. Найти отношение объемов данного правильного тетраэдра и октаэдра, вершинами которого могут служить середины ребер тетраэдра.

**773.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — соответственно верхние и нижние основания, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$). Точка $x$ движется с постоянной скоростью по сторонам квадрата $ABCD$ в направлении $ABCDA$ и точка $y$ движется с той же скоростью по сторонам квадрата $B_1C_1CB$ в направлении $B_1C_1CBB_1$. Точки $x$ и $y$ начинают двигаться в один и тот же момент из исходных положений $A$ и $B_1$ соответственно.

Найти и начертить геометрическое место середин отрезков $xy$.

(Задача была предложена на IV международной математической олимпиаде учащихся двух последних классов средних школ, состоявшейся в 1962 г. в Чехословакии. См. журнал «Математика в школе», № 6, 1962 г.).

**774.** Ребро куба равно $a$. Определить площадь сечения, проходящего через середины двух смежных ребер параллельно диагонали куба, которая пересекает эти ребра.

**775.** Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами $a$ и $b$. Соответствующие этим сторонам плоские углы при вершине пирамиды относятся, как 3 : 1. Определить объем пирамиды, если все ее боковые ребра равны и $a > b$.

**776.** В треугольной пирамиде все боковые ребра и две стороны основания равны $b$. Угол между указанными сторонами основания равен $\alpha$. Вычислить объем пирамиды.

**777.** В наклонной призме, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной $a = 4$, одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого $c = 3$. Найти объем призмы.

**778.** В правильной четырехугольной призме сторона основания равна $a$. Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен $\alpha$. Определить объем призмы.

**779.** Куб, ребро которого равно $a$, срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определить объем полученного многогранника.

**780.** В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, равны соответственно $a$, $b$, $c$. Ребра $a$ и $b$ взаимно перпендикулярны, а ребро $c$ образует с каждым из них угол $\alpha$. Найти объем и боковую поверхность параллелепипеда.

**781.** Плоскость, проходящая через сторону основания куба под углом $\alpha$ к основанию, делит его на две части. Найти отношения объемов этих частей.

**782.** В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом $\varphi$. Площадь этого сечения равна $S$. Найти объем призмы.

**783.** Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного тетраэдра, до его граней — постоянная величина.

**784.** Доказать, что объемы $V$ и $V'$ двух треугольных пирамид, имеющих по равному трехгранному углу, относятся друг к другу, как произведения трех ребер равных трехгранных углов.

**785.** Найти объем правильной 6-угольной пирамиды, если ее полная поверхность равна 16 $см^2$; $a$ радиусы окружностей, описанных вокруг всех граней, равны.

**786.** Доказать, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ произведения двух его противоположных ребер на кратчайшее расстояние между ними и на синус угла между этими ребрами.

**787.** Какую призму наибольшего объема можно получить из пирамиды, если провести сечение, параллельное основанию?

**788.** В основании правильной пирамиды лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна $4\pi$, отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно 4, а высота пирамиды равна 3 $см$. Найти объем пирамиды.

**789.** Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60°, высота ее, равная 12 $см$, разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные к одному из боковых ребер. На какие части разделился объем пирамиды?

**790.** Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна $S$. Угол наклона боковой грани к плоскости основания равен $\alpha$. Определить объем пирамиды.

**791.** В треугольной пирамиде все боковые ребра и две стороны основания имеют длину $b$, а угол между равными сторонами основания равен $\alpha$. Определить объем пирамиды.

**792.** Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 6 $см$, объем ее 152 $см^3$, а отношение площадей оснований $\frac{4}{9}$. Определить стороны оснований, высоту полной пирамиды и боковую поверхность усеченной пирамиды.

**793.** Дана четырехугольная пирамида с прямоугольным основанием, площадь которого равна $S$, боковые ребра пирамиды равны между собой и образуют с плоскостью основания угол 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найти объем пирамиды.

**794.** Разность между апофемой и высотой правильной четырехугольной пирамиды равна $m$, а угол между ними $\alpha$. Определить объем пирамиды.

**795.** Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно к противоположному ребру проведено сечение. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды, равное $a$, образует угол $\alpha$ со стороной основания.

**796.** Сторона основания правильной $n$-угольной пирамиды равна $a$, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Определить объем пирамиды.

**797.** Вычислить радиус окружности, вписанной в основание правильной четырехугольной пирамиды, ребро которой образует с высотой угол $\alpha$, а объем равен $V$.

**798.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, а высота ее проходит через точку пересечения гипотенузы с биссектрисой прямого угла основания. Боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла, наклонено к плоскости основания под углом $\alpha$. Определить объем пирамиды и углы наклона боковых граней к плоскости основания, если биссектриса прямого угла основания равна $m$ и образует с гипотенузой угол $45° + \alpha$.

**799.** Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, их площади равны 6, 4 и 3 $м^2$. Определить объем данной пирамиды.

**800.** Боковая поверхность цилиндра в развертке представляется прямоугольником, диагональ которого равна $d$, и составляет с основанием угол $\alpha$. Найти объем цилиндра.

**801.** В жидкость при 0° погружают небольшой железный цилиндр, радиус которого равен 0,05 $м$, а высота — 0,2 $м$. Данный цилиндр в жидкости весит 10,5 $кг$. Найти плотность этой жидкости, если плотность железа равна 7,79.

**802.** В цилиндре параллельно его оси на расстоянии $a$ от нее проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу $\alpha$. Площадь сечения равна $S$. Определить объем цилиндра.

**803.** Имеется лист бумаги в форме прямоугольника, диагональ которого образует со стороной угол $\alpha$.

Прямоугольник свернули в цилиндрическую трубку, первый раз приняв за образующую его сторону, прилежащую к углу $\alpha$, второй раз — сторону, лежащую против угла $\alpha$. Найти отношение объемов полученных цилиндров.

**804.** Небольшой серебряный конус, высота которого вдвое больше диаметра основания, весит 2,5 $кг$. Найти размеры конуса, зная, что плотность серебра равна 10,47.

**805.** Из жести вырезан сектор с радиусом 20 *см* и центральным углом 250°; из сектора образован конус. Найти объем конуса.

**806.** В основание конуса вписан квадрат, стороны которого равны $a$ *см*. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, образует в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен $\alpha$. Определить объем конуса и вычислить его, приняв $a = 63{,}15$ *см* и $\alpha = 66^\circ 52'$.

**807.** Радиус основания конуса равен $R$, угол между образующей и плоскостью основания конуса равен $\alpha$. Найти объем и полную поверхность конуса.

**808.** Сосуд конической формы, диаметр которого 0,08 *м* и высота 0,12 *м*, наполнен ртутью и чистой водой в таком отношении, что вес ртути втрое больше веса воды.

Найти толщину слоя каждой жидкости, если плотность ртути равна 13,6.

**809.** Кусок дерева, плотность которого равна 0,729, имеет форму прямого конуса. Его опускают на воду так, чтобы конус находился в вертикальном положении, погружаясь сначала вершиной вниз, а потом вершиной вверх. Определить, на какую часть своей высоты конус погружается в воду в первом и во втором положениях?

**810.** Усеченный конус вписан в четырехугольную усеченную пирамиду, основание которой — равнобедренная трапеция с острым углом $\varphi$, а боковые стороны оснований равны $a$ и $b$ $(a > b)$. Боковое ребро пирамиды образует с большей из параллельных сторон нижнего основания угол $\alpha$. Определить объем конуса.

**811.** Труба $A$ диаметром 100 *мм* при помощи конусообразного раструба переходит в трубу $B$ вдвое большего поперечного сечения. Зная, что образующие конической поверхности в своем сечении образуют угол 40°, определить длину раструба.

**812.** В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а угол образующей $l$ конуса с плоскостью большего основания равен $\alpha$. Найти объем этого конуса.

**813.** Два яйца одинаковой формы весят $P_1$ и $P_2$, длины их больших осей $d_1$ и $d_2$. Найти приблизительный вес скорлупы.

**814.** Вычислить радиус шара, объем которого равновелик объему конуса, боковая поверхность которого равна $S$, а полная его поверхность равновелика площади равностороннего треугольника со стороной $a$.

**815.** Четыре шара, центры которых не лежат в одной плоскости, касаются попарно друг друга. Каждые два из них определяют плоскость, перпендикулярную к их линии центров и касающуюся обоих шаров. Доказать, что проведенные таким образом шесть плоскостей имеют общую точку.

**816.** Определить длину радиуса шара, если, удлинив его на $a$ *см*, увеличим объем сферического сектора, имеющего угол $\alpha$, на $d$ *см*$^3$.

**817.** Объем шара равен $V$. Определить объем шарового сектора, если известно, что его центральный угол равен $\alpha$.

**818.** Из точки, удаленной от центра шара на расстоянии $l$, проведены касательные прямые к шаровой поверхности так, что точки касания могут служить вершинами правильного $n$-угольника. Определить расстояние между точками касания и угол между касательными, если радиус шара равен $R$.

**819.** Дан сферический сегмент, в осевом сечении которого дуга равна $\alpha$, радиус основания равен $r$. На основание сегмента поставлен полушар. Плоскостью, касательной к кривой поверхности сегмента и параллельной основанию сегмента, отсекается новый сегмент. Определить длину окружности основания этого нового сегмента.

**820.** Ромб, сторона которого равна 18 *см* и острый угол равен 60°, вращается вокруг прямой, которая перпендикулярна к меньшей диагонали и проходит через вершину тупого угла. Найти объем тела вращения.

**821.** Равнобедренный треугольник, в котором боковая сторона равна $b$, а угол при вершине $\alpha$, вращается около боковой стороны. Найти объем тела вращения. Вычислить объем при $\alpha = 87° 32'$ и $b = 11{,}75$ *см*.

**822.** В треугольнике $ABC$ медианы пересекаются в точке $O$. Вычислить объем тела, полученного вращением четырехугольника $ABCOA$ вокруг $AC$, если $AB = c$, $BC = a$, $\angle B = \beta$ ($c = 15$ *см*; $a = 14$ *см*; $\beta = 67° 10'$).

**823.** Через середину дуги $AB$, равной $\alpha$, проведена касательная. В точки $A$ и $B$ проведены радиусы и продолжены до встречи с касательной в точках $C$ и $D$. Фигура, ограниченная ломаной $ACDB$ и дугой $AB$, вращается вокруг оси, проходящей через середину дуги параллельно касательной. Определить объем тела вращения, если радиус дуги $R$.

**824.** Равнобедренный треугольник с боковой стороной $a$ и углом при вершине $\alpha$ вращается вокруг прямой, перпендикулярной к его основанию; расстояние от оси вращения до высоты треугольника в $n$ раз больше радиуса вписанной в треугольник окружности. Определить объем полученного тела вращения.

**825.** В равнобедренной трапеции меньшее основание равно $a$, боковая сторона составляет $\frac{3}{4}$ меньшего основания и наклонена к большему основанию под углом $\alpha$. Определить объем тела, полученного вращением трапеции вокруг меньшего основания.

**826.** В трапеции одна из боковых сторон $a$ равна 4 *см* и образует с большим основанием угол $\varphi = 60°$. Большее основание равно $2b$, а меньшее основание $b$ равно 6 *см*. Вычислить объем

тела, образованного вращением этой трапеции вокруг данной боковой стороны.

**827.** Ромб с большей диагональю $d$ и острым углом $\alpha$ вращается около прямой, параллельной стороне ромба и отстоящей на $d$ от точки пересечения диагоналей. Найти объем тела вращения.

**828.** Ромб, у которого сторона $a$, а острый угол $\alpha$, вращается около прямой, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно к его стороне. Определить объем тела вращения.

**829.** Круговой сегмент, дуга которого равна $\alpha$ ($\alpha < 180°$), вращается вокруг диаметра, проведенного из конца дуги. Определить поверхность тела вращения, если радиус дуги равен $R$.

**830.** Параллелограмм вращается вокруг оси, которая проходит через его вершину параллельно диагонали и которая образует со сторонами параллелограмма углы $\alpha$ и $\beta$. Найти объем тела вращения, если длина этой диагонали равна $c$.

**831.** Сегмент, радиус которого равен $R$, а дуга равна $\alpha$, вращается вокруг радиуса, проведенного через конец дуги сегмента. Определить объем тела, образованного вращением этого сегмента.

**832.** Прямоугольный треугольник, площадь которого равна $S$, а один из острых углов равен $\alpha$, вращается около прямой, проведенной через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Определить объем тела вращения.

**833.** В тупоугольном треугольнике $ABC$ с тупым углом $A$ сторона $AC = a$, сторона $BC = 2a$ и $\angle C = \alpha$. Определить объем тела, получающегося от вращения этого треугольника около оси, проходящей через вершину $C$ перпендикулярно к стороне $AC$.

**834.** Основанием треугольной пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковые грани, заключающие равные стороны основания, перпендикулярны к плоскости основания, высота пирамиды равна $h$, а угол, составленный одним из двух равных ребер пирамиды с плоскостью основания, равен $\alpha$.

В эту пирамиду вписана прямая треугольная призма так, что три ее вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, три другие ее вершины лежат на основании пирамиды, а диагональ одной из двух ее равных боковых граней составляет с плоскостью основания угол $\beta$. Определить боковую поверхность и объем вписанной прямой треугольной призмы.

**835.** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде боковое ребро равно стороне большего основания и составляет с ней угол $\alpha$. Центр большего основания служит вершиной полной пирамиды, основание которой совпадает с меньшим основанием усеченной.

Найти разность объемов: усеченной пирамиды $V_1$ и полной пирамиды $V_2$.

**836.** В правильную шестиугольную призму вписана другая призма, вершины которой лежат на серединах ребер основания

данной призмы. Найти разность объемов этих призм, если сторона основания данной призмы равна 4 *см*, а боковое ребро—6 *см*.

**837.** Диагональ правильного октаэдра будет осью конуса, вершина которого совпадает с ее концом, а окружность основания касается четырех граней октаэдра в их центрах. Найти отношение объема конуса к объему октаэдра.

**838.** В прямой круговой конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$, вписана правильная $n$-угольная пирамида. Определить отношение полной поверхности пирамиды к полной поверхности конуса.

**839.** В конус с радиусом основания $R$ и углом $\alpha$ между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма с равными ребрами так, что ее основание лежит в плоскости основания конуса. Вычислить объем призмы при $R = 11{,}34$ *см* и $\alpha = 54^\circ 32'$.

**840.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 и наклонено к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{4}$. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объем цилиндра и объем пирамиды.

**841.** В конус, радиус основания которого равен $r$, а угол, составленный высотой и образующей, равен $a$, вписан цилиндр так, что его боковая поверхность относится к боковой поверхности конуса, как $m : n$. Вычислить объем цилиндра.

**842.** Дан усеченный конус, боковая поверхность которого равна площади круга, имеющего своим радиусом образующую усеченного конуса. Доказать, что в данный усеченный конус можно вписать шар.

**843.** Шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ перелит в прямой конус, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Найти высоту конуса.

**844.** Доказать, что во всякий трехгранный угол можно вписать шар, а в четырехгранный — лишь тогда, когда суммы его противоположных плоских углов равны.

**845.** В правильную $n$-угольную пирамиду вписан шар. Определить радиус шара и угол между боковыми гранями пирамиды, если сторона ее основания равна $a$ и плоский угол при вершине пирамиды равен $\alpha$.

**846.** Вокруг шара описан прямой параллелепипед, объем которого в $m$ раз больше объема шара. Определить двугранные углы параллелепипеда.

**847.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $H$, двугранный угол при основании равен $\varphi$. Найти радиус вписанного шара.

**848.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Определить поверхность шара, если известно, что сторона основа-

ния равна $a$ и плоский угол при вершине пирамиды равен $\alpha$.

**849.** Вычислить радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна $a$, а угол между боковыми ребрами и стороной основания равен $\alpha$.

**850.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $a$ *см*, а плоский угол при вершине равен $2\alpha$. Найти поверхность шара, вписанного в эту пирамиду.

**851.** Образующие прямого круглого конуса касаются шара, вписанного в конус, по параллели 60°. Найти объем конуса, если радиус шара равен 2 *см*.

**852.** В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Радиус шара равен $R$, плоский угол при вершине пирамиды равен $\alpha$. Определить боковую поверхность пирамиды.

**853.** В шар радиуса $a$ вписана правильная шестиугольная призма. Радиус, проведенный в вершину призмы, образует с плоскостью боковой грани угол $\alpha$. Найти объем призмы.

**854.** В конус вписан шар. Плоскость, касающаяся поверхности шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии $a$. Угол между высотой конуса и образующей равен $\alpha$. Определить радиус шара, радиус окружности касания шаровой и конической поверхностей и радиус основания конуса.

**855.** В конус, поставленный основанием вверх и представляющий в осевом сечении равносторонний треугольник, налита вода и положен шар радиуса $\sqrt[3]{9}$. При этом уровень воды касается шара. Определить высоту воды в конусе после того, как шар будет из него вынут.

**856.** В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны $b$. Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги $\alpha$ и $\beta$ в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определить объем шара.

**857.** Отношение боковой поверхности конуса к поверхности вписанного в него шара равно $m$. Найти угол, который образует образующая конуса с плоскостью основания.

**858.** Дан конус с радиусом основания, равным $r$, и шар, центром которого служит вершина конуса. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $\alpha$. Поверхность шара делит конус на две равные по объему части. Найти радиус шара.

**859.** В усеченную правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса $r$. Угол между боковой гранью и нижним основанием пирамиды равен $\alpha$. Вычислить объем усеченной пирамиды.

**860.** Высота правильной шестиугольной пирамиды равна $h$. Перпендикуляр, опущенный с центра описанного шара на боковую грань, образует с высотой угол $\alpha$. Найти объем шара.

**861.** Деревянный шар погрузился на $\frac{5}{3}R$ в чистую воду. Вычислить плотность этого дерева.

РАЗДЕЛ IV

# ТРИГОНОМЕТРИЯ

Упростить выражения:

**862.** $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

**863.** $\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)}+\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)\cos(\pi+\alpha)}{\sec\left(\dfrac{3\pi}{2}+a\right)}$.

**864.** $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\csc^2\alpha-1}-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2+\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$.

**865.** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\csc 2\alpha}$.

**866.** $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{13}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{13}{2}\pi\right)}$.

**867.** $\dfrac{1+\sin\alpha-2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

**868.** $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

**869.** $\sqrt{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha}+\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha}}$, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

**870.** $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$.

**871.** $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}$.

872. $\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha$.

873. $(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1)^3$.

874. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A \cos B \cos C$,
где $A + B + C = 180°$.

875. $\sin\alpha + \sin\beta \cos(\alpha + \beta)$.

Доказать тождества и равенства:

876. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)(1 + \sin\varphi)}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi$.

877. $\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$
$= 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

878. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) =$
$= 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

879. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}$; $\alpha$ и $\beta$ — острые углы. Доказать, что $\alpha + \beta = 135°$.

880. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

881. $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$.

882. $\sin(\alpha + 60°) + \cos(\alpha + 30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

883. $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)$.

884. $\sqrt{\dfrac{\sec^4\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha}{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \sec\alpha$; $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

885. $\operatorname{tg} 142°30' = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

886. $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{12}$.

887. $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$.

888. $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1 - \cos\alpha)} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

889. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{csc} 2\alpha}{\sec\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = 3$.

890. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{2\csc(\pi-2\alpha)}=\sin\alpha.$

891. $\dfrac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\dfrac{2}{\sec\alpha+\csc\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha;$

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

892. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta).$

893. $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\dfrac{63}{128}+\dfrac{15}{32}\cos 4x+\dfrac{5}{128}\cos 8x.$

894. $\dfrac{\cos 4\beta-\cos\beta}{\sin\beta-\sin 4\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{5\beta}{2}.$

895. $\dfrac{1}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\dfrac{1}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)}+$

$$+\frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=\frac{1}{2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}.$$

896. $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ=0.$

897. $\sin 78^\circ-\sin 18^\circ+\cos 132^\circ=0.$

898. $(\sin\alpha+\csc\alpha)^2+(\cos\alpha+\sec\alpha)^2=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+7.$

899. $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha.$

900. $\cos^2\dfrac{7\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{3\alpha}{2}=\cos 2\alpha\cos 5\alpha.$

901. $\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\beta-\sin\beta).$

902. $\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\beta-\sin\beta).$

903. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi n$, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=(-1)^n 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

904. Если $\alpha+\beta+\gamma=2\pi n$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(-1)^{n-1}4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

905. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

906. Если $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

907. Если $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\delta=2\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\beta).$$

**908.** Если $\operatorname{tg} x = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, то

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

**909.** Если $a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta = (a+b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, то

$$a\cos\beta = b\cos\alpha.$$

**910.** Если $l\cos(\Theta-\beta) - m\cos(\Theta-\alpha) = n$, то

$$l\sin(\Theta-\beta) - m\sin(\Theta-\alpha) = \pm\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)}.$$

**911.** Если $(a-b)\sec\alpha = \sqrt{a^4 + \frac{a^2b^2}{a^2-1}} = (a+b)\sec\beta$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{b}{a\sqrt{a^2-1}}.$$

**912.** Если $\cos\Theta = \cos\alpha\cos\beta$; $\cos\varphi = \cos\gamma\cos\beta$ и $\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, то

$$\sin^2\beta = (\sec\alpha - 1)(\sec\gamma - 1).$$

Определить зависимость между углами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$:

**913.** $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

**914.** $\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{ctg}2\beta - \operatorname{ctg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{ctg}2\beta\operatorname{ctg}2\gamma$.

**915.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$.

**916.** $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma + 1 = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

**917.** $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$.

**918.** $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

Преобразовать в произведение и упростить:

**919.** $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$; $a \geqslant b$; $a > 0$; $b \geqslant 0$.

**920.** $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$.

**921.** $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**922.** $\frac{\csc\alpha - \sin\alpha - \sec\alpha + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

**923.** $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

**924.** $\sin\alpha + \cos\alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha$.

**925.** $\sqrt{3} - 2\cos 20°$.

**926.** $\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B-C}{2}$; $A + B + C = 180°$.

**927.** $\sqrt{1 + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**928.** Вычислить без таблиц $\operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81°$.

**929.** Найти зависимость между острыми углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = 3$; $\operatorname{ctg}\beta = 5$; $\operatorname{ctg}\gamma = 8$.

**930.** Вычислить, не пользуясь таблицами, $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 60° \times \times \operatorname{tg} 80°$.

Привести к виду, удобному для логарифмирования:

**931.** $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60°$.

**932.** $2\cos 20° \sin 80° - 2\sin 60° + \cos 50°$.

**933.** $\cos 40° + \cos 50° + \cos 60° + \cos 70° + \cos 80°$.

**934.** $\sin 47° + \sin 61° - \cos 79° - \cos 65°$.

**935.** Доказать, что $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

**936.** Доказать, что

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\alpha,$$

если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**937.** Найти $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}}$, где $0 \leqslant \alpha < 90°$.

**938.** Доказать, что

$$1 + \sec 20° = \operatorname{ctg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 40°.$$

**939.** $\alpha$ и $\beta$ различные значения $x$, удовлетворяющие уравнению

$$a\cos x + b\sin x = c;$$

определить, чему равно

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}.$$

**940.** Доказать, что при условии примера 939

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

**941.** Доказать, что при условии примера 939

$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}$, если $\alpha \neq \beta$, и если $\alpha = \beta$, то

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**942.** $\cos\Theta + \cos\varphi = a$ и $\sin\Theta + \sin\varphi = b$; найти, чему равно $\cos(\Theta + \varphi)$ и $\sin(\Theta + \varphi)$.

**943.** $\cos\Theta + \cos\varphi = a$ и $\sin\Theta + \sin\varphi = b$; найти, чему равно $\cos(\Theta - \varphi)$ и $\sin(\Theta - \varphi)$.

**944.** $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$; доказать, что $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

При помощи вспомогательного угла привести к виду, удобному для логарифмирования:

**945.** $x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ ($a$, $b$, $c$ и $\alpha$ — стороны и угол треугольника).

**946.** $x = \frac{a\sin\alpha - b\sin\beta}{a\cos\alpha - b\cos\beta}$.

**947.** $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b})$.

**948.** $x = 8\sin(45° - \alpha) + 15\sin(45° + \alpha)$.

**949.** $x = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, $0 < b < a$.

**950.** $x = \sqrt{\frac{7\ \csc^2\alpha\sec^2\beta}{\sin^2\gamma}} - 1$.

**951.** $x = \operatorname{ctg}^2 5\alpha - 3\sin^2\beta\sec^2\gamma$.

**952.** $x = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta}$.

**953.** $x = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - q}$.

Решить уравнения и неравенства:

**954.** $\operatorname{tg}(45° + x) = 1 + \sin 2x$.

**955.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

**956.** $\operatorname{tg} x\,\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1$.

**957.** $\sin(x - \alpha) - \sin(x - \beta) - \sin(\beta - \alpha) = 0$, где $\beta \neq \alpha + 2\pi n$.

**958.** $\sin(x + 1)\cos 2(x + 1) = \sin 3(x + 1)\cos 4(x + 1)$.

**959.** $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$.

960. $\frac{\cos x}{1+\sin x} = 2 - \operatorname{tg} x.$

961. $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x.$

962. $4^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{2}.$

963. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\cos^3\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$

964. $\cos 2x = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}.$

965. $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - 45°\right).$

966. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$

967. $\sin x = \cos 2x.$

968. $\csc x - \sin x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x.$

969. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}\sin 2x.$

970. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(45° + x) = 2.$

971. $\cos 2x + \sin 2x = \cos x + \sin x.$

972. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{9}{8}.$

973. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}.$

974. $3\operatorname{tg}^4 x + 4\operatorname{tg}^3 x - 6\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0.$

975. $3\sin x = 2\cos^2 x.$

976. $\sin(\pi\cos x) - \cos(\pi\sin x) = 0.$

977. $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$

978. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2.$

979. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sec x - \cos x}{2\sin x}.$

980. $\sec x + \csc x = 2\sqrt{2}.$

981. $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x \cdot \operatorname{ctg}\frac{5}{3}x = 1 - \sec\frac{3}{5}x \cdot \csc\frac{5}{3}x.$

982. $\sin x + \cos x \sin 2x = 1.$

983. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$

984. $1 - \frac{2(\sin 2x - \cos 2x \operatorname{tg} x)}{\sqrt{3}\sec^2 x} = \cos^4 x - \sin^4 x.$

**985.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

**986.** $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$.

**987.** $\sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x \sin x$.

**988.** $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

**989.** $\sin x + \sin 5x = 2$.

**990.** $3 \sin x = 2(1 - \cos x)$.

**991.** $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

**992.** $\operatorname{tg}(x + 30°) \operatorname{tg}(x - 60°) = 1$.

**993.** $\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x$.

**994.** $\sin\left(45° + \frac{3}{2}x\right) = 3 \sin\left(45° - \frac{x}{2}\right)$.

**995.** $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$.

**996.** $\operatorname{tg} 7x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

**997.** $\sec x + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x \operatorname{tg} \frac{\pi + x}{2}$.

**998.** $2 \cos^2 x + \cos 5x - 1 = 0$.

**999.** $(\sin x - 5) \cos^4 x - 4(3 \sin x - 5) \cos^2 x + 16 (\sin x - 1) = 0$.

**1000.** $(\sin 2x + 3) \sin^4 x - (\sin 2x + 3) \sin^2 x + 1 = 0$.

**1001.** $\sin x = \cos \frac{1}{x}$, если $x \neq 0$.

**1002.** $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$.

**1003.** $\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x$.

Решить системы тригонометрических уравнений:

**1004.**
$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2}; \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

**1005.**
$$\begin{cases} x + y = \alpha; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m. \end{cases}$$

**1006.**
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = m; \\ 1 + n \cos y = \frac{1 - n^2}{1 - n \cos x}. \end{cases}$$

**1007.** $\begin{cases} \cos \pi x \cos \pi y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ x + y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

**1008.** Исключить угол $\alpha$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = x; \\ \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = y. \end{cases}$$

**1009.** Исключить $\alpha$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos (\beta + \alpha) = m; \\ \cos (\beta - \alpha) = n. \end{cases}$$

**1010.** Исключить углы $\alpha$ и $\beta$ из системы уравнений

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \beta = a; \\ x \sin \beta - y \cos \alpha = b; \\ (x^2 + y^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 2ab. \end{cases}$$

**1011.** Исключить $t$ из системы уравнений

$$\begin{cases} x = \sin t - \cos t; \\ y = t + \sin 2t. \end{cases}$$

**1012.** Исключить $x$ из системы уравнений:

$$\begin{cases} m \operatorname{ctg} x = a; \\ n \operatorname{csc} 2x = b. \end{cases}$$

**1013.** Исключить $t$ из системы уравнений

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t + 3a \cos t \sin^2 t; \\ y = a \sin^3 t + 3a \cos^2 t \sin t. \end{cases}$$

**1014.** Исключить $x$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = a; \\ \sec x - \cos x = b. \end{cases}$$

**1015.** Исключить $x$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2x = \frac{y}{a}; \\ \sin x + \sin 2x = \frac{z}{b}. \end{cases}$$

**1016.** Исключить $x$ и $y$ из системы уравнений

$$\begin{cases} a \cos x + b \sin x = a \cos y + b \sin y = 2c; \\ 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = 1. \end{cases}$$

Найти периоды функций:

**1017.** $y = \cos nx$.

**1018.** $y = \sin 2x - \cos 5x$.

**1019.** $y = \cos^2 x$.

**1020.** $y = \cos^3 x$.

**1021.** $y = \sin 4\pi x$.

**1022.** $y = 2\sin 4x - 3\sin 5x - \cos\left(\frac{x}{3} + 3\right)$.

**1023.** $y = \cos^2 4x$.

**1024.** $y = \cos^4 x$.

Построить графики:

**1025.** $y = \sin 3x$.

**1026.** $y = \sin 2x$.

**1027.** $y = 2\cos 4x$.

**1028.** $y = \sin(2x + 1)$.

**1029.** $y = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

**1030.** $y = \sin^2 x$.

**1031.** $y = \lg \sin x$.

**1032.** $y = \lg \csc x$.

**1033.** $y = \lg \cos x$.

**1034.** $y = |\sin x|$.

Вычислить выражения:

**1035.** $\cos(\operatorname{arc ctg} a)$.

**1036.** $\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc tg}(-2{,}4)\right]$.

**1037.** $\sin\left(2\operatorname{arc tg}\frac{3}{4}\right)$.

**1038.** $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right)$.

**1039.** $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$.

Доказать равенства:

**1040.** $\operatorname{arc tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc tg} 1$.

**1041.** $\operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc tg} y = \pi + \operatorname{arc tg}\frac{x+y}{1-xy}$, если $x > 0$, $xy > 1$.

**1042.** $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

**1043.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}=\arccos\frac{a-x}{a+x}$, где $a\neq 0$.

**1044.** $2\operatorname{arctg}\frac{8}{15}-\arcsin\frac{240}{289}=0$.

**1045.** $\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

**1046.** $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

**1047.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})$.

**1048.** $\operatorname{arctg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$, если $ab>0$.

Решить уравнения:

**1049.** $\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{\pi}{4}$.

**1050.** $\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$.

**1051.** $\operatorname{arctg}3^{x}-\operatorname{arctg}3^{-x}=\frac{\pi}{6}$.

**1052.** $\arcsin\frac{3x}{5}+\arcsin\frac{4x}{5}=\arcsin x$.

**1053.** $\arcsin x\cdot\arccos x=a^{2}$.

**1054.** $\arcsin x=\operatorname{arcctg}x$.

**1055.** $\arccos 4x=\arcsin 3x$.

**1056.** $2\arcsin x=\arcsin 2x$.

**1057.** $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}x)=-\operatorname{ctg}(5\operatorname{arctg}x)$.

**1058.** $\operatorname{arctg}(1+\sin x)=\operatorname{arcctg}2(1-\sin x)$.

**1059.** Доказать, что когда $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\pi$, то $x+y+z=xyz$.

**1060.** Решить неравенство $\arcsin x<\arcsin(1-x)$.

## РАЗДЕЛ V

## РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

**1061.** Найти такое трехзначное число, цифры которого, записанные в обратном порядке, дадут число, которое на 198 меньше первоначального. Кроме того, известно, что сумма цифр числа равна 12, а сумма их квадратов 74.

Вычертить графики функций:

**1062.** $y = \log_2^2 |x|$.

**1063.** $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

**1064.** $y = 2 \sin x |\cos x|$.

**1065.** Найти все корни уравнения $4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = 0$, если один из них равен $3 + i\sqrt{6}$.

**1066*.** Доказать, что

$$1m + 2(m-1) + 3(m-2) + \ldots + k(m-k+1) + \\ + \ldots + (m-2) \cdot 3 + (m-1) \cdot 2 + m \cdot 1 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6},$$

где $m$ и $k$ — числа натурального ряда.

**1067.** Доказать, что если

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

то

$$x^3 - y^3 - z^3 = (x-y)(x-z)(2x+y+z).$$

**1068.** Доказать, что если целые числа $x$, $y$, $z$ и 5 попарно взаимно простые, то $x^5 - y^5 - z^5$ не делится на 25.

**1069.** Доказать, что если числа, удовлетворяющие теореме Пифагора, целые, то одно из них обязательно делится на 3.

**1070.** Доказать тождество

$$N^k - 1 - k(N-1) = (N-1)^2 [N^{k-2} + 2N^{k-3} + \\ + \ldots + (k-2)N + k - 1],$$

где $N$ — любое число, $k$ — натуральное число.

* Задачи 1066, 1067, 1068, 1069, 1070 составили тт. А. Ф. Копейчиков и П. А. Рудиченко.

## РАЗДЕЛ I

## АРИФМЕТИКА

**1.** а) $41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60} = \frac{16}{35}$; б) $2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5} = \frac{33}{35}$; в) $\frac{33}{35} \cdot 3\frac{1}{2} = 3{,}3$; г) $4 - 3{,}3 = 0{,}7$; д) $0{,}7 : 0{,}16 = \frac{35}{8}$; е) $\frac{16}{35} \cdot \frac{35}{8} = 2$.

*Отв.* 2.

**2.** *Отв.* 700. **3.** *Отв.* 5. **4.** *Отв.* 11. **5.** *Отв.* 250.

**6.** а) $84{,}63 : 2{,}1 = 40{,}3$; б) $\frac{7}{8} \cdot 35{,}2 = 30{,}8$; в) $40{,}3 - 30{,}8 = 9{,}5$; г) $9{,}5 + 2\frac{5}{42} = 11\frac{13}{21}$; д) $11\frac{13}{21} - 7\frac{43}{48} = 3\frac{81}{112}$; е) $3\frac{81}{112} : 7\frac{25}{56} = \frac{1}{2}$; ж) $3{,}2 : 4 = 0{,}8$; з) $14\frac{1}{6} - 0{,}8 = 13\frac{11}{30}$; и) $17{,}25 : 2{,}3 = 7\frac{1}{2}$; к) $7\frac{1}{2} + \frac{2}{15} = 7\frac{19}{30}$; л) $\frac{401}{30} : \frac{229}{30} = \frac{401}{229}$; м) $\frac{401}{229} : \frac{229}{802} = \frac{1}{2}$; н) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$.

*Отв.* 1.

**7.** а) $1{,}5 : 0{,}3 = 5$; б) $0{,}6 \cdot 5 = 3$; в) $3 : \frac{3}{5} = 5$; г) $5 : 5 = 1$; д) $\frac{1}{2} - \frac{2}{15} = \frac{11}{30}$; е) $\frac{11}{30} \cdot \frac{30}{77} = \frac{1}{7}$; ж) $2\frac{3}{25} + \frac{22}{7} = \frac{921}{175}$; з) $\frac{921}{175} \cdot 25 = \frac{921}{7}$; и) $\frac{1}{7} : \frac{921}{7} = \frac{1}{921}$; к) $1 - \frac{1}{921} = \frac{920}{921}$; л) $\frac{920}{921} : \frac{1}{3} = 2\frac{306}{307}$; м) $2\frac{306}{307} + \frac{1}{307} = 3$.

*Отв.* 3.

**8.** *Отв.* $\frac{157}{280}$.

**9.** *Отв.* $1\frac{1}{8}$.

**10.** *Отв.* 2,25.

**11.** После выполнения в соответствующей последовательности указанных в примере действий получим число 6, которое по условию задачи необходимо разделить на три части пропорционально числам $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$ или 9, 8, 3.

Принимая во внимание, что искомые числа равняются соответственно 9, 8 и 3 двадцатым частям данного числа ($9 + 8 + 3 = 20$), найдем, что первое число будет равняться 2,7; второе — 2,4 и третье — 0,9.

*Отв.* 2,7; 2,4; 0,9.

**12.** Вес патрона составляется из веса снаряда, заряда и гильзы. Снаряд и гильза, взятые вместе, составляют по весу $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ всего патрона. На долю заряда остается $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$ веса патрона, что составляет 0,8 *кг*. Таким образом, вес патрона равен $0{,}8\ кг : \frac{1}{12} = 9{,}6\ кг$.

*Отв.* 9,6 *кг*.

**13.** 1-й способ решения (приведением к единице). Так как вес железа прямо пропорционален его объему, то 1 $см^3$ будет весить в 14 раз меньше веса данного куска железа.

1 $см^3$ весит $\frac{109{,}2}{14}$ *г*; 42 $см^3$ будут весить в 42 раза больше, чем 1 $см^3$; 42 $см^3$ весят $\frac{109{,}2 \cdot 42}{14}$ *г*.

Таким образом, $x = \frac{109{,}2 \cdot 42}{14} = 327{,}6$ *г*, где $x$ — искомый вес.

2-й способ решения (при помощи пропорции). Так как вес железа прямо пропорционален его объему, то отношение значений веса равно отношению соответствующих значений объема

$$\frac{14}{42} = \frac{109{,}2}{x},$$

откуда

$$x = \frac{42 \cdot 109{,}2}{14} = 327{,}6\ г.$$

*Отв.* 327,6 *г*.

**14.** Так как число оборотов в минуту двух колес, сцепленных друг с другом, обратно пропорционально числу их зубцов, то отношение числа зубцов одного колеса к числу зубцов другого равно обратному отношению соответствующих чисел оборотов этих колес.

Имеем

$$8 : 20 = x : 95,$$

откуда

$$x = \frac{8 \cdot 95}{20} = 38.$$

*Отв.* 38 оборотов.

15. Так как число дней работы обратно пропорционально числу каменщиков, то 24 каменщика выложат стену при прочих равных условиях за число дней, которое составляет $\frac{29}{24}$ от числа дней, за которое выполнят эту же работу 29 каменщиков, т. е. за

$$8{,}4 \cdot \frac{29}{24} \text{ дня.}$$

Так как число дней работы обратно пропорционально продолжительности рабочего дня, то 24 каменщика при 7-часовом рабочем дне выложат стену за число дней, которое составляет $\frac{6}{7}$ от числа дней, за которое выполнят работу 24 каменщика при 6-часовом рабочем дне, т. е. за

$$8{,}4 \cdot \frac{29}{24} \cdot \frac{6}{7} \text{ дня.}$$

Отсюда, получим

$$x = \frac{8{,}4 \cdot 29 \cdot 6}{24 \cdot 7} = 8{,}7 \text{ дня.}$$

16. *Отв.* Совхоз имеет 6300 *га*.

17. Пусть продажная стоимость товара равна 100%, тогда себестоимость будет составлять $(100 - 11\frac{1}{4})\% = 88\frac{3}{4}\%$ продажной стоимости товара. Отсюда процент прибыли будет равняться

$$\frac{11\frac{1}{4} \cdot 100}{88\frac{3}{4}} = 12\frac{48}{71}\%.$$

*Отв.* $12\frac{48}{71}\%$.

18. Вычислим заданное выражение:

а) $1{,}4 \cdot 0{,}15 = 0{,}21$; б) $0{,}03 : \frac{1}{20} = 0{,}6$; в) $0{,}75 - 0{,}6 = 0{,}15$; г) $0{,}21 : 0{,}15 = \frac{7}{5}$; д) $0{,}0\,(6) = \frac{1}{15}$; е) $\frac{1}{15} + \frac{11}{10} = \frac{7}{6}$; ж) $1{,}1\,(6) = \frac{7}{6}$; з) $\frac{7}{6} : \frac{7}{6} = 1$; и) $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$; к) $\frac{2}{5} : 0{,}85 = \frac{8}{17}$; л) $\frac{8}{17} + 471\frac{9}{17} = 472$.

Обозначим 50% первого числа через $x$, тогда $60\% = 0{,}6$ второго числа и $80\% = 0{,}8$ третьего числа также равны $x$, следовательно, первое число равно $\frac{x}{0{,}5}$; второе число равно $\frac{x}{0{,}6}$ и третье равно $\frac{x}{0{,}8}$; но $\frac{x}{0{,}5} + \frac{x}{0.6} + \frac{x}{0{,}8} = 472$, откуда $x = 96$.

*Отв.* Первое число равно $96 : 0{,}5 = 192$; второе число равно $96 : 0{,}6 = 160$; третье число равно $96 : 0{,}8 = 120$.

**19.** Если большой луг косили в продолжение первой половины дня все косари, а во второй половине дня — половина косарей, то за вторую половину дня половина косарей выкосила $\frac{1}{3}$ луга. Таким образом, на меньшем лугу осталась нескошенной полоса $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ части луга.

Если один косарь может выкосить за день $\frac{1}{6}$ часть луга, а выкошено было $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, то косарей было $\frac{8}{6} : \frac{1}{6} = 8$ (чел.).

*Отв.* 8 косарей.

**20.** В 40 *кг* морской воды содержится $40 \cdot 0{,}05 = 2$ *кг* соли. Чтобы 2 *кг* составили 2% общего веса, последний должен равняться $2 : 0{,}02 = 100$ *кг*.

*Отв.* Необходимо добавить 60 *кг*.

**21.** Содержание меди в руде составляет $\frac{34{,}2 \cdot 100}{225}$ %.

*Отв.* 15,2%.

**22.** Вес отрезанной части составляет 72% веса всей швеллерной балки, следовательно, вес оставшейся части (45,2 *кг*) составляет $100\% - 72\% = 28\%$ веса швеллерной балки. 1% этого веса составляет $\frac{45{,}2}{28}$, а 72% составляют $\frac{45{,}2}{28} \cdot 72 = 116\frac{8}{35} \approx 116{,}23$ *кг*.

Указание. Вместо того, чтобы определять 1% веса всей швеллерной балки, можно составить следующую пропорцию:

$$x : 45{,}2 = 72 : 28,$$

или нахождением целого по его части и части целого получим

$$\frac{45{,}2 \cdot 0{,}72}{0{,}28}.$$

*Отв.* Вес отрезанной части швеллера равен $116\frac{8}{35} \approx 116{,}23$ *кг*.

**23.** Оба завода вместе могли выполнить в день $\frac{1}{12}$ часть заказа. По условию производительность завода $B$ составляет $66\frac{2}{3}\%$, т. е. $\frac{2}{3}$ производительности завода $A$; следовательно, производительность обоих заводов составляет $1\frac{2}{3}$ производительности завода $A$. Значит, завод $A$ может выполнить в день $\frac{1}{12} : 1\frac{2}{3} = \frac{1}{20}$ часть заказа, а завод $B$ — $\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{30}$ часть заказа. До остановки завода

$A$ была выполнена $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ часть всего заказа. На выполнение остающихся $\frac{5}{6}$ всего заказа заводу $B$ требуется $\frac{5}{6} : \frac{1}{30} = 25$ дней.

*Отв.* Заказ будет выполнен через 27 дней.

**24.** Верно решившие 14 человек составляют $100\% - (12\% + 32\%) = 56\%$ всех учеников класса. Общее число учеников класса было $\frac{14 \cdot 100}{56} = 25$.

*Отв.* 25 учеников.

**25.** Данная дробь равна 24, поэтому окончательно имеем

$$\frac{24 \cdot 100}{4{,}8} = 500.$$

*Отв.* 500.

**26.** *Отв.* 40 *кг*.

**27.** Сливок взято $\frac{483 \cdot 100}{23} = 2100$ *кг*, а молока $\frac{2100 \cdot 100}{21} = 10\,000$ *кг*.

*Отв.* 2100 *кг* и 10 000 *кг*.

**28.** Два скачка собаки составляют 4 *м*; 3 скачка лисицы составляют 3 *м*. Следовательно, когда собака пробегает 4 *м*, расстояние между собакой и лисицей сокращается на 4 *м* — 3 *м* = 1 *м*. Первоначальное же расстояние между ними в 30 раз больше. Значит, собака догонит лисицу, когда пробежит 4 *м* · 30 = 120 *м*.

*Отв.* На расстоянии 120 *м*.

**29.** Сплав содержит 12 *кг* · 0,45 = 5,4 *кг* меди. Поскольку в новом сплаве эти 5,4 *кг* меди составляют по весу 40%, то вес нового сплава будет 5,4 : 0,40 = 13,5 *кг*. Таким образом, нужно добавить 13,5 *кг* — 12 *кг* = 1,5 *кг*.

*Отв.* 1,5 *кг*.

**30.** 1-й способ решения. Для определения веса серебра можно составить следующую пропорцию:

$$x : 2 = 14\tfrac{2}{7} : 114\tfrac{2}{7}.$$

2-й способ решения. Вес серебра составляет $14\frac{2}{7}\%$, или $\frac{1}{7}$ часть меди. Следовательно, меди в 7 раз больше, чем серебра; поэтому вес серебра составляет $\frac{2}{8}$ *кг*.

*Отв.* Вес серебра 250 *г*.

**31.** Необходимо вычислить площадь поперечного сечения русла реки по средним величинам ширины, равной 5 *м*, и глубины, равной 1,5 *м*. Следовательно,

$$S = 5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5 \text{ м}^2.$$

Так как скорость течения равна 80 *см/сек*, то каждую секунду падает с высоты плотины столб воды высотой 80 *см* (или 0,8 *м*); следовательно, объем падающей воды будет $V = Sh = 7{,}5\ м^2 \times \times 0{,}8\ м = 6\ м^3$, а вес падающей воды составит $F = 6000\ кГ$ *. Так как высота плотины равна 2 *м*, то работа, совершаемая при падении воды за секунду, будет

$$W = \frac{6000\ кГ \cdot 2\ м}{1\ сек} = 12\,000\ кГ \cdot м/сек**.$$

Но так как полезное действие турбины составляет 75%, то полезная работа за секунду $W_1 = 12\,000 \cdot 0{,}75\ кГ \cdot м/сек$, а мощность в лошадиных силах

$$W_1 = \frac{12\,000 \cdot 0{,}75}{75} = 120\ л.с.**.$$

*Отв.* 120 *л. с.*

**32.** Из условий задачи известно, что $\frac{8}{100} = \frac{16}{200}$ первого числа равняются $\frac{15}{200}$ второго числа. Таким образом, получили, что второе число больше первого во столько раз, во сколько число 16 будет больше числа 15, т. е. имеем отношение двух чисел 15 и 16.

Первое число равняется $\frac{527}{15+16} \cdot 15 = 255$, а второе число $527 - 255 = 272$.

*Отв.* 255; 272.

**33.** Пусть первое число равно пяти, а второе число — шести. Тогда $\frac{7}{10}$ первого числа равняются $5 \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{2}$; $0{,}2(6) = \frac{4}{15}$ второго числа равняются $6 \cdot \frac{4}{15} = \frac{8}{5}$, разность между ними $\frac{7}{2} - \frac{8}{5} = \frac{19}{10}$. Но разница будет в $76 : \frac{19}{10} = 40$ раз больше. Следовательно, первое число $5 \cdot 40 = 200$, а второе $6 \cdot 40 = 240$.

Можно считать, что первое число имеет 5 частей, а второе — 6. Тогда $\frac{19}{10}$ частей составляет 76, а одна часть — $76 : \frac{19}{10} = 40$.

*Отв.* 200; 240.

**34.** *Отв.* 2,5 *л.*

---

* По ГОСТ 9867—61 единица измерения силы — ньютон(*н*):
$1\ кГ = 9{,}8\ н$; $1\ н = 1{,}02 \cdot 10^{-1}\ кГ$.

** По ГОСТ 9867—61 единица измерения мощности — ватт (*вт*):

$$1\ кГ \cdot м/сек = 9{,}8\ вт = 1{,}333 \cdot 10^{-2}\ л.с.;$$

$$1\ вт = 1{,}02 \cdot 10^{-1}\ кГ \cdot м/сек = 1{,}36 \cdot 10^{-3}\ л.с.;$$

$$1\ л.с. = 75\ кГ \cdot м/сек = 735{,}5\ вт.$$

35. Обозначая искомые части через $x_1$; $x_2$; $x_3$; $x_4$, получим $x_1 : x_2 = 2 : 3$; $x_2 : x_3 = 3 : 5$; $x_3 : x_4 = 5 : 6$, откуда $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 3 : 5 : 6$. Таким образом, число 125 содержит $2 + 3 + 5 + 6 = 16$ равных частей, откуда

$$x_1 = \frac{125 \cdot 2}{16} = 15\frac{5}{8}; \quad x_2 = \frac{125 \cdot 3}{16} = 23\frac{7}{16}; \quad x_3 = \frac{125 \cdot 5}{16} = 39\frac{1}{16}; \quad x_4 = 46\frac{7}{8}.$$

*Отв.* $x_1 = 15\frac{5}{8}$; $x_2 = 23\frac{7}{16}$; $x_3 = 39\frac{1}{16}$; $x_4 = 46\frac{7}{8}$.

36. Обозначим знаменатель первой дроби через $I$, второй — $II$, третьей — $III$, тогда $I : II = 2 : 1$; $II : III = 2 : 3$; $I : II : III = 4 : 2 : 3$.

Пусть общая мера всех числителей будет $x$, а всех знаменателей $y$ (под общей мерой нескольких чисел понимают такое число, которое содержится в каждом из этих чисел целое число раз).

В первой дроби число отношений общих мер будет $\frac{3}{4}$, во второй — $\frac{1}{2}$, в третьей — $\frac{2}{3}$, а в сумме трех дробей —

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{23}{12}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{y} = \frac{23}{60} : \frac{23}{12}; \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{5}.$$

*Отв.* $\frac{3}{20}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{15}$.

37. 1-й способ решения. Пусть число отсутствующих учеников в начале урока составляло одну часть, тогда число присутствующих составляло 10 частей, а всего было 11 частей. Позже, после прихода на занятия еще одного ученика, если принять за две части число отсутствующих учеников, всего частей было 33, при этом одна часть в первом случае была в 3 раза больше, чем одна часть во втором случае.

Сравнивая количества частей отсутствующих учеников в начале урока и позже, легко убедиться, что одна часть во втором случае $(3 - 2 = 1)$ соответствует одному ученику. Следовательно, учеников в классе было 33.

2-й способ решения. Число отсутствующих учеников в начале урока составляло $\frac{1}{11}$, а позже — $\frac{2}{33}$ части учеников класса. Следовательно, $\frac{1}{11} - \frac{2}{33} = \frac{1}{33}$ часть учащихся класса соответствует одному ученику.

*Отв.* 33 учащихся.

**38.** Первая машинистка, работая 8 часов, перепечатывала по 6 страниц в час и, следовательно, всего перепечатала $6 \cdot 8$ (страниц); точно так же, вторая перепечатала $10 \cdot 6$ (страниц) и третья — $8 \cdot 7$ (страниц). Поэтому общая сумма заработка, т. е. 12,3 руб., должна быть разделена пропорционально произведениям $6 \cdot 8$; $10 \cdot 6$ и $8 \cdot 7$, т. е. пропорционально числам 48, 60 и 56, или по сокращению — 12, 15 и 14. Обозначив искомые числа через $x_1$, $x_2$ и $x_3$, найдем

$$x_1 = \frac{12{,}3 \cdot 12}{12+15+14} = \frac{12{,}3 \cdot 12}{41} = 3{,}6 \text{ руб.};$$

$$x_2 = \frac{12{,}3 \cdot 15}{41} = 4{,}5 \text{ руб.}; \qquad x_3 = \frac{12{,}3 \cdot 14}{41} = 4{,}2 \text{ руб.}$$

*Отв.* 3,6 руб.; 4,5 руб.; 4,2 руб.

**39.** *Отв.* 21%.

**40.** 21 *л* спирта крепостью 60° содержит чистого спирта $\frac{21 \cdot 60}{100} = 12\frac{3}{5}$ *л*; 45 *л* спирта крепостью 48° содержит чистого спирта $\frac{45 \cdot 48}{100} = 21\frac{3}{5}$ *л*.

Всего чистого спирта $12\frac{3}{5} + 21\frac{3}{5} = 34\frac{1}{5}$ *л*, а смеси $21 + 45 + 6 = 72$ *л*.

Крепость смеси $\frac{34{,}2 \cdot 100}{72} = 47{,}5°$.

*Отв.* 47,5°.

**41.** Цистерн, окрашенных в темный цвет, будет $\frac{45}{2+3} \cdot 3 = 27$ шт., а цистерн, окрашенных в светлый цвет, будет $45 - 27 = 18$ шт.

Цистерны темного цвета содержат горючего $16{,}5 \cdot 27 = 445{,}5$ *т* и теряют от испарения $445{,}5 \cdot 0{,}0124 \approx 5{,}5$ *т*.

Цистерны светлого цвета содержат горючего $16{,}5 \cdot 18 = 297$ *т* и теряют от испарения $297 \cdot 0{,}0083 \approx 2{,}5$ *т*.

Все цистерны поезда теряют от испарения горючего около $5{,}5 + 2{,}5 = 8$ *т*.

*Отв.* Около 8 *т*.

**42.** Если от разности этих чисел отнять остаток 3, т. е. $48 - 3 = 45$, то полученная разность делится на искомое второе число без остатка и дает в частном 3. Следовательно, второе искомое число равно 15, а первое — $48 + 15 = 63$.

*Отв.* 63 и 15.

**43.** Если на каждый десяток яблонь приходится 3 грушевых и 2 сливовых дерева, то вместе будет 15 деревьев, а вишневых —

$$15 \cdot \frac{1}{3} = 5.$$

В саду было яблонь

$$2860 : (5 + 10 + 3 + 2) = 143 \text{ десятка.}$$

*Отв.* 1430 яблонь; 715 вишен; 429 груш и 286 слив.

**44.** *Отв.* 100 руб.

**45.** Так как при увеличении такого числа в 5 раз количество его цифр не изменяется, то искомое число должно начинаться с цифры 1. При перенесении этой цифры в конец мы получим число, оканчивающееся цифрой 1. Но такое число не может делиться на 5.

РАЗДЕЛ II

# АЛГЕБРА

## Преобразование алгебраических выражений. Радикалы и действия над ними

**46.** $3x^2 - 5x + 8 = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}\right) = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{8}{3} - \frac{25}{36}\right] =$

$= 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{71}{36}\right] = \left(x\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{71}{12}}\right)^2.$

**47.** Приведя дроби в скобках к общему знаменателю, получим выражение

$$\frac{-3(2a^2 + 9a + 10)}{a(3a - 1)}.$$

Корни уравнения $2a^2 + 9a + 10 = 0$ будут $a_1 = -2$; $a_2 = -\frac{5}{2}$.

Разложим трехчлен на множители:

$$2a^2 + 9a + 10 = 2(a + 2)\left(a + \frac{5}{2}\right).$$

Теперь выражение в скобках примет вид

$$\frac{-3(a + 2)(2a + 5)}{a(3a - 1)}.$$

Второй множитель

$$\frac{3a^3 + 8a^2 - 3a}{1 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{4a(a + 3)(3a - 1)}{(2 + a)(2 - a)}.$$

*Отв.* $\frac{12(2a + 5)(a + 3)}{a - 2}$.

**48.** Первая дробь равна $\frac{a + x + 1}{a + x - 1}$, а выражение в квадратных скобках равно

$$\frac{(a + x)^2 - 1}{2ax} = \frac{(a + x + 1)(a + x - 1)}{2ax}.$$

Заданное выражение принимает вид $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$. При подстановке $x=\frac{1}{a-1}$ находим, что $x+1+a=\frac{1}{a-1}+a+1=\frac{a^2}{a-1}$.

*Отв.* $\frac{a^3}{2(a-1)}$.

**49.** Вначале находим

$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}},$$

$$\sqrt{x^2-x}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}.$$

Заданное выражение равно

$$\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}+1}{-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}+\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}-1}{-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}=\frac{-2+\sqrt{3}}{-3+\sqrt{3}}+\frac{-2-\sqrt{3}}{-3-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3+6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{6}=1.$$

*Отв.* 1.

**50.** $a^3+b^3+c^3-3abc=(a^3+a^2b+a^2c)+(b^3+b^2a+b^2c)+$
$+(c^3+c^2a+c^2b)-(a^2b+a^2c+abc)-(b^2a+b^2c+abc)-(c^2a+$
$+c^2b+abc)=a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)-$
$-a(ab+ac+bc)-b(ab+ac+bc)-c(ab+ac+bc)=(a+b+$
$+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(ab+ac+bc)=(a+b+c)(a^2+$
$+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-$
$-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)]=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+$
$+(b-c)^2]$.

*Отв.* $\frac{a+b+c}{2}$.

**51.** Указание. Для решения этого примера нужно числитель и знаменатель умножить вначале на $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}$, а затем на неполный квадрат суммы.

*Отв.* $\frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}]}{a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b-21abc}$.

**52.** Если дано равенство, правая и левая части которого положительны, то должны быть равны и квадраты этих частей. Квадрат левой части

$$8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{64-4(10+2\sqrt{5})}+$$
$$+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}=16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}}=$$
$$=16+4\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=16+4\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=$$
$$=4(4+\sqrt{5}-1)=4(3+\sqrt{5}).$$

Квадрат правой части

$$2(\sqrt{5}+1)^2=2(6+2\sqrt{5})=4(3+\sqrt{5}).$$

Отсюда следует справедливость равенства.

**53.** *Отв.* $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

**54.** $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)=b^2c+bc^2+c^2a-ca^2-$
$-ab(a+b)=c(b^2-a^2)+c^2(b+a)-ab(a+b)=(a+b)[c(b-a)+$
$+c^2-ab]=(a+b)(cb-ca+c^2-ab)=(a+b)[c(b+c)-$
$-a(c+b)]=(a+b)(b+c)(c-a)$.

**55.** *Отв.* $(7-x)(3x+10)$.

**56.** *Отв.* $(x-1)(x+3)^2$.

**57.** $x^3+2x^4+4x^2+2+x=x^3+x+2(x^4+2x^2+1)=x(x^2+$
$+1)+2(x^2+1)^2=(x^2+1)(2x^2+x+2)$.

*Отв.* $(x^2+1)(2x^2+x+2)$.

**58.** Из условия следует, что

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0.$$

Поэтому $ayz+bxz+cxy=0$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2-2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=$$
$$=1-2\left(\frac{cxy}{abc}+\frac{bxz}{abc}+\frac{ayz}{abc}\right)=1-2\frac{cxy+bxz+ayz}{abc}\Bigg)=1.$$

**59.** Прибавим и вычтем одно и то же выражение $(2x^3+2x^2)$:
$3x^4+(2x^3+2x^2)-(2x^3+2x^2)+1=(x^4+2x^3+x^2)+(x^4-$
$-2x^3+x^2)+(x^4-2x^2+1)=(x^2+x)^2+(x^2-x)^2+(x^2-1)^2$,
что и требовалось доказать.

**60.** Подставляем $x=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ в выражение $1-x^2$. Получаем

$$1-x^2=\frac{(1+k)^2-4k}{(1+k)^2}=\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2}.$$

Теперь находим

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 : \sqrt{1-x^2} = \frac{|1+k|}{|1-k|}.$$

Так как согласно дополнительному условию $k > 1$, то величина $1+k$ положительна, а $1-k$ отрицательна. Поэтому $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1+k}{k-1}$. Внутри первых квадратных скобок получаем $\frac{k}{k-1}$, внутри вторых — $\frac{1}{k-1}$. Данное выражение равно

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} + \sqrt{k-1}.$$

*Отв.* $\sqrt{k-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

**61.** Выражение в первых скобках равно $\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a}$ (показатель степени — 2 относится только к числителю третьего слагаемого). После упрощений это выражение равно $\frac{-(a-1)^2}{4a}$ или $\frac{-(1-a)^2}{4a}$.

Выражения

$$\sqrt[3]{(a+1)^{-3}} = \frac{1}{a+1} \quad \text{и} \quad (a+1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(a+1)^3}$$

будут арифметическими корнями только при условии $a > -1$. При этом условии и радикал

$$\sqrt{(a^2-1)(a-1)} = \sqrt{(a-1)^2(a+1)}$$

будет арифметическим корнем (так как множитель $(a-1)^2$ не может быть отрицательным). Равенство

$$\sqrt{(a-1)^2(a+1)} = (a-1)\sqrt{a+1}$$

верно только при $a > 1$. Если же $a < 1$, то

$$\sqrt{(a-1)^2(a+1)} = -(a-1)\sqrt{a+1}.$$

Таким образом, данное выражение равно

$$-\frac{(a-1)^2}{4a}\left[\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{|a-1|}\right].$$

Примечание. При $a = \pm 1$ выражение теряет смысл.

*Отв.* $\frac{a-1}{a+1}$ при $a > 1$; $\frac{(a^2+1)(1-a)}{2a(a+1)}$ при $-1 < a < 1$, т. е. при $|a| < 1$.

**62.** 1-й способ решения. Обозначим левую часть равенства через $z$:

$$z = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$z^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) +$$

$$+ 3\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)$$

или

$$z^3 = 40 + 6z,$$

т. е.

$$z^3 - 6z - 40 = 0.$$

Это кубическое уравнение имеет два мнимых и один вещественный корень, равный 4.

2-й способ решения.

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{2} + 3 \cdot 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2}.$$

Аналогично

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2\sqrt{2} + 3 \cdot 2(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3} =$$

$$= \sqrt{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 - \sqrt{2}.$$

Следовательно, $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

*Ответ.* 4

**63.** Обозначим данное выражение через $N$, тогда

$$N = \frac{(\sqrt{m + x} + \sqrt{m - x})^2}{(\sqrt{m + x})^2 - (\sqrt{m - x})^2} = \frac{m + x + 2\sqrt{m^2 - x^2} + m - x}{m + x - m + x} =$$

$$= \frac{m + \sqrt{m^2 - x^2}}{x} = \frac{m + \sqrt{m^2 - \left(\frac{2mn}{n^2 + 1}\right)^2}}{\frac{2mn}{n^2 + 1}} =$$

$$= \frac{m + \sqrt{m^2 \frac{(n^2+1)^2 - 4n^2}{(n^2+1)^2}}}{\frac{2mn}{n^2+1}} = \frac{\left(m + m\sqrt{\frac{n^4 + 2n^2 - 4n^2 + 1}{(n^2+1)^2}}\right)(n^2+1)}{2mn} =$$

$$= \frac{m\left(1 + \frac{n^2-1^*}{n^2+1}\right)(n^2+1)}{2mn} = \frac{n^2+1+n^2-1}{2n} = \frac{2n^2}{2n} = n.$$

*Отв.* $n$.

**64.**

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}(a - 8b)}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \frac{\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} - a^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + 2b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}} + 2b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}} \times$$

$$\times \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}}} - a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

*Отв.* 0.

**65.**

$$\left[\frac{\frac{\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{2x}\right)}{\sqrt[3]{4x^2}\left(\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{a}\right)} - 1}{\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right]^{-6} = \left[\frac{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{4x^2}} - 1}{\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right]^{-6} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{4x^2}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2x}\right)} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right]^{-6} = \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-6} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)^{-6} = \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)^{-6} = \frac{16x^4}{a^2}.$$

*Отв.* $\frac{16x^4}{a^2}$.

**66.** *Отв.* $x + y + z$.

**67.** Указание. При решении данного выражения надо воспользоваться тождеством

$$a - b = (a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}})(a^{1-\frac{1}{n}} + a^{1-\frac{2}{n}}b^{\frac{1}{n}} + \ldots + a^{\frac{1}{n}}b^{1-\frac{2}{n}} + b^{1-\frac{1}{n}}).$$

*Отв.* $\frac{a^{1-\frac{1}{n}} + a^{1-\frac{2}{n}}b^{\frac{1}{n}} + \ldots + b^{1-\frac{1}{n}}}{a - b}$.

**68.** Раскрыв в уравнении скобки, сгруппируем его члены следующим образом:

$$(y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3) - (3bcpy - 3abcp) - b^3p - c^3p^2 = 0$$

* Так как $n > 1$, то $\sqrt{(n^2-1)^2}$ равен $n^2 - 1$, а не $1 - n^2$.

или

$$(y-a)^3-3(y-a)\,bcp-b^3p-c^3p^2=0.$$

Заменяя $y$ его значением, имеем

$$(bp^{\frac{1}{3}}+cp^{\frac{2}{3}})^3-3(bp^{\frac{1}{3}}+cp^{\frac{2}{3}})\,bcp-b^3p-c^3p^2=0$$

и после элементарных преобразований убеждаемся, что данное уравнение действительно обращается в тождество, что и требовалось доказать.

**69.** Чтобы доказать, что данное выражение кратно 24, необходимо показать, что оно делится на 3 и на 8.

$$x^4+6x^3+11x^2+6x=x(x^3+6x^2+11x+6)=$$
$$=x(x^3+5x^2+x^2+5x+6x+6)=x[(x^3+x^2)+5x(x+1)+$$
$$+6(x+1)]=x(x+1)(x^2+5x+6)=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Таким образом, имеем произведение четырех последовательных целых чисел. Следовательно, данное произведение делится без остачи на 3 и на 8, а отсюда и на 24.

Примечание. Произведение $n$ целых последовательных чисел всегда делится на $n$, поэтому среди четырех последовательных целых чисел есть одно, которое делится на 4, и, кроме того, еще одно, которое делится на 2. Отсюда получаем, что найденное произведение делится на 8. Полученное произведение делится также и на 3.

**70.** Указание.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\,(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})}.$$

*Отв.* $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\,(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3})$.

**71.**

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x+1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+$$
$$+\sqrt{x-1-2\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+$$
$$+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2};$$

при $\sqrt{x-1}-1>0$ или $x>2$

$$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\sqrt{x-1}+1+$$
$$+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1};$$

при $\sqrt{x-1}-1<0$ или $1<x<2$

$$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\sqrt{x-1+1}+(1-\sqrt{x-1})=2;$$

при $x = 1$

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2;$$

при $x = 2$

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{2+2} + \sqrt{2-2} = 2.$$

*Отв.* 2 при $1 \leqslant x \leqslant 2$; $2\sqrt{x-1}$ при $x > 2$.

**72.** После элементарных преобразований получим

$$\frac{12a^2b + 16b^3}{12ab^2 + 16a^3} : \frac{(3a^2 + 4b^2)(a^2 + b^2)}{(4a^2 + 3b^2)(a^2 + b^2)} = \frac{b(3a^2 + 4b^2)}{a(3b^2 + 4a^2)} : \frac{3a^2 + 4b^2}{3b^2 + 4a^2} = \frac{b}{a}.$$

*Отв.* $\frac{b}{a}$.

**73.**

$$\left[\frac{\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{b^2} + \sqrt[4]{a^2}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right] : \left[\frac{\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a^2} - 1\right)}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a} + 1\right)}{\sqrt[3]{a} + 1}\right] =$$

$$= \left(\sqrt[4]{ab} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right) : \left[\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a} + 1\right) - \sqrt[3]{a^2}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{a^2b^2} + 1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}} : \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{ab}} : \sqrt[3]{a} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^7b^3}}.$$

*Отв.* $\frac{1}{\sqrt[12]{a^7b^3}}$.

**74.** *Отв.* 1.

**75.** 1-й способ решения. Представим данную дробь в виде

$$\frac{a^2 + 3}{(a^2 + 3)^2 + (a^2 + 3) - 1}.$$

Предположим, что числитель делится на целое число $k$. Знаменатель же не может делиться на $k$, так как два его слагаемых делятся на $k$, третье же — нет. Этим доказывается несократимость данной дроби.

2-й способ решения. Дробь $\frac{a^3 + 3}{a^4 + 7a^2 + 11}$ сократима или несократима одновременно с ее обратной величиной

$$\frac{a^4 + 7a^2 + 11}{a^2 + 3} = a^2 + \frac{4a^2 + 11}{a^2 + 3} = a^2 + \frac{4a^2 + 12 - 1}{a^2 + 3} = a^2 + 4 - \frac{1}{a^2 + 3}.$$

Таким образом, данная в условии дробь сократима или несократима одновременно с дробью $\frac{1}{a^2+3}$. Но последняя несократима ни при каком целом значении $a$.

**76.** Упростим выражение, стоящее в фигурных скобках:

$$\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-(1-a)}=\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+$$

$$+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})^2}{(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})}=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Теперь находим, что при $0<a<1$

$$\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=-\frac{(1+\sqrt{1-a^2})(1-\sqrt{1-a^2})}{a^2}=-1,$$

при $-1<a<0$

$$\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\cdot\left(-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}\right)=-\frac{(1+\sqrt{1-a^2})^2}{a^2}.$$

**77.** Переставим $\sqrt[3]{c}$ в правую часть равенства и обе части последнего возведем в куб, а потом сгруппируем все слагаемые:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c};\quad(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3=(-\sqrt[3]{c})^3;$$

$$a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b=-c;\quad a+b+c=-3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+$$

$$+\sqrt[3]{b})=3\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{c}=3\sqrt[3]{abc}.$$

Возводя обе части в куб, получаем $(a+b+c)^3=27abc$, что и требовалось доказать.

Примечание. Интересно отметить, если $a$, $b$, $c$ отличны от нуля, то (согласно данному условию) они не могут быть одновременно положительными или одновременно отрицательными. Но если они все положительные или все отрицательные и $a=b=c$, то $(a+b+c)^3=27abc$, поскольку $\frac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}$.

Таким образом, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$ есть достаточное условие, но не необходимое.

**78.** Преобразуем радикалы:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}};$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1,$$

откуда $\operatorname{arctg} 1=\alpha$.

*Ответ.* $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

**79.** Перепишем выражение без отрицательных показателей и упростим его:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-2}=\frac{(x+1)^{-2}}{x^{-2}}+\frac{(x-1)^{-2}}{x^{-2}}=\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2[(x-1)^2+(x+1)^2]}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{x^2(x^2-2x+1+x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x-1)^2}=$$

$$=2\frac{x^2(x^2+1)}{[(x+1)(x-1)]^2}=2\frac{x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}.$$

Подставляя

$$x=\sqrt{1-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}},$$

получим

$$2\frac{x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=2\frac{\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right)^2\left[\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right)^2+1\right]}{\left[\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right)^2-1\right]^2}=2\frac{\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{n-1}{n+1}+1\right)}{\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)^2}=$$

$$=2\frac{\frac{(n-1)(n-1+n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{(n-1-n-1)^2}{(n+1)^2}}=2\frac{(n-1)2n}{4}=2\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1).$$

*Ответ.* $n(n-1)$.

**80.**

$$x^{10}+x^5+1=(x^{10}+x^9+x^8)-(x^9+x^8+x^7)+(x^7+x^6+x^5)-$$

$$-(x^6+x^5+x^4)+(x^5+x^4+x^3)-(x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)=$$

$$=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

**81.** Подставим в выражение $x^3+ax+b$ значение $x$ и воспользуемся формулой $(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$:

$$-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}+3\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}\times$$

$$\times\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}\cdot x-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}+ax+b=-b+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\cdot x+ax+b=$$

$$=-3\sqrt[3]{\frac{a^3}{27}}\cdot x+ax=-ax+ax=0.$$

Примечание. $x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$ есть формула решения кубического уравнения $x^3+ax+b=0$, к которому можно привести всякое кубическое уравнение $y^3+qy^2+ry+s=0$ подстановкой $y=x-\frac{q}{3}$. Поскольку кубический корень из числа имеет три значения, то из девяти возможных пар значений этих корней необходимо выбрать три пары так, чтобы произведение каждой пары было равно $-\frac{a}{3}$.

*Отв.* 0.

**82.** Используя формулу бинома Ньютона, находим

$$A=(1+\sqrt{a})^5=1+5\sqrt{a}+10a+10a\sqrt{a}+5a^2+a^2\sqrt{a};$$

$$B=(1-\sqrt{a})^5=1-5\sqrt{a}+10a-10a\sqrt{a}+5a^2-a^2\sqrt{a},$$

откуда

$$\frac{1}{2}(A+B)=1+10a+5a^2.$$

Так как

$$C=(a\sqrt{5}-1)^2=1-2a\sqrt{5}+5a^2,$$

то

$$\frac{1}{2}(A+B)-C=10a+2a\sqrt{5}=2a(5+\sqrt{5})$$

и, наконец,

$$\frac{\frac{1}{2}(A+B)-C}{2a}=\frac{2a(5+\sqrt{5})}{2a}=5+\sqrt{5}.$$

*Отв.* $5+\sqrt{5}$.

**83.** Положим, что $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=x$. Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$x^2=\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2=2A+2\sqrt{A^2-B},$$

откуда

$$x=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Аналогично находим, что

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Сложим эти равенства

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Вычтем из первого равенства второе

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}};$$

$$A\geqslant\sqrt{B};\quad B\geqslant 0.$$

84. $(x^4-9)+5x(x^2+3)=(x^2-3)(x^2+3)+5x(x^2+3)=$

$$=(x^2+3)(x^2+5x-3).$$

85. $a^k-1=(a-1)\underbrace{(a^{k-1}+a^{k-2}+\ldots+a+a^0)}_{k\text{ слагаемых}}=$

$$=(a-1)[(a^{k-1}-1)+(a^{k-2}-1)+\ldots+(a-1)+k]=$$

$$=(a-1)[(a-1)(a^{k-2}+a^{k-3}+\ldots+1)+(a-1)(a^{k-3}+a^{k-4}+$$

$$+\ldots+1)+\ldots+(a-1)+k].$$

Так как $a-1$ делится на $k^m$, то каждое из слагаемых, стоящих в квадратных скобках, включая и $k$, наверно делится на $k$.

Следовательно, правая часть равенства, а одновременно и $a^k-1$, делится на $k^{m+1}$.

86.

$$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-1)(n^2-4)=$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Произведение любых пяти последовательных целых чисел всегда делится на 4 и 5, т. е. на 120 (см. указание к примеру 69).

87. 1-й способ доказательства. Преобразуем левую часть тождества. Для этого раскроем скобки и сгруппируем все члены:

$$[(a+b)+c]^3-a^3-b^3-c^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+$$

$$+c^3-(a^3+b^3)-c^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2-$$

$$-(a+b)(a^2+b^2-ab)=(a+b)[(a+b)^2+3(a+b)c+3c^2-a^2-$$

$$-b^2+ab]=(a+b)(a^2+2ab+b^2+3ac+3bc+3c^2-a^2-b^2+$$

$$+ab)=(a+b)(3ab+3ac+3bc+3c^2)=(a+b)3[a(b+c)+$$

$$+c(b+c)]=3a(a+b)(a+c)(b+c).$$

2-й способ доказательства.

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)=$$
$$=(a+b+c-a)[(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2]-(b+c)(b^2-$$
$$-bc+c^2)=(b+c)(a^2+2ab+b^2+2ac+c^2+2bc+a^2+ab+ac+$$
$$+a^2-b^2+bc-c^2)=3(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=$$
$$=3(a+b)(a+c)(b+c).$$

88. Числитель уменьшаемого равен

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{x})^2}-\frac{\sqrt[3]{ax}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}.$$

*Отв.* $\sqrt[6]{a}$.

89. 1-й способ доказательства. После раскрытия квадратных и круглых скобок в левой части доказываемого тождества все слагаемые, кроме $6xyz$, будут повторяться дважды с положительным знаком и дважды с отрицательным и поэтому взаимно уничтожаться. Останутся лишь четыре слагаемых вида $6\,xyz$, взятых с положительным знаком, т. е. $24\,xyz$.

2-й способ доказательства. Положим $x+y-z=a$; $x+z-y=b$; $y+z-x=c$, тогда $x+y+z=a+b+c$. Левая часть доказываемого тождества примет вид

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$

Воспользовавшись тождеством в примере 87, сразу получим требуемый результат.

**90.** $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Числа $(p-1)$ и $(p+1)$ четные, поскольку число $p$ — нечетное. Из двух последовательных четных чисел одно делится на 2, другое — на 4, поэтому $(p^2-1)$ делится на 8. Кроме того, $(p-1)$ или $(p+1)$ делится на 3, так как эти числа вместе с $p$ составляют три последовательных целых числа, а $p$ на 3 по условию не делится. Отсюда следует, что $p^2-1$ делится на 24.

## Уравнения и системы уравнений 1-й степени

**91.** Дробь $\frac{6b+7a}{6b}$ представим в виде $1+\frac{7}{6}\cdot\frac{a}{b}$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{a(b-3a)}{2b^2(b-a)}\,y=\frac{7}{6}\cdot\frac{a}{b},$$

откуда

$$y=\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}.$$

*Отв.* $y=\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$.

Примечание. Данное уравнение теряет смысл при $b = 0$ и при $b - a = 0$, так как в этих случаях знаменатели его членов обращаются в нули. При $a = 0$ данное уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как принимает вид $1 = 1$ и становится тождеством. Наконец, при $b = 3a$ данное уравнение не имеет решений, поскольку оно приводится к виду $0 \cdot y = \frac{7}{18}$.

**92.** После упрощения выражения в квадратных скобках имеем

$$2x(3x-2) - \frac{12x^2 - 9x - 21}{2} = 13,$$

откуда

$$x = 5.$$

*Отв.* $x = 5$.

**93.** Решая данное уравнение по общему способу, находим

$$x = \frac{3abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{ab + bc + ca}.$$

Разложив числитель на множители (выражение $3abc$ представим в виде трехчлена $abc + abc + abc$ и каждый из последующих членов сгруппируем с $abc$), получим $x = a + b + c$.

Решение упрощается с помощью следующего приема. Слагаемое $\frac{x-a-b}{c}$ представляем в виде $\frac{x-(a+b+c)}{c} + 1$. Аналогично преобразовываем два других слагаемых левой части. Уравнение принимает вид

$$[x - (a+b+c)]\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0.$$

*Отв.* $x = a + b + c$.

**94.** Переносим члены с $x$ в левую часть уравнения, а известные — в правую, и каждую часть отдельно приводим к общему знаменателю:

$$\frac{(3ab+1)(a+1)^2 - (2a+1)}{a(a+1)^2}\,x = \frac{3ab(a+1)^2 + a^2}{(a+1)^3},$$

или

$$\frac{3ab(a+1)^2 + a^2 + 2a + 1 - 2a - 1}{a(a+1)^2}\,x = \frac{a[3b(a+1)^2 + a]}{(a+1)^3}.$$

После сокращения находим, что $x = \frac{a}{a+1}$.

*Отв.* $x = \frac{a}{a+1}$.

**95.** Для решения данной системы введем обозначения:

$$\frac{1}{x+y} = u; \quad \frac{1}{x-y} = v. \tag{1}$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u+v=2; \\ 3u+4v=7. \end{cases}$$

Подставляя значение $x$ и $v$ во второе уравнение, получим

$$v=1; \quad u=1.$$

Таким образом, из (1) следует

$$\begin{cases} x+y=1; \\ x-y=1. \end{cases}$$

Отсюда $x=1$; $y=0$.

*Отв.* $x=1$; $y=0$.

**96.** После простых преобразований имеем

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b};$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c},$$

откуда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right);$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

*Отв.* $x=\dfrac{2abc}{bc+ac-ab}$; $y=\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$; $z=\dfrac{2abc}{ac+ab-bc}$.

**97.** Преобразуем первое уравнение:

$$\frac{x}{y}=\frac{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}; \quad \frac{x}{y}=\frac{\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}}{\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}};$$

$$\frac{x}{y}=\frac{(a^2+ab+b^2)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)},$$

откуда

$$\frac{x}{y}=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}. \qquad (1)$$

Определим из второго уравнения системы значение $x$ и подставим его в уравнение (1):

$$x = 2a^3 - y;$$

$$\frac{2a^3 - y}{y} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}; \quad \frac{2a^3}{y} = \frac{2a^3}{a^3 + b^3};$$

$$y = a^3 + b^3.$$

Тогда

$$x = 2a^3 - y = 2a^3 - b^3 - a^3 = a^3 - b^3.$$

*Отв.* $x = a^3 - b^3$; $y = a^3 + b^3$.

98. Из первого уравнения находим, что $bx - y = a - 1$. Применив ко второму уравнению производную пропорцию, получим

$$\frac{2x}{2y} = \frac{2a}{2b}; \quad bx - ay = 0.$$

Таким образом, имеем систему:

$$bx - ay = 0;$$

$$bx - y = a - 1.$$

Отсюда $x = \frac{a}{b}$, $y = 1$.

Подставляя полученные значения $x$ и $y$ в исходную систему уравнений, убеждаемся в том, что они являются решениями этой системы.

Таким образом, данная система уравнений имеет единственное решение при любой паре значений параметров $a$ и $b$, которые удовлетворяют условию $b \neq 0$ и $a - b \neq 0$.

*Отв.* $x = \frac{a}{b}$; $y = 1$.

**99.** *Отв.* $x = 1$; $y = 2$; $z = -2$.

**100.** *Отв.* $x = -(a + b + c)$; $y = ab + bc + ca$; $z = -abc$.

**101.** *Отв.* $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$.

**102.** Исключим сначала $k$. Для этого второе уравнение умножим на 2 и прибавим к первому, третье уравнение умножим на (—2) и прибавим ко второму, третье уравнение умножим на (—3) и прибавим к четвертому. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 4y + 13z = 36; \\ -4x - 11y + 9z = 1; \\ -5x - 13y + 12z = 5. \end{cases}$$

Из этой системы исключим $x$. Предварительно вычтем из второго уравнения третье:

$$\begin{cases} 5x - 4y + 13z = 36; \\ x + 2y - 3z = -4; \\ -5x - 13y + 12z = 5. \end{cases}$$

Складываем первое и третье уравнения, затем второе уравнение умножаем на 5 и складываем с третьим. Получаем

$$\begin{cases} -17y + 25z = 41; \\ -3y - 3z = -15, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -17y + 25z = 41; \\ y + z = 5. \end{cases}$$

Отсюда находим $z = 3$ и $y = 2$. Из второго уравнения находим $x$, а из третьего заданной системы $k$.

*Отв.* $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$; $k = 4$.

**103.** *Отв.* $x = -1$; $y = -1$; $z = 0$; $u = 1$.

**104.** Указание. Обозначим $\frac{x_1 - a_1}{m_1} = \frac{x_2 - a_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{m_n} = A$,

тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + m_1 A; \\ x_2 &= a_2 + m_2 A; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_n + m_n A. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения во второе уравнение, получим

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + A(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = a,$$

откуда

$$A = \frac{a + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Если известно $A$, то легко найти значения $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

**105.** Указание. Сложим все левые и все правые части уравнений:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0.$$

Теперь сложим первое, четвертое и седьмое уравнения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_1 = 1,$$

откуда $x_1 = 1$.

Сложим второе, пятое и восьмое уравнения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_2 = 2,$$

откуда $x_2 = 2$.

Зная значения $x_1$ и $x_2$, легко вычислить оставшиеся неизвестные.

*Отв.* $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = -4$; $x_6 = -3$; $x_7 = -2$; $x_8 = -1$.

**106.** Решая данную систему относительно $x$ и $y$, находим, что

$$x = \frac{3k+8}{k^2+6}; \quad y = \frac{4k-9}{k^2+6}.$$

Выражение $k^2 + 6 > 0$ при любых действительных значениях $k$. Следовательно, $x$ будет положительным, если $3k + 8 > 0$, а $y$ будет отрицательным, когда $4k - 9 < 0$.

Таким образом, значения $k$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$k > -\frac{8}{3}; \quad k < \frac{9}{4} \text{ или } -\frac{8}{3} < k < \frac{9}{4}.$$

*Отв.* $-2$; $-1$; 0; 1; 2.

**107.** Обозначим через $x$ число крупных отливок, тогда средних отливок будет $(x - 4)$, а мелких $x + (x - 4) + 10$, т. е. $2x + 6$. Всего же отливок $x + (x - 4) + (2x + 6)$, т. е. $4x + 2$.

По условию задачи всех отливок было $90 : 4x + 2 = 90$, отсюда $x = 22$.

*Отв.* Крупных отливок 22, средних 18, мелких 50.

**108.** Предположим, что один из рабочих может выполнить работу за $x$ дней, а другой — за $y$ дней. Следовательно, за один день каждый из них выполнял часть работы, равную соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$, а если бы они работали вместе, то выполнили бы $\frac{1}{12}$ часть:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}.$$

За 8 дней они выполнили $\frac{2}{3}$ всей работы, после чего второй рабочий работал еще 5 дней, чтобы закончить ее. Составляем второе уравнение:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{y} = 1.$$

Решая систему уравнений, находим, что $x = 60$; $y = 15$.

*Отв.* $x = 60$; $y = 15$.

**109.** Обозначим первую часть числа через $x$; тогда вторая часть равна $(18\,000 - x)$. По условию 4% от первой части плюс 6% от второй равно 5,5% от всего числа:

$$0{,}04x + 0{,}06\,(18\,000 - x) = 0{,}055 \cdot 18\,000.$$

Решая это уравнение, находим, что $x = 4500$.

*Отв.* 4500; 13 500.

**110.** *Отв.* $a = 3$; $b = -5$.

**111.** Обозначим через $x$ вес железа и через $y$ вес чугуна. Очевидно, что $x + y = 100$.

С другой стороны, вес кремния в железе будет 0,02 $x$, а вес кремния в чугуне 0,06$y$. Что же касается веса кремния в 100 *кг* смеси, то он будет равен 3,2 *кг*. Это дает нам второе уравнение

$$0{,}02x + 0{,}06y = 3{,}2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 100; \\ 0{,}02x + 0{,}06y = 3{,}2, \end{cases}$$

находим $x = 70$; $y = 30$.

*Отв.* Железа 70 *кг*, чугуна 30 *кг*.

**112.** У к а з а н и е. Если цифру десятков обозначим через $x$, а цифру единиц через $y$ и примем во внимание, что $0 < x < 10$ и $0 < y < 10$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{10x + y}{xy} = 2\dfrac{2}{3}; \\ (10x + y) - (10y + x) = 18. \end{cases}$$

*Отв.* 64.

**113.** Пусть $x$ *кг* — вес меди в 24 *кг* сплава. Тогда $24 - x$ есть вес цинка. Потеря веса составляет $\frac{1}{9}x$ (для меди) и $\frac{1}{7}(24 - x)$ (для цинка). Следовательно, $\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}(24 - x) = 2\frac{8}{9}$. Отсюда $x = 17$.

*Отв.* 17 *кг* меди; 7 *кг* цинка.

**114.** Пусть первого сплава взяли $x$ *кг*, а второго $y$ *кг*. Тогда $x + y = 8$. На $x$ *кг* в первом сплаве приходится золота $\frac{2x}{5}$ *кг*, а серебра $\frac{3x}{5}$ *кг*. На $y$ *кг* во втором сплаве приходится золота $\frac{3y}{10}$ *кг*, а серебра $\frac{7y}{10}$ *кг*. На основании этого получаем второе уравнение

$$\frac{\frac{2x}{5} + \frac{3y}{10}}{\frac{3x}{5} + \frac{7y}{10}} = \frac{5}{11} \quad \text{или} \quad 7x - y = 0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 8; \\ 7x - y = 0, \end{cases}$$

находим, что $x = 1$, а $y = 7$.

*Отв.* Золота 1 *кг*, серебра 7 *кг*.

**115.** Пусть сплав содержит $x$ *кг* серебра и $y$ *кг* меди. Сплавив его с 3 *кг* чистого серебра, имеем

$$\frac{x + 3}{x + y + 3} = 0{,}900,$$

где $(x+3)$ — вес серебра, а $(x+y+3)$ — общий вес, или

$$9y-x=3.$$

Сплавив его с 2 *кг* сплава 900-й пробы, получим чистого серебра $(2\cdot 0{,}900+x)$; общий вес $(x+y+2)$, поэтому

$$\frac{x+1{,}8}{x+y+2}=0{,}840, \quad \text{или} \quad 21y-4x=3.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 9y-x=3; \\ 21y-4x=3, \end{cases}$$

получим $x=2{,}4$ *кг*; $y=0{,}6$ *кг*. Отсюда вес сплава $x+y=3$ *кг*, проба его равна $\frac{2{,}4}{3}\cdot 100=800$.

*Отв.* 3 *кг*; 800.

**116.** Количество рельсов длиной 25 *м* обозначим через $x$, а рельсов длиной 12,5 *м* — через $y$. На участке 20 *км* = 20 000 *м* нужно уложить 40 000 *м* рельсов (две линии). По условию имеем

$$25x+0{,}50\cdot 12{,}5y=40\,000 \text{ и } 12{,}5y+\frac{66\frac{2}{3}}{100}25x=40\,000.$$

*Отв.* 1200 рельсов по 25 *м* и 1600 рельсов по 12,5 *м*.

**117.** Пусть расстояние между станциями $A$ и $B$ будет равно $x$ *км*. Первый поезд до встречи со вторым двигался $\left[\frac{2x}{3\cdot 30}+\left(\frac{x}{3}-8\right)\frac{1}{15}\right]$ *ч*. Второй поезд до встречи с первым двигался $\frac{x-8}{40}$ *ч*. Второй поезд выехал позже первого на $\left(\frac{x}{45}+\frac{x-24}{45}-\frac{x-8}{40}\right)$ *ч*.

С другой стороны, поскольку поезда должны были прибыть на станцию $B$ одновременно, то, очевидно, второй поезд вышел позже первого на $\left(\frac{x}{30}-\frac{x}{40}\right)$ *ч*.

Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{2x-24}{45}-\frac{x-8}{40}=\frac{x}{30}-\frac{x}{40},$$

откуда $x=30$.

*Отв.* Расстояние между станциями $A$ и $B$ равно 30 *км*.

**118.** 1-й способ решения. Обозначим время работы последнего рабочего, выраженное в часах, через $x$, время работы предпоследнего через $x+y$, а число рабочих через $z$. На выполнение работы всего было затрачено $x+x+y+x+2y+\ldots+x+(z-1)y=xz+y(1+2+\ldots+z-1)=xz+y\frac{z(z-1)}{2}$ человеко-часов.

По условию задачи

$$xz+y\frac{z(z-1)}{2}=24z, \quad \text{или} \quad 2x+y(z-1)=48. \qquad (1)$$

Но первый рабочий работал в пять раз больше последнего. Поэтому $x+(z-1)y=5x$. Подставляя $(z-1)y$, выраженное через $x$, в уравнение (1), найдем $6x=48$, т. е. $x=8$. Следовательно, рабочие рыли канаву 40 *ч*.

Примечание 1. Очевидно, что число рабочих будет неопределенным, так как неизвестные $y$ и $z$ связаны лишь одним уравнением

$$(z-1)y=32.$$

Примечание 2. Чтобы вычислить сумму $n$ чисел натурального ряда $1+2+\ldots+n$, можно не пользоваться общей формулой суммы $n$ членов арифметической прогрессии.

Составим прямоугольную таблицу:

$n$ столбцов

$(n+1)$ строк

111 ... 111
111 ... 110
111 .... 100
111 ... 000
. . . . . .
110 ... 000
100 ... 000
000 ... 000,

в которой $n$ столбцов и $(n+1)$ строк. Искомая сумма будет равняться количеству единиц в таблице. Их будет столько, сколько в ней нулей. Общее количество цифр в таблице составляет $n(n+1)$, следовательно, искомая сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

2-й способ решения. Пусть $x$ *ч* — продолжительность последнего промежутка времени, в течение которого работали все рабочие и выполнили $\frac{x}{24}$ часть работы. До последнего промежутка времени была сделана, следовательно, $\left(1-\frac{x}{24}\right)$ часть работы.

Предположим, что в первый промежуток времени работали все рабочие, кроме одного, во второй — все рабочие, кроме двух, и т. д., а в предпоследний — один рабочий. В последний промежуток не работал никто. Суммируя всю работу, выполненную рабочими в первом (фактическом) и во втором (предполагаемом) случаях, найдем, что всеми рабочими при одновременной совместной работе за все время, не считая последнего промежутка, была бы выполнена $2\left(1-\frac{x}{24}\right)$ часть работы за 4 $x$ *ч* (последний промежуток времени в 4 ра-

за меньше всех предшествующих); поэтому все рабочие в течение 1 *ч* могут выполнить $\frac{2\left(1-\frac{x}{24}\right)}{4x}$ часть работы. По условию задачи они выполняют за 1 *ч* $\frac{1}{24}$ часть. Отсюда следует уравнение

$$\frac{2\left(1-\frac{x}{24}\right)}{4x}=\frac{1}{24},$$

или

$$24-x=2x,$$

откуда $x=8$.

*Отв.* 40 *ч.*

**119.** Обозначим искомое расстояние, которое пролетел самолет, через $x$ *км*. Со скоростью 220 *км/ч* он пролетел часть пути, равную $\frac{x+385}{2}$ *км*, затратив на нее $\frac{x+385}{2}:220$ *ч*. Остальную часть пути, а именно $\frac{x-385}{2}$ *км*, он пролетел со скоростью 330 *км/ч*, затратив на нее $\frac{x-385}{2}:330$ *ч*. Учитывая, что средняя скорость на всем пути равна 250 *км/ч*, можем подсчитать все время полета. Оно равно $\frac{x}{250}$ *ч*. Отсюда получаем $\frac{x+385}{2}:220+\frac{x-385}{2}:330=\frac{x}{250}$. Решив уравнение, найдем, что $x=1375$.

*Отв.* 1375 *км.*

**120.** Обозначим расстояние от колхоза до автостанции через $x$ *км*. Если бы колхозник шел все время со скоростью 3 *км/ч*, то он потратил бы на путь $\frac{x}{3}$ *ч*, что на $\frac{2}{3}$ *ч* больше, чем было в его распоряжении. Таким образом, чтобы успеть точно к отходу автобуса, он должен был находиться в пути $\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)$ *ч*. В действительности же он лишь первый час шел со скоростью 3 *км/ч*, а затем со скоростью 4 *км/ч*, что в общем составило $\left(1+\frac{x-3}{4}\right)$ *ч*. Так как он пришел за $\frac{3}{4}$ *ч* до отхода автобуса, то отсюда получаем уравнение

$$\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4};\quad x=20.$$

*Отв.* 20 *км.*

**121.** Предположим, что через первый кран вода вытекает за $x$ *ч*, а через второй кран — за $y$ *ч*. Тогда $\frac{1}{x}$ — пропускная способ-

ность первого крана в час, а $\frac{1}{y}$ — второго крана. Согласно условию задачи, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)a+\frac{1}{x}b=1; \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)a+\frac{1}{y}c=1, \end{cases}$$

отсюда находим, что $x=\frac{ab+ac+bc}{c}$; $y=\frac{ab+ac+bc}{b}$.

*Отв.* $x=\frac{ab+ac+bc}{c}$ *ч*; $y=\frac{ab+ac+bc}{b}$ *ч*.

**122.** *Отв.* В первом сосуде 10 $a$ *л*, а во втором $\frac{5}{4}a$ *л*.

**123.** *Отв.* 176 человек.

**124.** Предположим, что пункт $A$ расположен слева от пункта $B$. Пусть скорость первого туриста, находящегося в пункте $A$, будет $x$ *км/ч*, тогда скорость второго, отправляющегося из пункта $B$, будет $\frac{a-cx}{c}$ *км/ч*.

Так как при движении в одном направлении они встретились через $b$ *ч*, то первый за это время прошел $bx$ *км*, второй $\frac{b(a-cx)}{c}$ *км*, причем разность между пройденными ими расстояниями равна $a$ *км*. Отсюда следует уравнение

$$bx-\frac{b(a-cx)}{c}=a.$$

Решая его, найдем, что $x=\frac{a(b+c)}{2bc}$.

Таким образом, скорость первого туриста $v_1=\frac{a(b+c)}{2bc}$ *км/ч*, скорость второго $v_2=\frac{a(b-c)}{2bc}$ *км/ч*.

Числа $a$, $b$, $c$ — положительные. Задача имеет решение при $b>c$, что очевидно из условия. Если $b=c$, то $v_1=\frac{a}{c}$ *км/ч* и $v_2=0$, т. е. второй турист находился бы все время в пункте $B$, а первый пришел бы в пункт $B$ за $b=c$ *ч*. Случай движения туристов влево от пункта $A$ дает тот же результат, только в данном случае $v_2$ будет скорость первого туриста, $v_1$ — скорость второго.

*Отв.* $\frac{a(b+c)}{2bc}$; $\frac{a(b-c)}{2bc}$.

**125.** Если длина листа $x$ *см*, а ширина $y$ *см*, то коробка будет иметь длину $(x-8)$ *см*, ширину $(y-8)$ *см* и высоту 4 *см*. По условию $4(x-8)(y-8)=768$ и $2x+2y=96$.

*Отв.* Размеры листа 32 *см* × 16 *см*.

**126.** Пусть большее число есть $x$, а меньшее $y$. Если к большему числу приписать три цифры (нуль и две цифры меньшего числа), то оно будет выражать число тысяч, так что в итоге получим $1000x + y$. Аналогично из меньшего числа получим $1000y + 10x$. По условию

$$1000x + y = 2(1000y + 10x) + 590 \text{ и } 2x + 3y = 72.$$

Решая систему, находим $x = 21$, $y = 10$.

*Отв.* 21 и 10.

**127.** Обозначим через $x$ расстояние между городами. Тогда время, затраченное на поездку из одного города в другой, будет $\frac{x}{a}$ *ч*. Назад мотоциклист возвращался со скоростью $(a + b)$ *км/ч*. Время, затраченное мотоциклистом на возвращение, будет $\frac{x}{a+b}$ *ч*. По условию задачи известно, что мотоциклист затратил на возвращение на $c$ *ч* меньше, следовательно,

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{a+b} = c; \quad ax + bx - ax = ac(a + b); \quad bx = ac(a + b);$$

$$x = \frac{ac}{b}(a + b).$$

*Отв.* $x = \frac{ac}{b}(a + b)$ *км*.

**128.** Пусть $x$ *км* будет расстояние между двумя городами. В первый день машина прошла $\frac{3}{8}x$ *км*, за второй день $\frac{5}{12}x$ *км*, а за третий день $\left(\frac{1}{6}x + 40\right)$ *км*.

Имеем

$$\frac{3}{8}x + \frac{5}{12}x + \frac{1}{6}x + 40 = x,$$

откуда $x = 960$.

*Отв.* 960 *км*.

**129.** Пусть первый бульдозер, работая отдельно, расчистит весь участок за $x$ *ч*, второй — за $y$ *ч*; если принять всю работу за единицу, то за 1 *ч* первый делает $\frac{1}{x}$, а второй $\frac{1}{y}$ часть работы. По условию первый работал $\frac{2y}{5}$ *ч* и за это время сделал $\frac{1}{x} \cdot \frac{2y}{5}$, или $\frac{2y}{5x}$ работы; оставшуюся работу, т. е.

$$1 - \frac{2y}{5x} = \frac{5x - 2y}{5x},$$

они закончили вместе.

Найдем время, затраченное обоими бульдозерами, чтобы закончить работу; за 1 *ч* они делают

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy} \text{ работы,}$$

поэтому $\frac{5x-2y}{5x}$ работы они сделают за

$$\frac{5x-2y}{5x}:\frac{x+y}{xy}, \text{ или } \frac{y(5x-2y)}{5(x+y)}\ ч.$$

Отсюда заключаем, что фактически они работали

$$\frac{2y}{5}+\frac{y(5x-2y)}{5(x+y)}\ ч.$$

Если бы бульдозеры все время работали вместе, то, делая за один час $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, или $\frac{x+y}{xy}$ работы, они выполнили бы ее за

$$1:\frac{x+y}{xy}, \text{ или } \frac{xy}{x+y}\ ч.$$

По условию разность времени работы равна $\frac{9}{4}$ *ч*, значит

$$\frac{2y}{5}+\frac{y(5x-2y)}{5(x+y)}-\frac{xy}{x+y}=\frac{9}{4}.$$

Кроме того, первый бульдозер за $\frac{xy}{x+y}$ *ч* сделает $\frac{1}{x}\cdot\frac{xy}{x+y}$, или $\frac{y}{x+y}$ работы, а второй фактически за $\frac{y(5x-2y)}{5(x+y)}$ *ч* сделал $\frac{1}{y}\cdot\frac{y(5x-2y)}{5(x+y)}$, или $\frac{5x-2y}{5(x+y)}$ работы, откуда по условию задачи

$$\frac{y}{x+y}=\frac{5x-2y}{5(x+y)}\cdot 5.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2y}{5}+\dfrac{y(5x-2y)}{5(x+y)}-\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{9}{4};\\[2ex] \dfrac{y}{x+y}=\dfrac{5x-2y}{x+y}.\end{cases}$$

После упрощения получим

$$\begin{cases}8xy-45x-45y=0;\\ 5x=3y,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\dfrac{45}{x}+\dfrac{45}{y}=8;\\[2ex] \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{y}.\end{cases}$$

Отсюда находим две системы значений $x$ и $y$:

$$x_1=0;\quad y_1=0;\quad x_2=9;\quad y_2=15.$$

Тривиальное решение (0,0) по смыслу задачи непригодно.
*Отв.* 9 *ч*; 15 *ч*.

**130.** Обозначим число кубических метров дров, которое предполагала заготовить за день первая бригада, через $x$, а вторая — через $y$.

Обе бригады за день могли заготовить $(x + y)м^3$ дров, а за 40 дней $40(x + y)м^3$; следовательно,

$$40(x + y) = 22\,400. \qquad (1)$$

За 10 дней совместной работы обе бригады заготовили $10(x+y)$ $м^3$ дров; после этого первая бригада заготовляла за день $\left(\frac{13}{10}x\right)$ $м^3$, а вторая $\left(\frac{29}{25}y\right)$ $м^3$; вместе они заготовляли за день $\left(\frac{13}{10}x + \frac{29}{25}y\right)$ $м^3$, а за 24 дня заготовили $24\left(\frac{13}{10}x + \frac{29}{25}y\right)$ $м^3$. Сложив количества дров, заготовленных за первые 10 дней и последующие 24 дня, получим

$$10(x + y) + 24\left(\frac{13}{10}x + \frac{29}{25}y\right) = 22\,400. \qquad (2)$$

После преобразования уравнения (1) получим $y = 560 - x$, а после преобразования уравнения (2) будем иметь $65x + 58y = 35\,000$. Сделав соответствующую подстановку, находим $x = 360$; $y = 200$.

*Отв.* 360 $м^3$, 200 $м^3$.

**131.** Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за $x$ дней, второй — за $y$ дней. Тогда производительность за день первого рабочего будет $\frac{1}{x}$, второго $\frac{1}{y}$, а третьего $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{x+y}{2xy}$ части работы за день.

Исходя из условия задачи, можно составить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a(x+y)}{2xy} + \frac{b}{x} = 1; \\ \frac{a(x+y)}{2xy} + \frac{c}{y} = 1. \end{cases}$$

Отсюда получим, что $\frac{b}{x} = \frac{c}{y}$, или $x = \frac{by}{c}$.

Подставим найденное значение $x$ в первое уравнение:

$$\frac{a\left(\frac{by}{c} + y\right)}{2y \cdot \frac{by}{c}} + \frac{c}{y} = 1; \quad y = \frac{ab + ac + 2bc}{2b}.$$

Аналогично найдем

$$x = \frac{ab + ac + 2bc}{2c}.$$

Производительность третьего рабочего за день равна $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{b+c}{ab+ac+2bc}$ части всей работы.

Третий рабочий сможет выполнить всю работу за $\frac{ab+ac+2bc}{b+c}$ дней.

*Отв.* $\frac{ab+ac+2bc}{2c}$; $\frac{ab+ac+2bc}{2b}$; $\frac{ab+ac+2bc}{b+c}$.

**132.** Длину обода переднего колеса обозначим через $x$ *м*, тогда длина обода заднего колеса будет $(x+a)$ *м*. Переднее колесо на расстоянии $b$ *м* сделает $\frac{b}{x}$ оборотов, а заднее колесо на расстоянии $c$ *м* сделает $\frac{c}{x+a}$ оборотов.

Имеем

$$\frac{b}{x}=\frac{c}{x+a},$$

откуда

$$b(x+a)-cx=0;\quad bx+ab-cx=0;\quad x(c-b)=ab;$$

$$x=\frac{ab}{c-b}\ м;\quad c>b>0.$$

Длина обода заднего колеса будет $a+\frac{ab}{c-b}=\frac{ac}{c-b}$ *м*.

*Отв.* Длина обода переднего колеса $\frac{ab}{c-b}$ *м*, а длина обода заднего колеса $\frac{ac}{c-b}$ *м*.

**133.** Пусть в первой кучке было вначале $x_1$ руб. Из нее переложили во вторую $\frac{x_1}{n}$ руб. Из последней кучки переложили в первую $\frac{N}{n-1}$ руб., ибо после уменьшения денег последней кучки на $\frac{1}{n}$ часть в ней еще осталось таких частей $n-1$, т. е. $\frac{1}{n}$ часть денег, забранных из последней кучки, составляла $\frac{N}{n-1}$ руб. Поэтому можно составить такое уравнение:

$$x_1-\frac{x_1}{n}+\frac{N}{n-1}=N.$$

Отсюда найдем, что

$$x_1=\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}N.$$

Рассуждая совершенно аналогично предыдущему, можно определить сумму денег, бывших вначале во второй кучке, которые мы обозначим через $x_2$,

$$x_2+\frac{(n-2)N}{(n-1)^2}-\frac{N}{n-1}=N;\quad x_2=\frac{n^2-2n+2}{(n-1)^2}N.$$

Что касается остальных кучек, то, повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что из каждой из них забирали $\frac{N}{n-1}$ руб. и вкладывали в то же время такую же сумму $\frac{N}{n-1}$ руб.

Таким образом, общая сумма денег в каждой из последующих кучек, начиная с третьей, не менялась, т. е. все время была равна $N$. Следовательно, $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = N$, где $x_3, \ldots, x_n$ — начальная сумма денег соответственно в третьей, четвертой и т. д. кучках.

*Отв.* $x_1 = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} N$; $x_2 = \frac{n^2-2n+2}{(n-1)^2}$;

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_n = N.$$

**134.** Обозначим скорость более медленно двигающегося автомобиля через $x$ *км/ч*. Тогда скорость второго будет $2x$ *км/ч*. Пусть через $t$ часов они встречаются в городе $C$. Один из них пройдет $2xt$ *км*, другой $xt$ *км*. Следовательно,

$$2xt - xt = a \quad \text{или} \quad xt = a.$$

Время, прошедшее с момента выезда первого автомобиля из города $C$ до второй встречи, равняется $\frac{xt \pm c}{x}$ *ч*, а время, прошедшее с момента выезда второго автомобиля из $C$ до той же встречи, будет $\frac{xt \pm c}{2x}$ *ч*. Отсюда получаем второе уравнение

$$\frac{xt \pm c}{x} = \frac{xt \pm c}{2x} + b.$$

Решая систему, будем иметь

$$x = \frac{a \pm c}{2b}; \quad t = \frac{2ab}{a \pm c}.$$

Разобрать случаи, когда $c = 0$; $c = a$; $c > a$.

*Отв.* $\frac{a \pm c}{2b}$; $\frac{a \pm c}{b}$; $\frac{2ab}{a \pm c}$.

**135.** Допустим, что первый кусок латуни весит $x$ *кг*; тогда второй весит $(a - x)$ *кг*.

В первом куске чистой меди будет $\frac{px}{100}$ *кг*, а во втором $\frac{(a-x)q}{100}$ *кг*. По условию задачи в первом куске на $b$ *кг* чистой меди больше, следовательно, можем составить уравнение

$$\frac{px}{100} = \frac{(a-x)q}{100} + b.$$

Решая это уравнение, находим

$$x = \frac{aq + 100b}{p + q}.$$

**136.** Пусть рабочий сделал $x$ деталей за $y$ дней. Тогда ежедневно он изготовлял $\frac{x}{y}$ деталей. Если бы он ежедневно изготовлял $\frac{x}{y}+10$ деталей, то по условию задачи он выполнил бы работу за $y-4\frac{1}{2}$ дня. Значит,

$$\left(\frac{x}{y}+10\right)\left(y-4\frac{1}{2}\right)=x.$$

Второе условие дает уравнение

$$\left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3)=x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 10y-4\frac{1}{2}\frac{x}{y}=45; \\ -5y+3\frac{x}{y}=15. \end{cases}$$

Умножаем второе уравнение на 2 и складываем с первым; получим $\frac{x}{y}=50$. Подставляя это значение во второе уравнение, находим $y=27$.

*Отв.* Рабочий сделал 1350 деталей за 27 дней.

**137.** Обозначим скорость лодки в стоячей воде через $x$ *км/ч*, а скорость течения реки через $y$ *км/ч*. Тогда скорость лодки по течению реки будет $(x+y)$, а скорость лодки против течения будет равна $(x-y)$.

Расстояние от $A$ до $B$ по течению реки лодочник проехал за $\frac{21}{x+y}$ *ч*, а расстояние от $B$ до $A$ за $\frac{21}{x-y}$ *ч*, следовательно,

$$\frac{21}{x-y}-\frac{21}{x+y}=6\frac{2}{3}. \qquad (1)$$

По течению реки за 3 *ч* лодочник проехал $3(x+y)$ *км*, а против течения за 7*ч* $7(x-y)$ *км*. Таким образом, имеем второе уравнение

$$3(x+y)=7(x-y). \qquad (2)$$

Решаем полученную систему уравнений (1) и (2). Положим $x+y=u$; $x-y=v$. Тогда система уравнений (1) и (2) примет вид

$$\begin{cases} \frac{21}{v}-\frac{21}{u}=\frac{20}{3}; \\ 3u=7v. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $u=\frac{21}{5}$; $v=\frac{9}{5}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} x+y=\frac{21}{5}; \\ x-y=\frac{9}{5} \end{cases}$$

и, таким образом, $x=3$, $y=1\frac{1}{5}$.

*Отв.* Скорость лодки в стоячей воде 3 *км/ч*, скорость течения реки $1\frac{1}{5}$ *км/ч*.

**138.** Предположим, что скорость течения реки $x$ *км/ч*, расстояние от пункта $A$ до встречи лодки с плотом $y$ *км*. Лодка проплыла это расстояние по течению реки за $\frac{y}{20+x}$ *ч*, а плот — за $\frac{y}{x}$ *ч*. Таким образом, составляем первое уравнение

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{20+x}=2\frac{24}{60}.$$

Плот с места встречи с лодкой до пункта $B$ проплыл еще $(3{,}6x - y)$ *км*, а лодка, возвращаясь обратно, проплыла до пункта $A$ еще $y$ *км*. Принимая во внимание, что эти расстояния они проплывали за одно и то же время, имеем второе уравнение

$$\frac{y}{20-x}=\frac{3{,}6x-y}{x}.$$

Таким образом, мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{y}{x}-\frac{y}{20+x}=\frac{12}{5}; \\ \frac{y}{20-x}=\frac{\frac{18}{5}x-y}{x}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x^2+60x=25y; \\ -9x^2+180x=50y. \end{cases}$$

Разделив одно уравнение на второе, получим

$$\frac{3x+60}{180-9x}=\frac{1}{2},$$

или $5x=20$, откуда $x=4$.

*Отв.* 4 *км/ч*.

**139.** *Отв.* $d_1=\frac{1}{5}$ *г/см*$^3$; $d_2=\frac{1}{2}$ *г/см*$^3$.

**140.** Пусть $x$ *(м/сек)* — скорость точки на меньшей окружности, тогда $10x$ — расстояние, которое она прошла за 10 *сек*, а $(10x+2)$ — путь, который прошла точка за 10 *сек* на большей окружности.

Если через $c$ и $C$, $r$ и $R$ обозначить соответственно длину и радиус меньшей и большей окружностей, то $\frac{10x}{c}$ есть число оборотов точки за 10 *сек* на меньшей окружности, а $\frac{10x+2}{C}$ — число оборотов точки за 10 *сек* на большей окружности.

Согласно условию задачи

$$\frac{10x}{c} = 5\frac{10x+2}{C}, \text{ или } \frac{x}{5x+1} = \frac{c}{C}.$$

Но

$$\frac{c}{C} = \frac{r}{R} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, $\frac{x}{5x+1} = \frac{1}{6}$, отсюда $x = 1$.

Скорость второй точки $\frac{10x+2}{10} = 1{,}2$.

*Отв.* Скорость первой точки 1 *м/сек*, второй 1,2 *м/сек*.

## Квадратные уравнения

**141.** $p = -(x_1 + x_2) = -2; \quad q = x_1x_2 = \frac{9-20}{9} = -\frac{11}{9}.$

Искомое уравнение будет

$$x^2 - 2x - \frac{11}{9} = 0, \text{ или } 9x^2 - 18x - 11 = 0.$$

**142.** Коэффициент при первой степени неизвестного

$$p = -(x_1 + x_2) = -\left(\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}\right) = -\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}\right) =$$

$$= -\frac{a-b}{a-b} = -1.$$

Свободный член

$$q = x_1x_2 = \frac{ab}{-(a-b)^2}.$$

Искомое уравнение будет

$$x^2 - x - \frac{ab}{(a-b)^2} = 0.$$

*Отв.* $x^2 - x - \frac{ab}{(a-b)^2} = 0.$

**143.** Согласно условию должно иметь место тождество

$$(1+\sqrt{3})^2 + p(1+\sqrt{3}) + q = 0,$$

откуда

$$4 + 2\sqrt{3} + 3 + p + p\sqrt{3} + q = 0,$$

$$4 + p + q + (p+2)\sqrt{3} = 0,$$

$$4 + p + q = -(p+2)\sqrt{3},$$

что возможно только при $4 + p + q = 0$ и $p + 2 = 0$, откуда $p = -2$; $q = -2$. Следовательно, заданное уравнение имеет вид

$$x^2 - 2x - 2 = 0,$$

Решая это уравнение, получим

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 2} = 1 \pm \sqrt{3}; \quad x_1 = 1 + \sqrt{3}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

*Отв.* $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

**144.**

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a - 1) = (a - 1)^2 + 1.$$

Полученное выражение имеет наименьшее значение, когда $a = 1$.

**145.** По теореме Виета сумма корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна $-p$, а произведение $q$. Таким образом, искомым уравнением будет

$$[x - (-p)](x - q) = 0 \text{ или } x^2 + (p - q)x - pq = 0.$$

*Отв.* $x^2 + (p - q)x - pq = 0$.

**146.** По теореме Виета $x_1x_2 = 12$; по условию $x_1 - x_2 = 1$. Из этих уравнений можно найти $x_1$ и $x_2$(4 и 3 или $-3$ и $-4$) и затем $p = -(x_1 + x_2) = \pm 7$.

Но для разыскания $x_1 + x_2$ нет необходимости определять $x_1$ и $x_2$ в отдельности. Можно вычислить

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 1^2 + 4 \cdot 12 = 49.$$

*Отв.* $p = \pm 7$.

**147.** Заданное уравнение имеет корни $x_1 = 9$; $x_2 = 5$. Корни искомого уравнения будут $y_1 = 3$; $y_2 = 2$, а уравнение будет иметь вид $y^2 - 5y + 6 = 0$.

*Отв.* $y^2 - 5y + 6 = 0$.

**148.** Пусть корни данного уравнения будут $x_1$ и $x_2$. Тогда по формулам Виета получим

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}; \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned} \tag{1}$$

Допустим, что искомое уравнение имеет вид

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2}$$

Следовательно, задача сводится к определению коэффициентов $p$ и $q$ по его корням для каждого из перечисленных здесь случаев.

1. Если корни уравнения (2) есть $(-x_1)$ и $(-x_2)$, то

$$p = -[-(x_1 + x_2)] = -\frac{b}{a},$$

$$q = (-x_1)(-x_2) = \frac{c}{a},$$

откуда искомое уравнение будет

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

или

$$ax^2 - bx + c = 0.$$

2. Если корни уравнения (2) есть $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, то

$$p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{-(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c},$$

$$q = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = 1 : \frac{c}{a} = \frac{a}{c},$$

откуда находим искомое уравнение

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,$$

или

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

3. Если корни уравнения (2) есть $x_1 + n$ и $x_2 + n$, то

$$p = -(x_1 + x_2 + 2n) = -\left(-\frac{b}{a} + 2n\right) = \frac{b}{a} - 2n;$$

$$q = (x_1 + n)(x_2 + n) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2)n + n^2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2.$$

Искомое уравнение будет

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2n\right)x + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2 = 0;$$

$$ax^2 + (b - 2an)x + (an^2 - bn + c) = 0.$$

4. Если корни уравнения (2) $x_1 n$ и $x_2 n$, то

$$p = -n(x_1 + x_2) = \frac{nb}{a},$$

$$q = n^2 x_1 x_2 = \frac{n^2 c}{a}.$$

Искомое уравнение будет

$$x^2 + \frac{nb}{a}x + \frac{n^2 c}{a} = 0;$$

$$ax^2 + nbx + n^2 c = 0.$$

149. 1-й способ решения. Так как

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{(a + b)(a - b)}{ab},$$

то $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ разлагается на множители $\frac{a+b}{a}$ и $\frac{a-b}{b}$ (их сумма равна $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$).

2-й способ решения. Пусть $u$ и $v$ — искомые множители. По условию

$$uv = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \text{ и } u + v = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $u$ и $v$ — корни квадратного уравнения

$$x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 0.$$

В выражения для $u$ и $v$ войдет радикал

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)}.$$

Напишем вместо $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$ выражение $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$ и для компенсации прибавим $4\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$, т. е. 4; тогда под радикалом получим полный квадрат $\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) - 2\right]^2$. Теперь уже легко определить искомые множители.

*Отв.* $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{b}$.

**150.** Чтобы квадратный трехчлен был полным квадратом в поле действительных чисел, необходимо и достаточно, чтобы он имел равные корни, что равносильно равенству нулю его дискриминанта, и положительный первый коэффициент. Поэтому получаем

$$[m(m-1)]^2 - 4 \cdot 36 = 0; \; m(m-1) = \pm 12.$$

Таким образом, $m(m-1) = 12$, откуда $m_1 = 4$, $m_2 = -3$, а $m(m-1) = -12$ дает комплексные значения $m$.

*Отв.* $m_1 = 4$; $m_2 = -3$.

**151.** Дискриминант данного уравнения должен равняться нулю. Поэтому

$$(3+p)^2 - 4 \cdot 3(1+p) = 0, \text{ или } p^2 - 6p - 3 = 0,$$

т. е. получим искомое уравнение.

Примечание. Находить значения $p$ нет никакой необходимости, так как задание двух корней вполне определяет вид квадратного уравнения.

*Отв.* $p^2 - 6p - 3 = 0$.

**152.** Данное уравнение имеет равные корни только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Отсюда получаем уравнение

$$(k+1)^2 - 4(2k-1)(k-4) = 0, \text{ или } 7k^2 - 38k + 15 = 0,$$

откуда $k_1 = 5$; $k_2 = \frac{3}{7}$.

*Отв.* $k_1 = 5$; $k_2 = \frac{3}{7}$.

**153.** Если обозначить корни данного уравнения через $x_1$ и $x_2$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Корни искомого уравнения $y_1 = x_1^3$; $y_2 = x_2^3$.

Коэффициенты искомого уравнения

$$p = -(y_1 + y_2) = -(x_1^3 + x_2^3) = -[(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)] =$$
$$= -\left(-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3cb}{a^2}\right) = \frac{b^3 - 3abc}{a^3};$$

$$q = y_1y_2 = x_1^3x_2^3 = (x_1x_2)^3 = \frac{c^3}{a^3}.$$

Искомое уравнение

$$a^3y^3 + (b^3 - 3abc)\,y + c^3 = 0.$$

*Отв.* $a^3y^3 + (b^3 - 3abc)\,y + c^3 = 0$.

**154.** Из условия непосредственно следует, что $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Квадратное уравнение имеет мнимые корни, если его дискриминант — отрицательное число.

Составим дискриминант данного уравнения и определим его знак.

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 -$$
$$- a^2 - 2bc) = [(b + c)^2 - a^2][(b - c)^2 - a^2] =$$
$$= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a).$$

Так как сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны, то выражение в каждой из первых трех скобок — положительное число, а в четвертой — отрицательное. Следовательно, дискриминант — число отрицательное и корни уравнения мнимые.

**155.** Так как $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = 1$, то разложив $x_1^5 + x_2^5$ на множители и сделав некоторые преобразования, получим

$$x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 - x_1x_2^3 + x_2^4) =$$
$$= (x_1 + x_2)[(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2x_2^2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)] =$$
$$= (x_1 + x_2)[(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) - 1] =$$
$$= (x_1 + x_2)\{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2][(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 1] - 1\} =$$
$$= a[(a^2 - 2)(a^2 - 3) - 1] = a(a^4 - 5a^2 + 5).$$

Отсюда ясно, что при любом целом $a$ $x_1^5 + x_2^5$ — целое число.

Выражение, стоящее в последних скобках, делится на 5, когда число $a$ делится на 5. Следовательно, при $a = 5$, т. е. при его минимальном целом значении в этом случае, $x_1^5 + x_2^5$ делится на 25. Если $a$ не кратно 5, то $x_1^5 + x_2^5$ не делится ни на 25, ни на 5.

**156.** Корни данного уравнения будут рациональные, если из его дискриминанта извлекается точный квадратный корень, т. е. если $1 + 4k$ есть полный квадрат:

$$1 + 4k = a^2; \quad k = \frac{(a-1)(a+1)}{4},$$

где $a$ — любое целое нечетное число, кроме $|a| = 1$.

*Отв.* $k = 2;\ 6;\ 12;\ \ldots$

**157.** Разделим в левой части уравнения числитель почленно на знаменатель

$$\frac{a-x}{x-b} - \frac{x-b}{a-x} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Положим $\frac{a-x}{x-b} = y$, тогда $\frac{x-b}{a-x} = \frac{1}{y}$, и уравнение примет вид

$$y - \frac{1}{y} = \frac{4ab}{a^2-b^2}, \text{ или } y^2 - \frac{4ab}{a^2-b^2}y - 1 = 0.$$

Решив уравнение, получим

$$y = \frac{2ab}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} + 1} = \frac{2ab}{a^2-b^2} \pm \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2},$$

откуда

$$y_1 = \frac{a+b}{a-b}; \quad y_2 = \frac{b-a}{a+b}.$$

Теперь можем найти $x$:

$$\frac{a-x_1}{x_1-b} = \frac{a+b}{a-b}, \text{ или } x_1 = \frac{a^2+b^2}{2a};$$

$$\frac{a-x_2}{x_2-b} = \frac{b-a}{a+b}, \text{ или } x_2 = \frac{a^2+b^2}{2b}.$$

Таким образом, данное уравнение имеет два решения при любых отличных от нуля действительных значениях параметров $a$ и $b$, удовлетворяющих условию $|a| \neq |b|$.

Если один из параметров равен нулю (одновременное равенство их нулю исключается условием задачи), то уравнение превращается в линейное, которое имеет только один корень. Например, если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2}$.

*Отв.* $x_1 = \frac{a^2+b^2}{2a}; \quad x_2 = \frac{a^2+b^2}{2b}.$

**158.** Обозначим $\sqrt[3]{2} = x$, тогда $x^3 = 2$ и данное равенство принимает вид

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

Умножив первые два слагаемых на 2, а последнее на $x^3$, получим

$$2cx^2 + 2bx + ax^3 = 0,$$

или

$$ax^2 + 2cx + 2b = 0.$$

Исключим $x^2$ из полученных квадратных уравнений, для чего первое умножим на $a$, второе на $c$ и вычтем одно из другого:

$$(ab - 2c^2)\,x + a^2 - 2bc = 0, \qquad (1)$$

откуда следует, что

$$x = \frac{2bc - a^2}{ab - 2c^2}$$

число р а ц и о н а л ь н о е. Но это невозможно, так как по условию $x$ — число и р р а ц и о н а л ь н о е.

При $x = \sqrt[3]{2}$ уравнение (1) возможно лишь в том случае, когда его коэффициенты одновременно обращаются в 0, т. е.

$$ab - 2c^2 = 0$$

и

$$a^2 - 2bc = 0,$$

откуда

$$ab = 2c^2$$

и

$$a^4 = 4b^2c^2.$$

Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то разделим почленно второе выражение на первое;

$$a^3 = 2b^3, \qquad (2)$$

т. е. $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$. Но $\sqrt[3]{2}$ не может равняться рациональному числу $\frac{a}{b}$, следовательно, равенство (2) несправедливо, за исключением единственного случая, когда $a = 0$ и $b = 0$; но тогда из заданного равенства вытекает, что и $c = 0$, что и требовалось доказать.

**159.**

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-b} = 1 + \frac{1}{b};$$

$$2bx - b - b^2 = (b+1)\,x^2 - (b+1)^2 x + b\,(b+1);$$

$$(b+1)\,x^2 - (b^2 + 4b + 1)\,x + 2b\,(b+1) = 0;$$

$$x = \frac{b^2 + 4b + 1 \pm \sqrt{(b^2 + 4b + 1)^2 - 8b\,(b+1)^2}}{2\,(b+1)}.$$

Отсюда и из условия следует, что

$$(x-1)\,(x-b) \neq 0 \text{ и } b\,(b+1) \neq 0.$$

$$x = \frac{b^2 + 4b + 1 \pm (b^2 + 1)}{2\,(b+1)};\ x_1 = b + 1;\ x_2 = \frac{2b}{b+1}.$$

При $b = 1$ $x_1 = x_2 = 2$.

**160.** Из условия примера следует, что $ab \neq 0$ и $|x| \neq b$.

Рассмотрим случай, когда $a \neq b$. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 - \frac{a}{b} \cdot \frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} =$$

$$= \frac{x+a}{x+b}\left[\frac{x+a}{x+b} - \frac{a(x-a)}{b(x-b)}\right] + \frac{x-a}{x-b}\left[\frac{x-a}{x-b} - \frac{b(x+a)}{a(x+b)}\right] =$$

$$= \frac{x+a}{x+b} \cdot \frac{b(x+a)(x-b) - a(x-a)(x+b)}{b(x^2-b^2)} + \frac{x-a}{x-b} \times$$

$$\times \frac{a(x-a)(x+b) - b(x-b)(x+a)}{a(x^2-b^2)} = \left[\frac{x+a}{b(x+b)} - \frac{x-a}{a(x-b)}\right] \times$$

$$\times \frac{b(x+a)(x-b) - a(x-a)(x+b)}{x^2-b^2}.$$

Отсюда

$$\frac{x+a}{b(x+b)} - \frac{x-a}{a(x-b)} = 0, \text{ или } b(x+a)(x-b) - a(x-a)(x+b) = 0.$$

Решая первое из полученных уравнений, будем иметь

$$(a-b)x^2 + (a^2-b^2)x - ab(a-b) = 0.$$

Сокращая на $a - b \neq 0$, найдем:

$$x^2 + (a+b)x - ab = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{a^2+6ab+b^2}}{2}.$$

Второе из уравнений (после преобразований) примет вид

$$(b-a)x^2 - (b^2-a^2)x - ab(b-a) = 0,$$

или

$$x^2 - (a+b)x - ab = 0.$$

Следовательно,

$$x_{3,4} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+6ab+b^2}}{2}.$$

При $a = b \neq 0$ уравнение преобразуется в

$$\left(\frac{x+a}{x+a}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-a}\right)^2 - \left(\frac{a}{a} + \frac{a}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-a^2} = 0,$$

которому удовлетворяет любое значение $x$, кроме $x = a = b$.

**161.** Преобразуем уравнение:

$$(x^2+x)(x^2+x-2) = 24; \quad (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) = 24;$$

$$(x^2+x)^2 - 2(x^2+x) + 1 = 25; \quad (x^2+x-1)^2 = 25,$$

откуда

$$x^2 + x - 1 = \pm 5.$$

Таким образом, получаем два уравнения:

I. $x^2 + x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

II. $x^2+x+4=0$, откуда $x_3=\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$; $x_4=\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$.

*Отв.* $x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$; $x_4=\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$.

**162.** *Отв.* $x_1=2a+b$; $x_2=b$.

**163.** Пусть $x=\sqrt[4]{\frac{625}{16}}\cdot y=\frac{5}{2}y$; подставляя это значение в заданное уравнение и вынося за скобку 625, имеем

$$625(y^4+1)=0,$$

откуда

$$y^4+1=0;\ y^4+1+2y^2-2y^2=0;$$
$$(y^2+1)^2-(\sqrt{2}y)^2=0;$$
$$(y^2+1+\sqrt{2}y)(y^2+1-\sqrt{2}y)=0.$$

Из уравнения

$$y^2+\sqrt{2}y+1=0$$

находим

$$y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i),$$

а из уравнения

$$y^2-\sqrt{2}y+1=0$$

определяем

$$y_{3,4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i).$$

Следовательно,

$$x_{1,2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}(-1\pm i)\ \text{и}\ x_{3,4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}(1\pm i).$$

*Отв.* $x_1=\frac{5\sqrt{2}}{4}(-1+i)$; $x_2=\frac{5\sqrt{2}}{4}(-1-i)$; $x_3=\frac{5\sqrt{2}}{4}(1+i)$; $x_4=\frac{5\sqrt{2}}{4}(1-i)$.

**164.** Дискриминант данного квадратного уравнения равен

$$(4k)^2+16(k+1)=16(k^2+k+1).$$

Так как дискриминант вновь полученного квадратного трехчлена отрицательный, то при любом действительном значении $k$ выражение $k^2+k+1>0$ и, следовательно, корни исходного уравнения всегда действительны.

Если $-\infty<k<-1$, то свободный член в исходном уравнении положительный, второй коэффициент отрицательный, поэтому оба корня положительны (теорема Виета).

При $-1<k<\infty$ корни разных знаков. При $k=-1$ один корень уравнения обращается в нуль.

**165.** Обозначим корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ через $x_1$ и $x_2$. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 x_2 = q. \end{cases} \quad (A)$$

Но согласно условию задачи $x_1 = p$ и $x_2 = q$. Подставив эти значения $x_1$ и $x_2$ в систему (A), получим

$$\begin{cases} 2p + q = 0; \\ pq = q. \end{cases} \quad (B)$$

Второе уравнение этой системы можно представить в виде $q(p - 1) = 0$, отсюда имеем или $q = 0$, и тогда из первого уравнения системы (B) найдем, что $p_1 = 0$, или $p_2 = 1$, и тогда из первого уравнения системы (B) найдем, что $q_2 = -2$.

Таким образом, имеем две системы искомых значений $p$ и $q$:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 1;$$
$$q_1 = 0; \quad q_2 = -2.$$

Следовательно, существует только два квадратных уравнения, которые удовлетворяют условиям задачи, а именно:

$$x^2 + 0x + 0 = 0; \quad (1)$$
$$x^2 + x - 2 = 0. \quad (2)$$

Легко проверить, что оба корня квадратного уравнения (1) равны 0, а корни квадратного уравнения (2) равны 1 и $-2$.

*Отв.* $p_1 = 0$, $q_1 = 0$; $p_2 = 1$, $q_2 = -2$.

**166.** После некоторых преобразований получим

$$3x^2 - 2x(a + b + c) + (ab + bc + ac) = 0.$$

Находим дискриминант:

$$(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$$
$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) =$$
$$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] \geqslant 0.$$

**167.** Обозначим искомые корни квадратного уравнения через $x_1$ и $x_2$, и пусть, согласно условию задачи,

$$x_1 = 2x_2. \quad (1)$$

По формуле Виета имеем

$$x_1 + x_2 = \frac{2m + 1}{2}; \quad (2)$$

$$x_1 x_2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}. \quad (3)$$

Заменяя в равенствах (2) и (3) значения $x$ по формуле (1), находим

$$3x_2 = \frac{2m+1}{2},$$

$$2x_2^2 = \frac{m^2-9m+39}{2},$$

или

$$2\left(\frac{2m+1}{6}\right)^2 = \frac{m^2-9m+39}{2},$$

т. е.

$$m^2 - 17m + 70 = 0.$$

Следовательно,

$$m_1 = 7;\ m_2 = 10.$$

Подставляя найденные значения $m$ в данное уравнение, получим два квадратных уравнения:

$$2x^2 - 15x + 25 = 0;$$

$$2x^2 - 21x + 49 = 0.$$

*Отв.* $x_1 = 5,\ x_2 = 2{,}5;\ x_1 = 7,\ x_2 = 3{,}5.$

**168.** После некоторых преобразований получим

$$(2x^2+x)^2 - \frac{(2x^2+x)}{2} = \frac{a}{2}.$$

Пусть

$$2x^2 + x = y,$$

тогда

$$y^2 - \frac{y}{2} = \frac{a}{2}, \text{ или } 2y^2 - y - a = 0,$$

откуда

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8a}}{4}.$$

Подставляя в уравнение $2x^2 + x - y = 0$ вместо $y$ его значение, получим

$$x_{1,2,3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8y}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2(1 \pm \sqrt{1+8a})}}{4}.$$

*Отв.* $x_{1,2,3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2(1 \pm \sqrt{1+8a})}}{4}.$

**169.**

$$(1+lx)(a-x) + x^2 - a^2 = 0;$$

$$(a-x)[(1+lx) - (a+x)] = 0;\ x_1 = a;$$

$$1 + lx - a - x = 0;\ x_2 = \frac{1-a}{1-l}.$$

Если $x = a$, то данное уравнение не имеет смысла.

Примечание. Приводя к общему знаменателю и отбрасывая последний, мы расширяем множество допустимых значений $x$ и тем самым можем получить посторонний корень. Этот пример можно еще решить и так:

$$1+lx=\frac{a^2-x^2}{a-x};\quad 1+lx=a+x;\quad x=\frac{1-a}{1-l}.$$

Сократив дробь на $a-x$, мы сузили множество допустимых значений $x$; $a-x\neq 0$.

*Отв.* $x=\frac{1-a}{1-l}$.

**170.** Когда корни первого уравнения являются корнями второго и наоборот, то такие уравнения называются *эквивалентными*.

Корень первого уравнения $x=9$, а корни второго уравнения $x_1=0$, $x_2=9$.

*Отв.* Эти уравнения не будут эквивалентными.

**171.** Обозначим число сторон многоугольника, равное числу его вершин, через $x$. Из каждой вершины многоугольника можно провести $(x-3)$ диагонали, а из всех его вершин — в $x$ раз больше. Принимая во внимание, что одну и ту же диагональ, соединяющую две вершины многоугольника, можно считать проведенной как из одной вершины, так и из другой, общее число диагоналей многоугольника будет равно $\frac{x(x-3)}{2}$.

Составляем уравнение

$$x+\frac{x(x-3)}{2}=10.$$

Решая его, найдем, что $x=5$.

*Отв.* 5.

**172.** Если лошадь за $n$ *ч* вспашет $x$ *га*, то трактор за это же время вспашет $(x+p)$ *га*. Тогда

$$\frac{n}{x}-\frac{n}{x+p}=t,$$

или

$$tx^2+tpx-np=0,$$

откуда

$$x=\frac{-tp\pm\sqrt{t^2p^2+4ntp}}{2t}.$$

В связи с тем, что $t>0$, $p>0$, $n>0$, условию задачи удовлетворяет действительный и положительный корень

$$x=\frac{-tp+\sqrt{t^2p^2+4ntp}}{2t}.$$

Таким образом, лошадь за $n$ *ч* вспашет $\frac{-tp+\sqrt{t^2p^2+4ntp}}{2t}$ *га*, а трактор $\frac{tp+\sqrt{t^2p^2+4ntp}}{2t}$ *га*.

**173.** Обозначим величину меньшей силы через $x$ *н*. Тогда величина большей силы будет равна $(x+1)$ *н*, а равнодействующая — $(x+2)$ *н*.

Как известно, равнодействующая сила по величине и направлению равна диагонали параллелограмма, построенного на составляющих силах. Следовательно,

$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)\cos 120°;$$

$$2x^2 - x - 3 = 0.$$

Отсюда $x = \frac{3}{2}$ *н*.

*Отв.* 1,5 *н* и 2,5 *н*.

**174.** Предположим, что первая бригада укладывала в день $x$ *км* шпал на железнодорожном полотне, тогда вторая бригада укладывала $(x+m)$ *км*. Первая бригада работала $\frac{s}{x}$ дней, а вторая $\frac{s-n}{x+m}$ дней.

По условию задачи составляем уравнение

$$\frac{s}{x} - \frac{s-n}{x+m} = t \text{ или } tx^2 - (n - tm)x - sm = 0,$$

откуда

$$x = \frac{n - tm \pm \sqrt{(n-tm)^2 + 4stm}}{2t}.$$

*Отв.* Первая бригада в день укладывала $\frac{(n-tm) + \sqrt{(n-tm)^2 + 4stm}}{2t}$ *км*, вторая $\frac{(n+tm) + \sqrt{(n-tm)^2 + 4stm}}{2t}$ *км*.

**175.** Пусть на выгрузку товара намечалось $x$ рабочих; тогда число явившихся на выгрузку равно $x - 3$. Предусматривалось выплатить каждому рабочему $\frac{a}{x}$ руб., а выплачивалось $\frac{a}{x-3}$ руб.

По условию задачи, каждый явившийся рабочий получил на 3 руб. больше предусмотренного. Отсюда имеем уравнение

$$\frac{a}{x-3} = \frac{a}{x} + 3, \qquad (1)$$

или

$$x^2 - 3x - a = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4a}}{2}.$$

По смыслу задачи $a > 0$, $x > 3$ — целое число.

Так как $a > 0$, то $9 + 4a > 9$, или $\sqrt{9+4a} > 3$. Следовательно,

$$\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2} > 3; \quad \frac{3-\sqrt{9+4a}}{2} < 0.$$

Корень $x_1 = \frac{3+\sqrt{9+4a}}{2}$ при $a > 0$ удовлетворяет условию $x > 3$; кроме того, этот корень должен выражаться целым числом, что, очевидно, зависит от значений $a$; определим эти значения.

Предположим, что $\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2} = k$, где $k$ — целое положительное число больше 3. Тогда

$$3+\sqrt{9+4a} = 2k;\ \sqrt{9+4a} = 2k-3;\ 9+4a = 4k^2-12k+9;\ a = k(k-3),$$

откуда

$$k = 4;\ 5;\ 6;\ \ldots;\ a = 4;\ 10;\ 18;\ \ldots;\ x = 4;\ 5;\ 6;\ \ldots$$

*Отв.* На выгрузку товара намечалось $\frac{3+\sqrt{9+4k(k-3)}}{2}$ рабочих, где $k$ — целое положительное число, $k > 3$, $k(k-3) = a$.

**176.** Обозначим через $x$ числитель искомой дроби, тогда знаменатель будет $(x+2)$, а вся дробь запишется в виде $\frac{x}{x+2}$. Ее обратная величина равна $\frac{x+2}{x}$. Отсюда следует уравнение

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2} = \frac{11}{15}.$$

Решая его, находим, что $x = 3$.

*Отв.* $\frac{3}{5}$.

**177.** Назовем $\frac{1}{3}$ часть всей работы нормой каждого рабочего.

Пусть первый рабочий может выполнить свою норму за $x$ *ч*. Тогда второй — за $\left(2x-\frac{1}{2}\right)$ *ч*, третий — за $(x+2)$ *ч*.

По истечении $x$ *ч*, т. е. по окончании выполнения первым рабочим своей нормы, третий рабочий выполнил бы лишь $\frac{x}{x+2}$ часть нормы и, следовательно, ему осталось бы еще выполнить $\left(1-\frac{x}{x+2}\right)$ часть. Работая вместе с первым рабочим, он смог бы закончить работу

за $\frac{1-\frac{x}{x+2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}}$ *ч*. Таким образом, $x+\frac{1-\frac{x}{x+2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}} = \frac{x^2+2x}{x+1}$ *ч*.

Отсюда следует уравнение

$$\frac{x^2+2x}{x+1} = 2x-\frac{1}{2},$$

которое после преобразований примет вид

$$2x^2-x-1 = 0.$$

Решив его, найдем, что $x = 1$ (второй корень, отрицательный, не удовлетворяет условию задачи).

Работая отдельно, первый рабочий может выкопать всю канаву за 3 *ч*, второй — за $\frac{9}{2}$ *ч*, третий — за 9 *ч*.

Работая вместе, трое рабочих могут закончить всю работу за $\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{9}{2}}+\frac{1}{9}} = \frac{9}{6} = 1{,}5$ *ч*.

*Отв.* 1,5 *ч*.

**178.** Пусть первый каменщик выполняет всю работу за $x$ *ч*. Тогда в течение одного часа его выработка составляет $\frac{1}{x}$ часть всей работы. При совместной работе двух каменщиков в течение 1 *ч* и последующей работе второго каменщика в продолжение $\frac{1}{2}$ *ч*, что равносильно раздельной работе первого каменщика в течение 1 *ч*, а второго — в течение $\frac{3}{2}$ *ч*, может быть выполнена вся работа. Следовательно, выработка второго каменщика в продолжение 1 *ч* составляет $\left(1-\frac{1}{x}\right):\frac{3}{2} = \frac{2(x-1)}{3x}$ части работы.

Если бы первый каменщик выработал за день $\frac{1}{x^2}$ часть работы, а второй $\frac{4(x-1)^2}{9x^2}$ части работы, то вся работа могла быть выполнена при совместной работе двух каменщиков в течение 2 *ч* и последующей работе одного второго каменщика в продолжение 2,5 *ч*, что равносильно последовательной раздельной работе первого каменщика в течение 2 *ч*, а второго — в течение $\frac{9}{2}$ *ч*. Отсюда следует уравнение

$$\frac{2}{x^2}+\frac{9\cdot 4(x-1)^2}{2\cdot 9x^2} = 1,$$

или

$$x^2-4x+4=0.$$

Решая последнее, находим, что $x = 2$.

Второй каменщик может выполнить работу за $\frac{1}{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 3$ *ч*.

*Отв.* 3 *ч*; 2 *ч*.

**179.** Пусть поезда встретились через $x$ *ч* после выхода скорого поезда. Тогда почтовый поезд к моменту встречи находился в пути

$(x + 3)$ *ч*. До места встречи каждый поезд прошел $1080 : 2 = 540$ *км*. Таким образом, скорость первого поезда $\frac{540}{x}$ *км/ч*, а второго $\frac{540}{x+3}$ *км/ч*. По условию задачи получаем уравнение

$$\frac{540}{x} - \frac{540}{x+3} = 15.$$

Решая это уравнение, найдем, что $x = 9$; второй корень не удовлетворяет уравнению.

*Отв.* Через 9 *ч* после выхода скорого поезда.

**180.** Пусть взято пшеничной муки $x$ *кг*. Тогда ржаной было взято $x + 10$ *кг*. Припек на пшеничную муку составил $\frac{x^2}{100}$ *кг*, а на ржаную $\frac{(x+10)^2}{100}$ *кг*. Сумма килограммов всей взятой муки и припека составляет 112,5 *кг*. Отсюда получаем уравнение

$$x + \frac{x^2}{100} + x + 10 + \frac{(x+10)^2}{100} = 112{,}5;$$

$$2x^2 + 220x + 1100 = 11250;$$

$$x^2 + 110x - 5075 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 35.$$

Второй корень отбрасываем, поскольку он отрицательный ($x_2 = -145$).

*Отв.* Пшеничной муки было взято 35 *кг*, а ржаной 45 *кг*.

**181.** Обозначим скорость первого автомобиля через $x$ *км/ч*, тогда скорость второго будет равна $(x + a)$*км/ч*, а скорость третьего — $(x + 2a)$ *км/ч*. По прошествии $\frac{x}{10}$*ч*, в момент приезда третьего в пункт $B$, расстояние между автомобилями будет следующее:

1) между третьим и первым $\frac{(x+2a)x}{10} - \frac{x \cdot x}{10} = \frac{ax}{5}$ *км*;

2) между третьим и вторым $\frac{(x+2a)x}{10} - \frac{(x+a)x}{10} = \frac{ax}{10}$ *км*.

До встречи третьего автомобиля с первым (с момента выезда третьего из пункта $B$) должно, следовательно, пройти

$$\frac{\frac{ax}{5}}{x + 2a + x} = \frac{ax}{10(x+a)}\ ч,$$

а до встречи со вторым

$$\frac{\frac{ax}{10}}{(x+2a) + (x+a)} = \frac{ax}{10(2x+3a)}\ ч.$$

Так как третий автомобиль (с момента выезда из пункта $B$) встретил второй на $\frac{3a}{70}$ $ч$ раньше, чем первый, то

$$\frac{ax}{10(x+a)} - \frac{ax}{10(2x+3a)} = \frac{3a}{70};$$

$$\frac{x}{x+a} - \frac{x}{2x+3a} = \frac{3}{7}.$$

Решая уравнение, найдем

$$x = \frac{a}{2}(1+\sqrt{37}) \approx 3{,}54a.$$

*Отв.* $x \approx 3{,}54a$ *км/ч.*

**182.** Пусть первый рабочий может выполнить всю работу, работая отдельно, за $x$ дней, тогда за один день он выполнит $\frac{1}{x}$ часть всей работы. Следовательно, второй рабочий за один день выполнит $\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}$ частей.

Если же они работали бы один за другим, каждый такую часть дня, какую часть работы выполняет за день, то первый рабочий сделал бы $\frac{1}{x^2}$ частей, а второй $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ частей.

Отсюда следует уравнение

$$\frac{1}{x^2} + \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{1}{a}; \quad (a-1)x^2 - 2ax + 2a = 0.$$

Решая последнее, получим

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a(a-1)}}{a-1} = \frac{a \pm \sqrt{a(2-a)}}{a-1}.$$

Так как $a$ по смыслу условия задачи — число положительное и больше 1, то полученное значение $x$ возможно при $a > 1$ и $a \leqslant 2$, т. е. при $1 < a \leqslant 2$.

Докажем, что оба корня уравнения больше или равны единице. Действительно,

$$\frac{a \pm \sqrt{a(2-a)}}{a-1} - 1 = \frac{1 \pm \sqrt{a(2-a)}}{a-1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-(a-1)^2}}{a-1} \geqslant 0,$$

ибо

$$0 < a - 1 \leqslant 1.$$

Второй рабочий может выполнить всю работу за

$$\frac{x}{x-1} = \frac{\frac{a \pm \sqrt{a(2-a)}}{a-1}}{\frac{a \pm \sqrt{a(2-a)}}{a-1} - 1} = \frac{a \pm \sqrt{a(2-a)}}{1 \pm \sqrt{a(2-a)}} \text{ дней.}$$

*Отв.* $\frac{a \pm \sqrt{a(2-a)}}{a-1}$; $\frac{a \pm \sqrt{a(2-a)}}{1 \pm \sqrt{a(2-a)}}$.

183. Пусть окружность переднего колеса равна $x$ м, тогда окружность заднего $(x + t)$ м. Переднее колесо на расстоянии $a$ м сделает $\frac{a}{x}$ оборотов, а заднее $\frac{a}{x+t}$ оборотов.

Отсюда

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{x+t} = b;$$

$$bx^2 + btx - at = 0.$$

Решая уравнение, найдем

$$x = \frac{-bt + \sqrt{b^2t^2 + 4abt}}{2b}.$$

*Отв.* Окружность переднего колеса $\frac{-bt + \sqrt{b^2t^2 + 4abt}}{2b}$ м, окружность заднего $\frac{bt + \sqrt{b^2t^2 + 4abt}}{2b}$ м.

184. Пусть первая молотилка обмолачивает весь хлеб за $x$ дней. Половину хлеба она обмолотит за $\frac{x}{2}$ дней. Вторая молотилка обмолотит половину хлеба за $b - \frac{x}{2}$ дней, а весь хлеб — за $2b - x$ дней.

Принимаем всю работу за единицу.

$\frac{1}{x}$ — производительность первой молотилки в день;

$\frac{1}{2b-x}$ — производительность второй молотилки в день;

$\frac{1}{a}$ — производительность двух молотилок в день.

Отсюда следует уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2b-x} = \frac{1}{a}; \quad (x \neq 2b).$$

Исследование. Очевидно, что $a > 0$; $b > 0$; $b > a$, ибо число дней совместной работы двух молотилок меньше суммы числа дней, затраченных на выполнение половины работы каждой молотилкой в отдельности; $x > a$, так как число дней, затраченных на выполнение всей работы первой молотилкой, всегда больше числа дней совместной работы двух молотилок.

Решим уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2b-x} = \frac{1}{a}.$$

Для этого перепишем его так:

$$(2b - x)a + ax = (2b - x)x, \quad \text{или} \quad x^2 - 2bx + 2ab = 0.$$

Отсюда находим, что

$$x_1 = b + \sqrt{b^2 - 2ab} \text{ и } x_2 = b - \sqrt{b^2 - 2ab}.$$

Исследуем корни квадратного уравнения. $b^2 - 2ab \geqslant 0$, $b \geqslant 2a$, так, как корни $x_1$ и $x_2$ должны быть вещественными; $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, что очевидно.

Случай, когда $b = 2a$, соответствует одинаковой продуктивности обеих молотилок: $x_{1,2} = b$.

Таким образом, задаче удовлетворяют оба решения (т. е. $x_1$ и $x_2$). Число дней работы второй молотилки $2b - x$, т. е.

$$2b - (b - \sqrt{b^2 - 2ab}) = b + \sqrt{b^2 - 2ab},$$

или

$$2b - (b + \sqrt{b^2 - 2ab}) = b - \sqrt{b^2 - 2ab}.$$

*Отв.* Число дней работы первой молотилки $b \pm \sqrt{b^2 - 2ab}$, число дней работы второй молотилки $b \mp \sqrt{b^2 - 2ab}$ при $b \geqslant 2a$.

**185.** Пусть полуторатонная машина расходует на пробег $S$ *км* $x$ *л* бензина; тогда трехтонная машина будет расходовать на пробег того же расстояния $(x + a)$*л* бензина.

При расходе 1 *л* бензина полуторатонная машина проходит $\frac{1000S}{x}$ *м*, а трехтонная $\frac{1000S}{x+a}$ *м*, следовательно,

$$\frac{1000S}{x} - \frac{1000S}{x+a} = b,$$

или

$$bx^2 + abx - 1000aS = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 + 4000abS}}{2b}.$$

Так как $a > 0$, $b > 0$, $S > 0$, то действительным и положительным является только один корень

$$x = \frac{-ab + \sqrt{a^2b^2 + 4000abS}}{2b}.$$

*Отв.* При прохождении расстояния в $S$ *км* полуторатонная автомашина расходует $\frac{-ab + \sqrt{a^2b^2 + 4000abS}}{2b}$ *л* бензина, трехтонная

$$\frac{-ab + \sqrt{a^2b^2 + 4000abS}}{2b} + a = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4000abS}}{2b} \text{ л}.$$

**186.** Скорость первой автомашины 40 *км/ч*, скорость второй 50 *км/ч*.

Обозначим скорость третьей автомашины через $x$, а время ее движения до встречи с первой автомашиной — через $y$. Тогда путь, пройденный первой автомашиной до встречи с третьей, с одной стороны, будет равен $40\left(y + \frac{1}{2}\right)$, а с другой стороны, $xy$, т. е.

$$40\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy.$$

Применяя такие же рассуждения относительно второй и третьей автомашины, составим второе уравнение

$$50(y+2)=x\left(y+\frac{3}{2}\right).$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 40\left(y+\frac{1}{2}\right)=xy; \\ 50(y+2)=x\left(y+\frac{3}{2}\right), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 40x+20=xy; \\ 50y+100=xy+\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Исключим из обоих уравнений $y$, тогда получим квадратное уравнение

$$3x^2-280x+6000=0,$$

откуда

$$x=\frac{140\pm\sqrt{1600}}{3}$$

или $x=60$ (второе значение $x=\frac{100}{3}$ не отвечает условию задачи, ибо очевидно, что $x>50$).

Примечание. Эту задачу можно решать еще и так. В момент старта первой и третьей автомашины расстояние между ними было равно 20 *км*. Автомашины сближаются со скоростью $(x-40)$ *км/ч*, т. е. третья автомашина догонит первую через $\frac{20}{x-40}$ *ч*, а вторую — через $\frac{25}{x-50}$ *ч*. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{25}{x-50}-\frac{20}{x-40}=1{,}5.$$

*Отв.* 60 *км/ч*.

**187.** Пусть расстояние между городами $A$ и $B$ будет $x$. Первый поезд проезжает каждый километр пути за $\frac{a}{x}$ *ч*. Тогда второй должен проезжать каждый километр за $\left(\frac{a}{x}-\frac{1}{60}\right)$ *ч*.

Все расстояние от $C$ до $B$ второй поезд должен проехать за $\left(\frac{a}{x}-\frac{1}{60}\right)(b+x)$ *ч*, что составляет $a$ *ч*, так как оба поезда должны прибыть в $B$ одновременно. Отсюда получаем уравнение

$$\left(\frac{a}{x}-\frac{1}{60}\right)(b+x)=a.$$

Решая его, найдем $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 240ab}}{2}$ (второй корень, отрицательный, не удовлетворяет условию).

*Отв.* $\frac{-b + \sqrt{b^2 + 240ab}}{2}$; $\frac{b + \sqrt{b^2 + 240ab}}{2}$.

**188.** Пусть второй кран наполняет бассейн за $x$ *ч*. Тогда за один час второй кран наполнит $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а первый $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x}\right)$ часть.

Для заполнения $\frac{1}{n}$ части бассейна первым краном потребуется $\frac{1}{n} : \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x}\right)$ *ч*, а для заполнения оставшейся части бассейна, равной $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, вторым краном $\left(\frac{n-1}{n} : \frac{1}{x}\right)$ *ч*.

Так как при раздельном действии обоих кранов продолжительность заполнения бассейна равна $a$ *ч*, то составляем следующее уравнение:

$$\frac{1}{n} : \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x}\right) + \frac{n-1}{n} : \frac{1}{x} = a,$$

или

$$(n-1)x^2 - (an + np - 2p)x + anp = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{an + np - 2p \pm \sqrt{(an + np - 2p)^2 - 4anp(n-1)}}{2(n-1)}.$$

Очевидно, что $n > 1$. Задача имеет решение при $(an + np - 2p)^2 \geqslant 4anp$; $a > 0$, $n > 1$, $p > 0$. Выражение $an + np - 2p = n(a + p) - 2p > n \cdot 2p - 2p = 2p(n-1) > 0$, так как $a > p$ (по условию задачи).

Оба найденные корня — положительные числа, ибо свободный член в преобразованном уравнении — положительное число, а второй коэффициент — отрицательное.

**189.** Пусть скорость одного автомобиля будет $x$ *км/ч*. После встречи он движется еще 2 *ч* и, следовательно, проходит $2x$ *км*. Другой автомобиль проходит после встречи $210 - 2x$ *км* за $\frac{9}{8}$ *ч*, поэтому скорость его равна $(210 - 2x) : \frac{9}{8}$. Выезжают автомобили одновременно и поэтому затрачивают одинаковое время на движение до встречи. Вычисляя его для первого и второго автомобилей и приравнивая найденные значения, получим уравнение

$$\frac{210 - 2x}{x} = \frac{2x}{(210 - 2x) : \frac{9}{8}},$$

или

$$(210 - 2x)^2 = \frac{9}{4}x^2,$$

откуда $x_1 = 60$, $x_2 = 420$. Так как путь имеет длину 210 *км*, то второй корень должен быть отброшен, потому что в этом случае часть пути $2x$ оказалась бы больше всего пути.

*Ответ.* Скорость одного автомобиля равна 60 *км/ч*, а другого — 80 *км/ч*.

**190.** Обозначим длину беговой дорожки через $x$ *м*. До первой встречи первый спортсмен, выбегающий из $A$, пробегает $a$ *м*, второй, выбегающий из $B$, $(x - a)$ *м*.

За время, прошедшее от первой до второй встречи, первый спортсмен преодолевает расстояние $(x - a + b)$ *м*, второй $(a + x - b)$ *м*.

Так как продолжительность времени от момента старта до первой встречи одинакова для обоих спортсменов, как одинакова для них продолжительность времени от первой встречи до второй, то первый спортсмен пробежит $a$ *м* во столько раз быстрее (медленнее), чем $(x - a + b)$ *м*, во сколько раз второй пробежит быстрее (медленнее) $(x - a)$ *м*, чем $(a + x - b)$ *м*. Отсюда следует уравнение

$$\frac{a}{x - a + b} = \frac{x - a}{a + x - b}.$$

Преобразовывая его, получим

$$x^2 - (3a - b)x = 0.$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3a - b \,(a > 0,\ b > 0 \text{ и } 3a > b).$$

При $a = b$ $x = 2a$, т. е. встречи произойдут на середине дорожки, и скорости бега обоих спортсменов равны.

**191.** Пусть скорость первого велосипедиста $x$ *км/ч*, тогда за $t$ *ч* он проедет $tx$ *км*. Второй велосипедист за это же время проедет $(s - tx)$ *км* и, следовательно, его скорость будет $\frac{s - tx}{t}$ *км/ч*.

Первый проедет $m$ *км* за $\frac{m}{x}$ *ч*, а второй — за $\frac{mt}{s - tx}$ *ч*. Составим уравнение

$$\frac{m}{x} + q = \frac{mt}{s - tx};$$

$$qtx^2 + x(2mt - qs) - ms = 0,$$

откуда

$$x = \frac{qs - 2mt}{2qt} \pm \frac{\sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}.$$

Корни уравнения действительны, различны и имеют разные знаки, так как свободный член данного уравнения $-ms < 0$ (теорема Виета).

Таким образом, скорость первого велосипедиста будет равна

$$x = \frac{qs - 2mt + \sqrt{q^2s^2 + 4m^2t^2}}{2qt}.$$

Отсюда легко найти скорость второго велосипедиста.

**192.** Обозначим через $x$ *км/ч* скорость первого велосипедиста, тогда скорость второго велосипедиста будет $(28-x)$ *км/ч*. Если обозначим точку встречи велосипедистов через $C$ (рис. 1), то путь $CB$ первый велосипедист проехал за $\frac{28-x}{x}$ *ч*, путь $AC$ второй велосипедист проехал за $\frac{x}{28-x}$ *ч*.

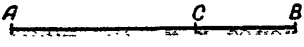


Рис. 1.

Принимая во внимание, что согласно условию задачи первый велосипедист прибыл в пункт $B$ на 35 *мин*, т. е. на $\frac{7}{12}$ *ч*, раньше, чем второй в пункт $A$, получаем уравнение

$$\frac{x}{28-x} - \frac{28-x}{x} = \frac{7}{12},$$

или

$$x^2 + 68x - 1344 = 0,$$

откуда

$$x = -34 \pm \sqrt{1156 + 1344} = -34 \pm 50;$$

$$x_1 = 16 \text{ и } x_2 < 0.$$

Примечание 1. Уравнение $\frac{x}{28-x} - \frac{28-x}{x} = \frac{7}{12}$ можно решить введением вспомогательного неизвестного, полагая $\frac{x}{28-x} = y$.

Примечание 2. Можно и не брать точку встречи велосипедистов, а составить следующее уравнение:

$$\frac{28}{28-x} - \frac{28}{x} = \frac{7}{12}.$$

*Отв.* Скорость первого велосипедиста равна 16 *км/ч*, а скорость второго 12 *км/ч*.

**193.** Расстояние, которое прошел товарный поезд от станции до места встречи с пассажирским поездом, обозначим через $x$ *км*. Скорость пассажирского поезда будет равна $\frac{x}{m}$ *км/ч*, а товарного $\frac{x+d}{n}$ *км/ч*. Принимая во внимание, что до встречи поезда находились в дороге одинаковое время, составим уравнение

$$\frac{x+d}{x} m = \frac{x}{x+d} n;$$

$$\left(\frac{x+d}{x}\right)^2 = \frac{n}{m}.$$

Отсюда

$$\frac{x+d}{x}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\ (n>0,\ m>0,\ d>0,\ x>0).$$

Составим следующую производную пропорцию:

$$\frac{x+d-x}{x}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\sqrt{m}},$$

или

$$x=\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}.$$

Таким образом, задача имеет решение и притом единственное, когда $m$, $n$, $d$ — положительные числа, и, кроме того, $n>m$.

*Отв.* Расстояние между станциями

$$2x+d=d\frac{\sqrt{n}+\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}\ км;$$

скорость пассажирского поезда

$$\frac{x}{m}=\frac{d}{\sqrt{mn}-m}\ км/ч;$$

скорость товарного поезда

$$\frac{x+d}{n}=\frac{d}{n-\sqrt{mn}}\ км/ч.$$

**194.** Пусть $x$ *км* — первоначальная скорость трамвая. Тогда $(x+3)$ — скорость трамвая после увеличения на 3 *км/ч*; $\frac{30}{x}$ *ч* — время, на протяжении которого трамвай проходит рейс со скоростью $x$; $\frac{30}{x+3}$ *ч* — время, на протяжении которого трамвай проходит рейс с повышенной скоростью. Составим уравнение:

$$\frac{30}{x}=\frac{30}{x+3}+0{,}5;$$

$$x^2+3x-180=0,$$

откуда

$$x_1=12;\quad x_2=-15.$$

Для того чтобы узнать скорость трамвая, необходимо к полученному результату прибавить 3. Таким образом, скорость трамвая будет $12+3=15$ *км/ч*, а время, которое затрачивает трамвай на рейс, равно $\frac{30}{15}=2$ *ч*.

*Отв.* Трамвай совершает рейс за 2 *ч*, его скорость равна 15 *км/ч*.

**195.** Пусть $x$ — число экскурсантов. Каждому надо было заплатить $\frac{a}{x}$ руб. При дополнительном заказе на $d$ руб. и уменьше-

нии числа экскурсантов на $b$ человек каждому следовало бы уплатить $\frac{a+d}{x-b}$ руб. или на $c$ рублей больше, чем фактически он внес. Получаем уравнение

$$\frac{a+d}{x-b} - \frac{a}{x} = c,$$

или

$$cx^2 - (bc + d)x - ab = 0, \qquad (1)$$

откуда

$$x = \frac{bc + d \mp \sqrt{(bc+d)^2 + 4abc}}{c}.$$

Так как свободный член в уравнении (1) и второй коэффициент — отрицательные числа ($d$, $b$, $c$ — положительны), то уравнение имеет один отрицательный и один положительный корень.

Радикал следует выбрать со знаком «+ » (дискриминант при всех допустимых значениях $a$, $b$ и $c$ — число положительное). Число $x$ должно быть целым и положительным, поэтому выбор параметров не произвольный.

*Отв.* $\frac{bc + d + \sqrt{(bc+d)^2 + 4abc}}{c}$.

**196.** Обозначим скорость поезда через $x$ *км/ч*; тогда скорость парохода будет ($x$—30) *км/ч*.

Составляем уравнение

$$\frac{80{,}5}{x-30} - \frac{66}{x} = 4 + \frac{15}{60}.$$

*Отв.* Скорость поезда 44 *км/ч*, скорость парохода 14 *км/ч*.

**197.** Пусть $x$ — скорость дирижабля в покоящемся воздухе; тогда $x - 30$ будет скорость против ветра и $x + 30$ скорость по ветру. Составляем уравнение

$$\frac{40}{x+30} + \frac{40}{x-30} = 2{,}5,$$

или

$$x^2 - 32x - 900 = 0.$$

*Отв.* Скорость дирижабля в покоящемся воздухе 50 *км/ч*.

**198.** Пусть $x$ *км/ч* — скорость первого автомобиля, тогда скорость второго будет $(x + a)$ *км/ч*, скорость третьего $(x + 2a)$ *км/ч*. За $t$ часов первый автомобиль проедет $tx$ *км*, третий $(x + 2a)t$ *км*, и расстояние между ними станет равным $(x + 2a)t - xt = 2at$ *км*. Продолжительность времени от момента возвращения третьего автомобиля до встречи с первым составит $\frac{2at}{x + x + 2a} = \frac{at}{x + a}$ *ч*, а расстояние, пройденное первым автомобилем за это время, $\frac{atx}{x + a}$ *км*.

Расстояние от места встречи первого и третьего автомобилей до города $B$ будет равно $\left(s - tx - \frac{atx}{x+a}\right)$ *км*. Его третий автомобиль проедет за

$$\frac{4\left(s - xt - \frac{atx}{x+a}\right)}{5(x+2a)} = \frac{4(sx + sa - 2atx - tx^2)}{5(x+2a)(x+a)} \text{ ч.}$$

Второй автомобиль проедет все расстояние от города $A$ до города $B$ за $\frac{s}{x+a}$ *ч*.

Так как третий автомобиль будет находиться в пути

$$t + \frac{at}{x+a} + \frac{4(sx + sa - 2atx - tx^2)}{5(x+a)(x+2a)} \text{ ч},$$

то можно составить следующее уравнение:

$$t + \frac{at}{x+a} + \frac{4(sx + sa - 2atx - tx^2)}{5(x+a)(x+2a)} = \frac{s}{x+a}. \qquad (1)$$

Упрощая его, получим

$$tx^2 - (s - 12at)x + 2a(10at - 3s) = 0, \qquad (2)$$

откуда

$$x = \frac{s - 12at \pm \sqrt{s^2 + 64a^2t^2}}{2t}.$$

Дискриминант уравнения — число положительное, следовательно, корни уравнения — действительные числа.

1. При $10at - 3s > 0$ $\left(\text{или } s < \frac{10at}{3}\right)$ свободный член и второй коэффициент в уравнении (2) — положительные числа, корни уравнения —отрицательные числа, а потому условию задачи не удовлетворяют.

2. При $s = \frac{10at}{3}$ свободный член в уравнении (2) обращается в нуль, а второй коэффициент — положительное число; корни уравнения не удовлетворяют условию задачи.

3. При $\frac{10at}{3} < s \leqslant 12at$ свободный член в уравнении (2) — отрицательное число, второй коэффициент — положительное число или нуль, поэтому один корень уравнения всегда положительное число (другой — отрицательное), радикал в решении следует выбрать с положительным знаком $(s - 12at \leqslant 0)$.

4. При $s > 12at$ второй коэффициент и свободный член в уравнении (2) — отрицательные числа, корни уравнения разных знаков, радикал следует выбрать с положительным знаком.

При составлении уравнения имелось в виду, что $s > tx + \frac{atx}{x+a}$ или $0 < x < \frac{s - 2ta + \sqrt{s^2 + 4a^2t^2}}{2t}$.

Полученное решение удовлетворяет этому условию. Действительно,

$$x - \frac{s - 2at + \sqrt{s^2 + 4a^2t^2}}{2t} =$$

$$= \frac{s - 12at + \sqrt{s^2 + 64a^2t^2} - s + 2at - \sqrt{s^2 + 4a^2t^2}}{2t} =$$

$$= \frac{\sqrt{s^2 + 64a^2t^2} - (\sqrt{s^2 + 4a^2t^2} + 10at)}{2t} < 0,$$

поскольку

$$\sqrt{s^2 + 4a^2t^2} + 10at > \sqrt{s^2 + 64a^2t^2},$$

что легко доказать ($a$, $b$, $s$ — положительные числа).

*Отв.* $\frac{s - 12at + \sqrt{s^2 + 64a^2t^2}}{2t}$.

**199.** Обозначим искомое число через $x$. Если справа к нему приписать 5, то получим число $10x + 5$. Составляем уравнение

$$10x + 5 = (x + 3)(x - 13),$$

или

$$x^2 - 20x - 44 = 0.$$

*Отв.* 22.

**200.** Обозначим через $x$ *км* расстояние от пункта $A$ до едущего впереди автомобиля после выезда его из этого пункта. Тогда расстояние до пункта $A$ от второго автомобиля будет равно $(a - x)$ *км*, а расстояние между автомобилями $\sqrt{x^2 + (a - x)^2}$ *км*. Мы рассматриваем лишь то положение, когда автомобили находятся на разных направлениях дороги, ибо, если они находятся на одном направлении, расстояние между ними все время будет равно $a$ *км*.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения $\sqrt{x^2 + (a - x)^2}$. Но наименьшее значение квадратного корня из некоторого положительного переменного будет тогда, когда это переменное имеет наименьшее значение. Преобразуем подкоренное выражение:

$$x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right].$$

Как известно, квадратный трехчлен с положительным первым коэффициентом имеет минимальное значение при $x = \frac{a}{2}$.

Следовательно, наименьшее расстояние между автомобилями $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, искомое время $\frac{x}{v} = \frac{a}{2v}$ *ч*.

*Отв.* $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a}{2v}$.

**201.** Пусть $x$ дней предполагаемый срок выполнения заказа вторым заводом, тогда срок выполнения заказа первым заводом был $(x+2)$ дня.

Предполагаемая ежедневная продукция первого завода должна была составлять $\frac{120}{x+2}$ моторов, второго $\frac{80}{x}$ моторов.

Фактический срок выполнения заказа первым заводом $x$ дней, вторым $(x-2)$ дня, фактическая ежедневная продукция первого завода $\left(\frac{120}{x+2}+2\right)$ моторов, второго $\left(\frac{80}{x}+2\right)$ моторов.

Таким образом, общее количество выпущенных заводами моторов $x\left(\frac{120}{x+2}+2\right)+\left(\frac{80}{x}+2\right)(x-2)$, или, как указано в условии, 200.

Отсюда получаем уравнение

$$x\left(\frac{120}{x+2}+2\right)+\left(\frac{80}{x}+2\right)(x-2)=200$$

или

$$x^3+x^2-102x-80=0.$$

Разложим его левую часть на множители:

$$x^3-10x^2+11x^2-110x+8x-80=0;$$

$$x^2(x-10)+11x(x-10)+8(x-10)=0;$$

$$(x-10)(x^2+11x+8)=0,$$

откуда $x_1=10$; $x_2<0$ и $x_3<0$ условию задачи не удовлетворяют.

*Отв.* 12; 10.

**202.** Пусть первому стану для выполнения указанной работы необходимо $x$ *ч*, тогда второму стану на ту же работу, согласно условию задачи, необходимо $(x-8)$ *ч*.

Следовательно, за 1 *ч* первый стан выполнит $\frac{1}{x}$ часть, а второй $\frac{1}{x-8}$ всей работы. Оба стана вместе за 1 *ч* выполнят $\frac{1}{9\frac{3}{5}}=\frac{5}{48}$ частей работы. Составим уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}=\frac{5}{48};$$

$$5x^2-136x+384=0,$$

откуда

$$x_1=24;\quad x_2=3{,}2.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи, согласно которому $x>9\frac{3}{5}$.

*Отв.* Первый стан, работая отдельно, выполняет работу за 24 *ч*, а второй — за 16 *ч*.

**203.** Указание. При решении этой задачи можно обойтись без формул сложных процентов и привести решение к составлению квадратного уравнения.

*Отв.* Приближенно 42%.

**204.** Пусть выработка одного рабочего до реконструкции завода составляла $x$ $m$, тогда после реконструкции она будет равняться $(x + c)$ $m$. До реконструкции количество рабочих было $\frac{a}{x}$, а после реконструкции $\frac{b}{x+c}$. Так как после реконструкции количество рабочих увеличилось на $d$ человек, то

$$\frac{b}{x+c} - \frac{a}{x} = d,$$

или

$$dx^2 + (a - b + cd)x + ac = 0,$$

откуда

$$x = \frac{b - a - cd \pm \sqrt{(b - a - cd)^2 - 4acd}}{2d}.$$

*Отв.* Выработка одного рабочего до реконструкции

$$x = \frac{b - a - cd \pm \sqrt{(b - a - cd)^2 - 4acd}}{2d}.$$

Выработка одного рабочего после реконструкции

$$x + c = \frac{b - a + cd \pm \sqrt{(b - a - cd)^2 - 4acd}}{2d}.$$

**205.** *Отв.* 10 месяцев.

**206.** *Отв.* Первая труба наполняет бассейн за 10 *ч*, вторая — за 15 *ч*.

**207.** Обозначим время, в течение которого третий трактор вспахивает поле, через $x$ *ч*. Тогда первый вспашет поле за $(x + a)$ *ч*, второй — за $(x - b)$ *ч*, а первый и второй вместе — за $(x - c)$ *ч*.

Отсюда следует уравнение

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{x-c},$$

которое после упрощения приводится к виду

$$x^2 - 2cx + bc + ab - ac = 0; \quad x \neq c, \; x \neq b. \tag{1}$$

Решая его, получим

$$x = c \pm \sqrt{c^2 + ac - bc - ab} \quad \text{или} \quad x = c \pm \sqrt{(a + c)(c - b)}.$$

Так как из условия вытекает, что $c > b$, то дискриминант уравнения — положительное число ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$). Если свободный член в уравнении (1) — отрицательное число, то корни уравнения разных знаков, поэтому радикал следует брать с положительным знаком.

*Отв.* $x = c \pm \sqrt{(a + c)(c - b)}$.

**208.** *Отв.* Работа может быть выполнена первой землечерпалкой за 20 дней, второй — за 30 дней и третьей — за 60 дней.

**209.** Если первый раз вылили $x$ *л* спирта, то его осталось $(64-x)$ *л*. Второй раз было отлито $\frac{64-x}{64}\,x$ *л* чистого спирта. Осталось

$$64-x-\frac{64-x}{64}x=\frac{1}{64}(64-x)^2\ л.$$

Составляем уравнение

$$\frac{1}{64}(64-x)^2=49.$$

*Отв.* Первый раз вылили 8 *л* спирта, второй раз 7 *л*.

**210.** Обозначим вес первого раствора через $x$ *кг*, тогда вес второго раствора будет $(10-x)$ *кг*. Процентное содержание безводной серной кислоты в первом растворе $\frac{0{,}8\cdot 100}{x}=\frac{80}{x}$, а во втором $\frac{0{,}6\cdot 100}{10-x}=$ $=\frac{60}{10-x}$. Составляем уравнение

$$\frac{80}{x}-\frac{60}{10-x}=10,$$

откуда $x_1=20$ и $x_2=4$.

Первый корень ($x_1=20$) не удовлетворяет условию задачи, поскольку $x<10$.

*Отв.* 4 *кг и* 6 *кг*.

**211.** Предположим, что из сосуда отлили в первый раз $x$ *л* спирта, тогда в нем осталось $(20-x)$ *л*. После доливания водой в 1 *л* смеси содержалось $\frac{20-x}{20}$ *л* спирта. Таким образом, в $x$ *л* отлитой смеси было $\frac{20-x}{20}\,x$ *л* чистого спирта, а в сосуде осталось $20-x-$ $-\frac{20-x}{20}\,x$ *л*, что по условию задачи составляет $\frac{20}{4}=5$ *л*. Составляем уравнение

$$20-x-\frac{20-x}{20}x=5,$$

или

$$x^2-40x+300=0.$$

*Отв.* 10 *л*.

**212.** Если велосипедисту на весь путь требуется $x$ *ч*, то пешеходу — $(x+c)$ *ч*. Обозначим через $y$ расстояние $AB$ в километрах. До места встречи пешеход прошел $\frac{y(a+b)}{x+c}$ *км*, а велосипедист проехал $\frac{by}{x}$ *км*. Составляем уравнение

$$\frac{(a+b)\,y}{x+c}+\frac{by}{x}=y.$$

Так как $y\neq 0$, то $\frac{a+b}{x+c}+\frac{b}{x}=1$, или

$$x^2-(a+2b-c)\,x-bc=0.$$

Это уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень (поскольку произведение корней равно отрицательному числу — $bc$). Таким образом, имеем

$$x=\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}.$$

*Отв.* Велосипедисту необходимо

$$\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}\ ч,$$

пешеходу

$$\frac{a+2b+c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}\ ч.$$

**213.** Обозначим продолжительность работы первого рабочего через $x$ ч, тогда продолжительность работы второго рабочего будет равна $(x—c)$ ч. Первый зарабатывал в час $\frac{a}{x}$ руб., второй $\frac{b}{x-c}$ руб.

Если бы первый рабочий работал $(x—c)$ ч, а второй $x$ ч, то их заработки были бы соответственно равны

$$\frac{a(x-c)}{x}\text{ руб. и }\frac{bx}{x-c}\text{ руб.}$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{a(x-c)}{x}=\frac{bx}{x-c};$$

$$\left(\frac{x-c}{x}\right)^2=\frac{b}{a}.$$

Решая последнее, получим

$$x=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Задача имеет решения, когда $a>b$, $a>0$, $b>0$, $c>0$. В этом случае $x>c$. Действительно,

$$x-c=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-c=\frac{c\sqrt{a}-c\sqrt{a}+c\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}>0.$$

Второе решение уравнения $x=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ не удовлетворяет условию задачи, так как $c$ больше $x$:

$$x-c=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-c=\frac{c\sqrt{a}-c\sqrt{a}-c\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<0.$$

*Отв.* $\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $\frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

**214.** Пусть $x$ ч будет время, за которое первый рабочий может выполнить всю работу; тогда второй рабочий может выполнить всю работу за $2x$ ч, а третий — за $(x+1)$ ч.

Следовательно, за 1 *ч* первый рабочий выполнит $\frac{1}{x}$ часть всей работы, второй $\frac{1}{2x}$, а третий $\frac{1}{x+1}$. Составим уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2\frac{1}{7}},$$

или

$$14x^2-61x-45=0,$$

откуда

$$x=\frac{61\pm 79}{28},\ \text{т. е.}\ x_1=5;\ x_2=-\frac{9}{14}.$$

Отвечает условию задачи только решение $x_1=5$.

*Отв.* Первый рабочий может выполнить всю работу за 5 *ч*, второй — за 10 *ч* и третий — за 6 *ч*.

**215.** Пусть первому рабочему для выполнения всей работы требуется $x$ дней. Тогда первый рабочий выполнит за один день $\frac{1}{x}$ часть, а оба рабочих вместе $\frac{1}{m}$ часть всей работы.

Следовательно, второй рабочий за один день может исполнить $\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{x}\right)$ часть работы.

Первый $\frac{3}{5}$ всей работы выполнит за $\frac{3}{5}x$ дней, а второй остальную часть $\left(\frac{2}{5}\right)$ — за $\left[\frac{2}{5}:\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{x}\right)\right]$ дней.

Отсюда следует уравнение

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}:\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{x}\right)=n;$$

$$3x^2-(m+5n)x+5mn=0.$$

Решая его, получим

$$x=\frac{5n+m\mp\sqrt{(5n+m)^2-60mn}}{6}.$$

Корни будут действительными и положительными при условии, если $(5n+m)^2\geqslant 60\ mn$ или $25n^2+m^2\geqslant 50\ mn$.

**216.** Обозначим длину одного плеча весов (до точки опоры) через $l$, другого — через $m$, вес тела — через $x$.

Как известно, при равновесии тела (коромысла весов) алгебраическая сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно точки опоры должна равняться нулю. Поэтому

$$\begin{cases} xl=pm; \\ xm=ql. \end{cases}$$

Перемножив эти уравнения, найдем

$$x^2=pq;$$

$$x=\sqrt{pq}.$$

**217.** Пусть первое тело проходит круг за $x$ *сек*, тогда второе пройдет его за $(x+d)$ *сек*. За 1 *сек* первое тело преодолевает $\frac{1}{x}$ часть круга, а второе $\frac{1}{x+d}$ часть. Расстояние между телами через 1 *сек* будет составлять $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+d}$.

Поскольку нам известно, что тела каждые $m$ *сек* встречаются, то

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+d}\right)m=1;$$

$$x^2+dx-md=0,$$

откуда

$$x=\frac{-d\pm\sqrt{d^2+4md}}{2}.$$

По условию $x>0$, поэтому берем радикал с положительным знаком ($d>0$, $m>0$), т. е.

$$x=\frac{-d+\sqrt{d^2+4md}}{2}.$$

Таким образом, первое тело за 1 *сек* проходит

$$\frac{1}{x}=\frac{d+\sqrt{d^2+4md}}{2md}$$ часть круга.

Дальше находим, какую часть круга проходит за 1 *сек* второе тело.

**218.** 1-й способ решения. Обозначим через $x$ одно из слагаемых, тогда второе будет $(a-x)$; имеем

$$y=x(a-x)=ax-x^2=-\left(x^2-2\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)=$$

$$=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

Произведение будет наибольшим, если $x=\frac{a}{2}$.

2-й способ решения. Пусть первое слагаемое равно $\frac{a}{2}+x$, а второе $\frac{a}{2}-x$; $x\geqslant 0$, $x<\frac{a}{2}$. Это всегда возможно, так как сумма слагаемых равна $a$. Тогда $\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2$. Это выражение при $x=0$ имеет максимум. Откуда первое слагаемое равно второму и равно $\frac{a}{2}$.

*Отв.* $\frac{a}{2}$.

**219.** Пусть $x$ — сторона прямоугольника. Тогда другая сторона прямоугольника будет равна $\sqrt{4R^2-x^2}$. Так как площадь пря-

моугольника должна равняться площади квадрата со стороной $k$, то

$$x\sqrt{4R^2-x^2};=k^2;$$

$$x^4-4R^2x^2+k^4=0,$$

откуда

$$x^2=2R^2+\sqrt{4R^4-k^4}.$$

Чтобы корень уравнения был действительным числом, необходимо и достаточно выполнения условия $4R^4 \geqslant k^4$, или $R \geqslant \frac{k\sqrt{2}}{2}$.

**220.** Пусть $x$ — одно слагаемое, тогда $(a-x)$ — другое слагаемое. Сумма квадратов их будет равна $x^2+(a-x)^2$. Задача сводится к нахождению минимального значения $x$. Преобразуем сумму квадратов:

$$x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2=2\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}\right].$$

Как известно, квадратный трехчлен с положительным первым коэффициентом имеет минимальное значение при $x=\frac{a}{2}$. Следовательно, сумма квадратов искомых слагаемых будет наименьшей, если эти слагаемые равны, т. е. каждое будет равно $\frac{a}{2}$.

**221.** Число стульев в каждом ряду обозначим через $x$, тогда число рядов равно $\frac{a}{x}$. Составим уравнение:

$$(x+b)\left(\frac{a}{x}-c\right)=1{,}1a;$$

$$10cx^2+(a+10bc)x-10ab=0,$$

откуда

$$x=\frac{-(a+10bc)\pm\sqrt{(a+10bc)^2+400abc}}{20c}.$$

Если радикал взять с отрицательным знаком, то $x<0$, что не удовлетворяет условию задачи.

*Ответ.* Число стульев в каждом ряду

$$\frac{\sqrt{(a+10bc)^2+400abc}-(a+10bc)}{20c}.$$

**222.** Пусть процент изменения температуры будет $x$. Тогда максимальная дневная температура $a+\frac{ax}{100}=a\left(1+\frac{x}{100}\right)$ *град.* К ночи она упала на $a\left(1+\frac{x}{100}\right)\frac{x}{100}$ *град* и стала равной

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)-a\left(1+\frac{x}{100}\right)\frac{x}{100}=a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=$$

$$=a\left[1-\left(\frac{x}{100}\right)^2\right] \text{ град.}$$

Отсюда следует уравнение

$$a\left[1-\left(\frac{x}{100}\right)^2\right]=b.$$

Решая его, найдем $x=100\sqrt{1-\frac{b}{a}}$; $a>0$, $b>0$, $b<a$.

**223.** Из условия задачи известно, что в первый и третий дни было выгружено $600\ \frac{2}{3}=400\ m$. Следовательно, во второй день было выгружено $600\ m-400\ m=200\ m$.

Пусть в первый день выгружено $x\ m$, тогда выгрузка в третий день составит $(400-x)\ m$. Уменьшение выгрузки во второй день по сравнению с первым $(x-200)\ m$, что составляет $\frac{(x-200)\ 100}{x}\ \%$ от выгрузки первого дня. Уменьшение выгрузки в третий день по сравнению со вторым $200-(400-x)=(x-200)\ m$, что составляет $\frac{(x-200)\ 100}{200}=\frac{x-200}{2}\ \%$ выгрузки второго дня.

Составляем уравнение

$$\frac{x-200}{2}-\frac{(x-200)\ 100}{x}=5,$$

откуда $x_1=250$ и $x_2=160$. Второе решение ($x_2=160$) условию задачи не удовлетворяет.

*Отв.* В первый день было выгружено 250 $m$, во второй 200 $m$, в третий 150 $m$.

**224.** Обозначим через $x$ количество процентов меди в первом сплаве. Тогда процент содержания меди во втором сплаве составит $(x+40)$. Масса первого сплава $\frac{6\cdot 100}{x}$ *кг*, второго $\frac{12\cdot 100}{x+40}$ *кг*, а вновь образованного $\frac{18\cdot 100}{36}$ *кг*.

Отсюда и из условия получаем следующее уравнение:

$$\frac{100\cdot 6}{x}+\frac{100\cdot 12}{x+40}=\frac{100\cdot 18}{36};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+40}=\frac{1}{12}.$$

Решая его, найдем $x=20$.

*Отв.* 20 и 60%.

**225.** Пусть $x$ — количество метров тоннеля, проходимое за день первой машиной; за 60 дней она пройдет $60x$ *м*. Вторая машина должна пройти всего

$$\frac{\left(60-\frac{60x\cdot 30}{100}\right)100}{\frac{80}{3}}=\frac{45\,(10-3x)}{2}\ м,$$

а за один день

$$\frac{45(10-3x)}{2\cdot 60}=\frac{3(10-3x)}{8}\ м.$$

$\frac{2}{3}$ всей работы второй машины составляет $\frac{45(10-3x)\cdot 2}{2\cdot 3}=15(10-3x)\ м$, а $\frac{3}{10}$ работы первой машины $\frac{3\cdot 60x}{10}=18x\ м$. Первая машина пройдет $15(10-3x)\ м$ за $\frac{15(10-3x)}{x}$ дней, а вторая $18x\ м$ за $\frac{18x}{\frac{3}{8}(10-3x)}=\frac{48x}{10-3x}$ дней.

Отсюда и из условия задачи следует уравнение

$$\frac{15(10-3x)}{x}-\frac{48x}{10-3x}=6;$$

$$7x^2-64x+100=0.$$

Решая его, найдем

$$x_1=2;\quad x_2=\frac{50}{7}.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как 30% всей работы первой машины составляло бы $\frac{60\cdot 50\cdot 30}{7\cdot 100}=\frac{900}{7}\ м>60\ м$, что противоречит данным задачи.

Первая машина проходит за день $2\ м$, вторая $\frac{3(10-3x)}{8}=1{,}5\ м$.

*Отв.* 2 *м* и 1,5 *м*.

## Иррациональные уравнения

**226.** Полагая $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}^{*}=y$, получим уравнение

$$y^2+my-n=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+4n}}{2}.$$

Так как $y>0$ (из условия следует, что $n\geqslant 0$), то пригоден только корень

$$y_1=\frac{-m+\sqrt{m^2+4n}}{2}.$$

*Отв.* $x=y^2=\frac{1}{4}(\sqrt{m^2+4n}-m)^2;\quad x\geqslant 0.$

---

* В дальнейшем под знаком $\sqrt{\ }$ подразумевается арифметическое значение корня (т. е. взятое со знаком +), если он действительный; если же он мнимый, то берем его с таким знаком, чтобы коэффициент при $i$ был положительный.

**227.** Так как $x = (\sqrt{x})^2$, то вынесем $\sqrt{x}$ за скобку:

$$\sqrt{x}\,(\sqrt{3x} + m\sqrt{x} + 1) = 0.$$

Если

$$\sqrt{x} = 0, \quad \text{то} \quad x = 0;$$

если же

$$\sqrt{3x} + m\sqrt{x} + 1 = 0,$$

то

$$\sqrt{x}\,(\sqrt{3} + m) = -1,$$

откуда

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{\sqrt{3} + m}, \qquad x = \frac{1}{(\sqrt{3} + m)^2}.$$

*Отв.* $x = \dfrac{1}{(\sqrt{3} + m)^2}$.

**228.** Если уравнение имеет корень, то он находится среди значений $|x| > \sqrt{6}$.

Представим данное уравнение в таком виде:

$$x^2 - 6 + \sqrt{x^2 - 6} - 6 = 0.$$

Обозначив $\sqrt{x^2 - 6} = y$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 6 = 0$, откуда $y_1 = 2$; $y_2 = -3$.

Следовательно, получим $\sqrt{x^2 - 6} = 2$, $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = -\sqrt{10}$; значение $y_2 = -3$ не рассматриваем.

Проверкой убеждаемся, что искомому иррациональному уравнению удовлетворяют оба решения $x_1$ и $x_2$.

Этот пример можно решить и иначе. Переносим $x^2 - 5$ в правую часть (уединяем радикал):

$$\sqrt{x^2 - 6} = 12 - x^2;$$

$$x^2 - 6 = (12 - x^2)^2; \quad x^4 - 25x^2 + 150 = 0.$$

Отсюда

$$x^2 = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2}; \qquad x = \pm\sqrt{\frac{25 \pm 5}{2}};$$

$$x_1 = \sqrt{15}; \; x_2 = -\sqrt{15}; \; x_3 = \sqrt{10}; \; x_4 = -\sqrt{10}.$$

Так как рассматриваем только арифметическое значение корня, то $x_1$ и $x_2$ непригодны, иначе оказалось бы

$$+\sqrt{x^2 - 6} = -3.$$

Появление посторонних корней явилось следствием возведения в степень.

*Отв.* $x_1 = \sqrt{10}$; $x_2 = -\sqrt{10}$.

**229.** Так как

$$\begin{cases} 2x+1>0; \\ 1-2x>0; \\ 1-4x^2>0; \\ x>0, \end{cases} \quad \text{то } 0<x<\frac{1}{2}.$$

Замечая, что $(\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-2x})=4x$, данное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x}=\frac{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-2x})}{\sqrt{1-4x^2}},$$

или

$$(\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x})\left(1-\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-4x^2}}\right)=0.$$

Но $\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x}\neq 0$, следовательно,

$$1-\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-4x^2}}=0,$$

или

$$\sqrt{1-4x^2}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-2x}; \quad 1-4x^2\neq 0.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$1-4x^2=2x+1-2\sqrt{1-4x^2}+1-2x;$$

$$1-4x^2+2\sqrt{1-4x^2}-2=0.$$

Обозначим $\sqrt{1-4x^2}=y$, тогда будем иметь $y^2+2y-2=0$. Отсюда $y=-1+\sqrt{3}$ (отрицательное значение $y$ отбрасываем).

Следовательно,

$$\sqrt{1-4x^2}=\sqrt{3}-1; \quad 1-4x^2=4-2\sqrt{3};$$

$$4x^2=2\sqrt{3}-3,$$

откуда

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}(4-2\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)\approx 0{,}34.$$

**230.** Из условия очевидно, что $x\geqslant 1$.

Обозначая $\sqrt{x-1}=y$, найдем, что $y^2-2y=0$, откуда $y_1=0$ и $y_2=2$.

Таким образом, $x_1=1$; $x_2=5$. Оба корня удовлетворяют уравнению.

*Ответ:* $x_1=1$; $x_2=5$.

**231.** Решение уравнения упрощается, если разложить подкоренные выражения на множители и вынести общий множитель за скобки, т. е.

$$\sqrt{x+1}\,(\sqrt{4x+5}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1})=0.$$

Приравнивая первый множитель нулю, находим $x_1=-1$.

Приравнивая второй множитель нулю и решая уравнение

$$\sqrt{4x+5}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1},$$

получаем

$$7x^2-26x-45=0,$$

откуда

$$x_2=5;\quad x_3=-\frac{9}{7}.$$

Решение $x_3=-\frac{9}{7}$ не рассматриваем, так как это посторонний корень.

*Ответ.* $x_1=-1$; $x_2=5$.

**232.** Возводя в квадрат обе части уравнения, получим

$$x\sqrt{x^2+24}-x^2-2x=0.$$

Отсюда следует, что либо $x=0$, либо $\sqrt{x^2+24}-x-2=0$.

Корень последнего уравнения будет $x=5$. Оба найденные корня удовлетворяют условию.

*Ответ:* $x_1=0$; $x_2=5$.

**233.** Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)^2\left(\frac{1+bx}{1-bx}\right)=1;\quad (1-ax)^2(1+bx)=(1+ax)^2(1-bx).$$

После упрощения получим уравнение

$$a^2bx^3=(2a-b)x,$$

откуда

$$x_1=0;\quad x_2=\sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}};\quad x_3=-\sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}}.$$

Очевидно, что первый корень удовлетворяет уравнению. Что касается $x_2$ и $x_3$, то вместо проверки их подстановкой проанализируем уравнение и полученные решения. Так как в выражении $\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$ берется только арифметическое значение корня, то $\frac{1-ax}{1+ax}>0$. Кроме того, $x=\pm\sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}}$ должен быть действительным числом. Эти соотношения равносильны следующим:

$$(1+ax)(1-ax)>0;\quad \frac{2a-b}{a^2b}\geqslant 0$$

или

$$x^2 < \frac{1}{a^2}; \tag{1}$$

$$\frac{2a-b}{a^2b} \geqslant 0. \tag{2}$$

Если эти условия выполнены, то $x_2$ и $x_3$ удовлетворяют уравнению. Упростим их. Из соотношения (2) получаем

$$\frac{2a-b}{a^2b} \geqslant 0;\ \frac{2a-b}{b} \geqslant 0;\ \frac{2a}{b} - 1 \geqslant 0;\ \frac{2a}{b} \geqslant 1;\ \frac{a}{b} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Из сопоставления соотношений (1) и (2) имеем

$$x^2 = \frac{2a-b}{a^2b} < \frac{1}{a^2};\ \frac{2a-b}{b} < 1;\ \frac{2a}{b} - 1 < 1;\ \frac{2a}{b} < 2;\ \frac{a}{b} < 1,$$

поэтому $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} < 1$.

Чтобы данное в условии уравнение имело смысл, необходимо также выполнение неравенства

$$\frac{1+bx}{1-bx} > 0 \quad \text{или} \quad x^2 < \frac{1}{b^2}.$$

Докажем, что это неравенство выполняется.
Действительно,

$$x^2 - \frac{1}{b^2} = \frac{2a-b}{a^2b} - \frac{1}{b^2} = \frac{-(a-b)^2}{a^2b^2} < 0; \quad a \neq b,$$

так как

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} < 1.$$

Можно также показать, что если $x = x_2$ удовлетворяет уравнению, то ему удовлетворяет и $x = x_3$.

Обозначим через $y$ и $z$ значения указанных ниже выражений при $x = x_2$:

$$\frac{1-ax_2}{1+ax_2} = y \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{1+bx_2}{1-bx_2}} = z.$$

Тогда $yz = 1$. Подставляя в левую часть уравнения вместо $x$ его значение $x_3$, получим $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}$, что также равно единице.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что все три найденных корня удовлетворяют уравнению.

**234.** Очевидно, что $|x| > \sqrt{5}$. Принимая во внимание, что $x - \sqrt{x^2-5} \neq 0$ и $x + \sqrt{x^2-5} \neq 0$, и приводя уравнение к общему знаменателю, получим $\sqrt{x^2-5} - 2 = 0$, откуда $x_1 = 3$; $x_2 = -3$.

*Отв.* $x_1 = 3$; $x_2 = -3$.

**235.** В данном случае можно применить способ замены неизвестных. Для этого перепишем уравнение так:

$$\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 - 3x + 5 = 12.$$

Обозначая $\sqrt{x^2-3x+5}=y$, получим уравнение $y^2+y-12=0$. Берем только положительное значение корня $y=3$, тогда $x_1=4$; $x_2=-1$.

Примечание. Следует отметить, что подкоренное выражение $x^2-3x+5>0$ при любом значении $x$, так как дискриминант этого трехчлена меньше нуля.

*Отв.* $x_1=4$; $x_2=-1$.

**236.** Обозначим $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=y$, тогда получим квадратное уравнение $y^2-y=2$ или $y^2-y-2=0$, откуда $y_1=2$, $y_2=-1$; $y_2$ мы не рассматриваем, так как $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}$ должно быть положительным.

Имеем

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=2.$$

После простых преобразований получим уравнение

$$x^4+15x^2-16=0,$$

откуда $x_1=1$ и $x_2=-1$; $x_3$ и $x_4$ — мнимые корни, а $x_2=-1$ не удовлетворяет условию.

*Отв.* $x=1$.

**237.** Обозначим $\sqrt{2x-5}=z$; $z>0$ и $x\geqslant\frac{5}{2}$. Тогда заданное уравнение будет

$$\sqrt{z^2+2z+1}+\sqrt{z^2+6z+9}=14,$$

откуда

$$z=5.$$

Следовательно,

$$x=15.$$

*Отв.* $x=15$.

**238.** Первое подкоренное выражение преобразуем так:

$$x+3-4\sqrt{x-1}=(x-1)-4\sqrt{x-1}+4=(\sqrt{x-1}-2)^2.$$

Аналогично второе подкоренное выражение равно $(\sqrt{x-1}-3)^2$. Тогда данное уравнение будет

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1. \qquad (1)$$

Здесь возможны три случая:

$$\sqrt{x-1}>3;\quad \sqrt{x-1}<2;\quad 2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3.$$

В первом случае уравнение (1) будет

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1,\quad \text{или}\quad \sqrt{x-1}=3;$$

этот результат не согласуется с условием $\sqrt{x-1}>3$.

Во втором случае уравнение (1) будет

$$-(\sqrt{x-1}-2)-(\sqrt{x-1}-3)=1,\quad \text{или}\quad \sqrt{x-1}=2;$$

этот результат также не согласуется с условием $\sqrt{x-1}<2$.

В третьем случае уравнение (1) будет

$$(\sqrt{x-1}-2)-(\sqrt{x-1}-3)=1; \qquad (2)$$

оно удовлетворяется при всех $x \geqslant 1$, для которых

$$2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3.$$

Так как величина $\sqrt[3]{x-1}>0$, то все три части неравенства можно возвести в квадрат, после чего находим

$$5 \leqslant x \leqslant 10.$$

*Отв.* $5 \leqslant x \leqslant 10$.

**239.** *Отв.* $x=\frac{25}{16}$.

**240.** Обозначим $\sqrt[3]{x}=y$, тогда получим уравнение $y^2-y-6=0$, откуда $y_1=3$; $y_2=-2$.

Таким образом, решения данного иррационального уравнения будут следующие:

$$\sqrt[3]{x_1}=3; \quad \sqrt[3]{x_2}=-2.$$

*Отв.* $x_1=27$; $x_2=-8$.

**241.** Прежде всего заметим, что $x \geqslant 1$. Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$2-x=1-3\sqrt{x-1}+3(x-1)-(x-1)\sqrt{x-1};$$

$$4(x-1)=\sqrt{x-1}\,(x+2);$$

$$\sqrt{x-1}\,(4\sqrt{x-1}-x-2)=0,$$

откуда $x_1=1$ и $4\sqrt{x-1}=x+2$.

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат и преобразуя, придем к следующему уравнению: $x^2-12x+20=0$, корни которого будут $x_2=2$; $x_3=10$.

*Отв.* 1; 2; 10.

**242.** Чтобы не было мнимых чисел, должно выполняться условие $|x| \geqslant 1$. Принимая во внимание, что при этом условии $x-\sqrt{x^2-1} \neq 0$ и $x+\sqrt{x^2-1} \neq 0$, умножим обе части данного уравнения на

$$(x-\sqrt{x^2-1})\,(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Тогда получим уравнение $x^2=9$, откуда $x_1=3$; $x_2=-3$.

Оба решения отвечают условию $|x| \geqslant 1$ и удовлетворяют исходному иррациональному уравнению.

*Отв.* $x_1=3$; $x_2=-3$.

**243.** Возводим обе части данного уравнения в квадрат. После тождественных преобразований получим $\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$. При возведении в квадрат есть опасность ввести посторонний корень, удовлетворяющий уравнению, отличающемуся от данного знаком пра-

вой части. Уравнение $\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$ имеет единственный корень $x=21$. Этот корень не является посторонним, так как

$$\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}>\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{21}}.$$

*Отв.* $x=21$.

Примечание. Из условия очевидно, что $0<x<28$.

Если перенести все члены уравнения влево, то возведение обоих частей исходного уравнения в квадрат равносильно умножению преобразованного уравнения с правой частью, равной нулю, на выражение

$$\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}+\sqrt[4]{28},$$

но последнее не может равняться нулю. Отсюда — отсутствие посторонних корней.

Это замечание справедливо и для уравнения $\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$.

**244.** Обозначая $\sqrt[4]{1+3x}=z$, получим квадратное уравнение

$$z^2-3z+2=0.$$

Далее легко находим, что исходное уравнение имеет два корня $x_1=0$; $x_2=5$.

*Отв.* $x_1=0$; $x_2=5$.

**245.** Из условия следует, что $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат и делая некоторые преобразования, получим

$$\frac{1}{x^2(2-x^2)}+\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}=2.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно $\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}$. Решая его, найдем

$$\left(\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}\right)_I=1 \text{ и } \left(\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}\right)_{II}=-2.$$

Обозначим $\frac{1}{x}=u$ и $\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=v$. На основании условия и последних результатов приходим к следующим системам уравнений относительно $u$ и $v$:

$$\begin{cases} u+v=2; \\ uv=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u+v=2; \\ uv=-2. \end{cases}$$

Первая система дает решение $u=v=1$, следовательно, $x_1=1$.

Из второй системы определяем

$$u=1-\sqrt{3};$$

$$v=1+\sqrt{3};\quad v>0,$$

поэтому

$$x_2=\frac{1}{1-\sqrt{3}}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Проверим второе значение $x$.

Для этого вычислим предварительно $\sqrt{2-x^2}$:

$$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=1-\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}=1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=2.$$

Оба значения $x$ удовлетворяют уравнению.

*Отв.* $1;\ 1-\sqrt{3}$.

**246.** Очевидно, что $x\neq 0$, так как при $x=0$ левая и правая части данного уравнения теряют смысл.

После двукратного возведения левой и правой частей уравнения в квадрат получим

$$\frac{1}{x}-\frac{4}{3}=0,$$

откуда

$$x=\frac{3}{4}.$$

Рекомендуем читателю проверить решение.

*Отв.* $x=\frac{3}{4}$.

**247.** Если данное уравнение имеет корень, то он удовлетворяет условию

$$0<x<1.$$

Перепишем уравнение так:

$$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1-\sqrt{x}.$$

После двукратного возведения левой и правой частей данного уравнения в квадрат получим

$$-5x+4\sqrt{x}=0,$$

или

$$\sqrt{x}(5\sqrt{x}-4)=0,$$

откуда, принимая во внимание, что $\sqrt{x}>0$,

$$5\sqrt{x}-4=0,\quad x=\frac{16}{25}.$$

*Отв.* $x=\frac{16}{25}$.

**248.** Если уравнение имеет корень, то он находится среди значений $x>6$.

Приняв во внимание, что ни один из знаменателей в данном уравнении не обращается в нуль при значениях $x>6$, умножим левую и правую части уравнения на $\sqrt{x^2-36}$:

$$\sqrt{x+6}-(2+\sqrt{x-6})=0.$$

*Отв.* $x=10$.

**249.** Возвысим обе части уравнения в куб:

$$\sqrt[3]{64-x^2}\,(\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{8+x})=0.$$

Выражение в скобках, согласно условию, равно $2\sqrt[3]{2}$, следовательно,

$$\sqrt[3]{64-x^2}=0;$$

$$x^2=64,$$

откуда $x_1=8$; $x_2=-8$.

*Отв.* $x_1=8$; $x_2=-8$.

**250.** Обозначим $u=\sqrt[5]{32-x}$, $v=\sqrt[5]{x}$, тогда из условия примера следует, что $u+v=2$, а из самих обозначений вытекает зависимость $u^5+v^5=32$.

Разложив $u^5+v^5$ на множители и заменив $u+v=2$, $u^2+v^2=4-2uv$, получим

$$(u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4)=32;$$

$$(u^2+v^2)^2-uv(u^2+v^2)-u^2v^2=16;$$

$$5uv(uv-4)=0.$$

Из последнего равенства заключаем, что либо $u=0$, тогда $x_1=32$, либо $v=0$, тогда $x_2=0$, либо $uv=4$.

Если $uv=4$, то из $u^5v^5=(32-x)x$ следует уравнение $x^2-32x+4^5=0$, корни которого комплексные.

*Отв.* $x_1=32$; $x_2=0$.

**251.** *Отв.* $x=a^2-\left(\frac{b-2a}{3\sqrt[3]{b}}\right)^3$, если $a^2-\left(\frac{b-2a}{3\sqrt[3]{b}}\right)^3>0$. При $a=0$ $b$ должно равняться 0, а $x$ — любому неотрицательному числу.

**252.** Указание. После соответствующих преобразований получим квадратное уравнение

$$x^2+31x-222=0.$$

*Отв.* $x_1=6$; $x_2=-37$.

**253.** Запишем исходное уравнение так:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{x+3}.$$

Применяя формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, находим

$$x+1+x+2+3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}\,(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2})=$$
$$=-(x+3);$$

$$\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}=x+2;$$

$$(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)^3.$$

Исходному уравнению удовлетворяет решение $x=-2$.

*Отв.* $x=-2$.

254. После деления левой и правой частей уравнения на $\sqrt[m]{x^2(x+a)}$; $x \geqslant 0$ получим

$$\sqrt[m]{\frac{x+a}{x}} + 2\sqrt[m]{\frac{x}{x+a}} = 3.$$

Обозначим $\sqrt[m]{\frac{x+a}{x}} = y$, тогда $\sqrt[m]{\frac{x}{x+a}} = \frac{1}{y}$, следовательно,

$$y + \frac{2}{y} = 3;$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0,$$

откуда $y_1 = 1$; $y_2 = 2$. Решение $y_1 = 1$ не удовлетворяет условию, так как $a \neq 0$.

Примечание. Разделив правую и левую части уравнения на $\sqrt[m]{x^2(x+a)}$, мы уменьшили множество допустимых значений неизвестного, а поэтому могли уменьшить и число корней. Действительно, если $\sqrt[m]{x^2(x+a)} = 0$, то $x = 0$ или $x + a = 0$, но $x = -a$ не удовлетворяет уравнению, а $x = 0$ — удовлетворяет.

*Отв.* $x_1 = \frac{a}{2^m - 1}$; $x_2 = 0$.

255. Уединив радикал, возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x^2 - 2ax = -x\sqrt{x^2 + a^2}.$$

Это уравнение имеет корень $x = 0$. Для нахождения других корней разделим обе части уравнения на $x$ (это допустимо, так как теперь $x \neq 0$) и после этого снова возведем их в квадрат:

$$x = \frac{3}{4}a.$$

При проверке можно прийти к ошибочному заключению, что значения $x = 0$ и $x = \frac{3}{4}a$ всегда удовлетворяют данному уравнению. Чтобы лучше уяснить суть ошибки, рассмотрим числовой пример. Когда $a = -1$, данное уравнение имеет вид

$$x = -1 - \sqrt{1 - x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ни $x = 0$, ни $x = \frac{3}{4}a = -\frac{3}{4}$ не удовлетворяют этому уравнению (оно не имеет решений). Так же будет и при любом другом отрицательном значении $a$.

Источник ошибки в том, что величина $\sqrt{a^2}$ считается равной $a$, тогда как это верно лишь при $a \geqslant 0$. При $a < 0$ мы имеем $\sqrt{a^2} = -a$, например, $\sqrt{(-3)^2} = -(-3)$.

Примечание 1. Особо следует заметить, что равенство $\sqrt{x^2} = x$ (где $\sqrt{x^2}$ есть арифметический корень) верно только при $x \geqslant 0$. При отрицательном же значении $x$ оно не верно; вместо него имеет место равенство $\sqrt{x^2} = -x$. Оба случая можно объединить равенством $\sqrt{x^2} = |x|$. Так, если $x = -3$, то $\sqrt{(-3)^2} =$

$=\sqrt{9}=-(-3)$ (при этом $\sqrt{(-3)^2}$ является арифметическим корнем, так как подкоренное число $(-3)^2$ положительно и значение корня взято положительным). Можно также написать $\sqrt{(-3)^2}=|3|$.

На основании рассмотренного примечания можем написать

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Пользуясь этой формулой, найдем, что при $x=0$ (когда левая часть уравнения обращается в нуль) правая часть равна $a-\sqrt{a^2}=a-|a|$. При $a\geqslant 0$ это выражение тоже равно нулю, а при $a<0$ оно равно $2a$. Следовательно, если $a\geqslant 0$, то значение $x=0$ есть корень уравнения; если же $a<0$, то $x=0$ не является корнем. Сказанное относится и к значению $x=\frac{3}{4}a$.

*Отв.* Если $a\geqslant 0$, то $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{4}a$;
если $a<0$, то уравнение не имеет решений.

Примечание 2. Из условия очевидно, что $x<a$. Кроме того, при положительных значениях $x$ должно быть справедливо неравенство $a^2>x\sqrt{a^2+x^2}$ (знак равенства исключается) или $x^4+a^2x^2-a^4<0$.

Решая последнее неравенство, найдем, что $x<\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\cdot a$ ($a$ в этом случае не может быть отрицательным по условию), или $x<0{,}786a$ (с точностью до 0,001).

Таким образом, при $a>0$ $x<0{,}786a$, при $a<0$ $x<a$.

Полученные корни $x_1=0$ и $x_2=\frac{3}{4}a$ при отрицательных значениях $a$ не могут удовлетворять уравнению, так как они превышают значения $a$.

**256.** Обозначим $x=y^3$; $x\neq 0$. Тогда имеем уравнение

$$2y^4-3y^2-20=0,$$

откуда, сделав подстановку $y^2=t$, получим $t_1=4$; $t_2=-\frac{5}{2}$. Следовательно, $y^2=4$, $y_1=2$; $y_2=-2$. Решение $t_2=-\frac{5}{2}$ не рассматриваем, так как в области действительных чисел квадрат числа не может быть отрицательным.

Переходя к неизвестному $x$, получим

$$x_1=2^3;\quad x_2=(-2)^3.$$

*Отв.* $x_1=8$; $x_2=-8$.

**257.** После возведения левой и правой частей уравнения в квадрат и некоторых преобразований получим

$$\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)-2\sqrt{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}=0;\quad 0<x\leqslant a.$$

Обозначим $\sqrt{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}=y$, тогда $y^2-2y=0$, откуда $y_1=0$; $y_2=2$.

Подставим полученные значения:

1. $\sqrt{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}=0$, или $a^2-x^2=0$,

откуда $x_1=a$; $x_2=-a$.

Корень $x_2$ не подходит, так как согласно условию $a>0$.

2. $\frac{a}{x}-\frac{x}{a}=4$; $x^2+4ax-a^2=0$,

откуда $x_3=-2a+a\sqrt{5}$; $x_4=-2a-a\sqrt{5}$.

Корень $x_4$ не удовлетворяет уравнению.

*Ответ.* $x=a$; $x=-2a+a\sqrt{5}$.

**258.** После возведения левой и правой частей в куб по формуле $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$ получим

$$x+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\left[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}\right]+2x-3=12(x-1).$$

Выражение в квадратных скобках по условию можно заменить выражением $\sqrt[3]{12(x-1)}$:

$$\sqrt[3]{x(2x-3)\cdot 12(x-1)}=3(x-1).$$

Возведя обе части в куб и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$(x-1)\left[12x(2x-3)-27(x-1)^2\right]=0.$$

Это уравнение можно разбить на два:

$$x-1=0 \text{ и } 12x(2x-3)-27(x-1)^2=0,$$

откуда $x_1=1$ и $x_2=3$.

*Ответ.* $x_1=1$; $x_2=3$.

**259.** 1-й способ решения. Перепишем данное уравнение так:

$$\sqrt[3]{x+45}=1+\sqrt[3]{x-16}.$$

Возведя правую и левую части уравнения в куб и произведя преобразования, получим

$$(\sqrt[3]{x-16})^2+\sqrt[3]{x-16}-20=0.$$

Обозначая $\sqrt[3]{x-16}=z$, будем иметь $z^2+z-20=0$, откуда $z_1=4$; $z_2=-5$. Следовательно, $\sqrt[3]{x-16}=4$; $x-16=64$; $x_1=80$ и $\sqrt[3]{x-16}=-5$; $x-16=-125$; $x_2=-109$.

2-й способ решения. Возведя обе части исходного уравнения в куб, получим

$$\sqrt[3]{x+45}\cdot\sqrt[3]{x-16}=20;$$

$$(x+45)(x-16)=64\cdot 125;$$

$$(x+45)(x-16)=(-64)(-125).$$

Так как разность между множителями, стоящими в правой части, и разность между множителями левой части по абсолютной величине равна 61, то полученные уравнения возможны либо при $x + 45 = 125$, либо при $x + 45 = -64$. Отсюда $x_1 = 80$; $x_2 = -109$.

**260.** Если уравнение имеет корень, то он находится среди значений $x \geqslant 6$.

Возведем дважды обе части данного уравнения в квадрат:

$$4x - 12 = \sqrt{(7x + 1)(3x - 18)};$$

$$5x^2 - 27x = 162;$$

$$\text{отсюда } x_1 = 9; \quad x_2 = -\frac{18}{5}.$$

Из двух полученных решений лишь одно $x_1 = 9$ удовлетворяет условию $x > 6$ и, следовательно, может быть корнем данного иррационального уравнения. В связи с тем, что двукратным возвышением данного уравнения в квадрат мы могли внести посторонние корни, решение $x_1 = 9$ необходимо проверить.

Разъясним более подробно, почему при решении иррациональных уравнений при помощи возведения в степень полученные решения необходимо проверять.

Рассмотрим то же самое уравнение

$$\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = \sqrt{2x + 7}. \qquad (1)$$

Совершенно очевидно, что возведение левой и правой частей этого уравнения в квадрат равнозначно умножению его в приведенном к нулю виде

$$\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} - \sqrt{2x + 7} = 0$$

на функцию

$$\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} + \sqrt{2x + 7}, \qquad (2)$$

а повторное возведение в квадрат эквивалентно умножению на функцию

$$4x - 12 + \sqrt{(7x + 1)(3x - 18)}. \qquad (3)$$

Отсюда понятно, что если функцию (2) или (3) имеют корни, то полученные решения могут быть корнями данных функций и не будут удовлетворять исходному уравнению (1).

В данном случае, даже не выполняя проверки, можно утверждать, что решение $x = 9$ является корнем данного уравнения (1), ибо функции (2) и (3), как легко убедиться, не имеют корней ни при каких значениях $x > 6$.

Примечание. Необходимо отметить, что посторонние корни, получаемые при возведении в степень обеих частей уравнения, могут являться решениями над полем комплексных чисел или быть кратными, например

$$\sqrt[3]{x} = 1. \qquad (1)$$

Уравнение $x-1=0$ равносильно произведению уравнения $\sqrt[3]{x}-1=0$ на $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)+1=0$ (2). Последнее при подстановке $\sqrt[3]{x}=y$ преобразуется в уравнение $y^2+y+1=0$, которое имеет 2 комплексных корня. Поэтому $x=1$ можно рассматривать как корень, удовлетворяющий уравнениям (1) и (2), но в последнем при комплексных значениях $\sqrt[3]{x}$.

*Отв.* $x=9$.

**261.** Обозначим $\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}=y$, тогда $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=\dfrac{1}{y}$.

После подстановки получаем

$$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2};\quad 2y^2-5y+2=0,\quad \text{откуда}\quad y_1=2;\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

1. Рассмотрим $\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}=2$, или $3x^2+10x+13=0$, откуда видно, что $x_1$ и $x_2$ отпадают, так как корни будут комплексными.

2. Рассмотрим $\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}=\dfrac{1}{2}$, или $3x^2-10x+8=0$, откуда $x_3=2;\quad x_4=\dfrac{4}{3}$.

*Отв.* $x_3=2;\quad x_4=\dfrac{4}{3}$.

**262.** Заметим, что разность подкоренных выражений $(3x^2+5x+8)-(3x^2+5x+1)=7$, поэтому, полагая $3x^2+5x+1=y$, найдем $3x^2+5x+8=y+7$.

Подставим в данное уравнение вспомогательное неизвестное: $\sqrt{y+7}-\sqrt{y}=1$; $\sqrt{y+7}=1+\sqrt{y}$. Возведя в квадрат обе части последнего уравнения и сделав соответствующие преобразования, получим $y=9$ и затем $3x^2+5x-8=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=-\dfrac{8}{3}$.

Подстановкой убеждаемся, что оба корня уравнению удовлетворяют.

Примечание. Так как $(3x^2+5x+8)-(3x^2+5x+1)=7$, а левая часть данного уравнения равна разности квадратов соответствующих радикалов, то

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1;\\ \sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=7,\end{cases}$$

откуда

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=4.$$

Полученное уравнение легко решить.

*Отв.* $x_1=1;\quad x_2=-\dfrac{8}{3}$.

**263.** Очевидно, что правая часть данного уравнения должна быть обязательно положительной, то есть $x - 1 > 0$, или $x \geqslant 1$.

Возведем левую и правую части уравнения в квадрат, получим

$$x\sqrt{x^2-1} + x^2 - 2x = 0,$$

или

$$x(\sqrt{x^2-1} + x - 2) = 0.$$

Сокращая на $x (x > 1)$, получим уравнение

$$\sqrt{x^2-1} + x - 2 = 0,$$

которое имеет решение $x = \frac{5}{4}$.

Подставляя в данное иррациональное уравнение $x = \frac{5}{4}$, убеждаемся, что это значение неизвестного $x$ ему удовлетворяет.

Примечание. Можно установить и верхнюю границу множества допустимых значений $x$. Так как $x\sqrt{x^2-1} < 1$, то при $x > 1$ должно быть $\sqrt{x^2-1} < 1$ или $x^2 < 2$; $x < \sqrt{2}$.

Таким образом, $1 < x < \sqrt{2}$.

*Отв.* $x = \frac{5}{4}$.

**264.** Запишем данное уравнение так:

$$\frac{(\sqrt{a+x})^3}{ax} = \sqrt{x}; \quad x > 0, \quad a \neq 0,$$

или

$$(a+x)^{\frac{3}{2}} = ax^{\frac{3}{2}}.$$

Возводя в степень $\frac{2}{3}$, получим $a + x = a^{\frac{2}{3}} x$, откуда $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$.

Если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то уравнение не имеет решений, т. е. $x > 0$ в том случае, когда $a > 1$ или $a < -1$.

Рекомендуем читателю произвести проверку данного решения.

*Отв.* $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$.

**265.** Обозначим $\sqrt[3]{x} = t$, тогда $\sqrt[3]{x^2} = t^2$ и $x = t^3$; $|x| \neq 1$.

Исходное уравнение примет вид

$$\frac{t^4 - 1}{t^2 - 1} - \frac{t^2 - 1}{t + 1} = 4.$$

Проведя сокращение первой дроби на $t^2-1$, второй — на $t+1$, получаем квадратное уравнение

$$t^2-t-2=0.$$

Сокращение первой дроби возможно при условии, что $t^2-1\neq 0$, а второй — когда $t+1\neq 0$. Между тем, из двух корней $t_1=2$ и $t_2=-1$ второй не годится, так как при $t=-1$ имеем $x=-1$, и левая часть исходного уравнения теряет смысл.

*Отв.* $x=8$.

**266.** Из условия непосредственно следует, что $a>0$ и $x\geqslant 1$. Поделив обе части уравнения на $\sqrt{x}$ и возведя затем их в квадрат, найдем

$$2+2\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}=a^2;$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}=\frac{a^2-2}{2}.$$

Так как $\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}$ положительное число или нуль, то $a^2-2\geqslant 0$; $a^2\geqslant 2$.

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$1-\frac{1}{x^4}=\frac{a^4}{4}-a^2+1;$$

$$\frac{1}{x^4}=\frac{4a^2-a^4}{4};$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}.$$

Отсюда следует, что $a<2$.

Таким образом, при $\sqrt{2}\leqslant a<2$ исходное уравнение имеет корень $x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}$.

Выполним проверку решения. Подставляем в левую часть уравнения найденное значение $x$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}+\frac{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}-\frac{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2+a\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{2a}\sqrt[4]{4-a^2}}}+\sqrt{\frac{2-a\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{2a}\sqrt[4]{4-a^2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4-a^2+2a\sqrt{4-a^2}+a^2}{2\sqrt{2a}\cdot\sqrt[4]{4-a^2}}}+\sqrt{\frac{4-a^2-2a\sqrt{4-a^2}+a^2}{2\sqrt{2a}\sqrt[4]{4-a^2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+\sqrt{4-a^2})^2}{2\sqrt{2a}\sqrt[4]{4-a^2}}}+\sqrt{\frac{(a-\sqrt{4-a^2})^2}{2\sqrt{2a}\sqrt[4]{4-a^2}}}=\frac{\sqrt[4]{2a}}{\sqrt{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}}.$$

Подставив в правую часть исходного уравнения значение $x$, найдём

$$\frac{\sqrt[4]{2a}}{\sqrt{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}}.$$

**267.** Обозначим $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = y$, тогда исходное уравнение будет таким:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{13}{6},$$

или

$$6y^2 - 13y + 6 = 0,$$

откуда $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = \frac{3}{2}$.

Следовательно,

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{2}{3} \text{ и } \sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{3}{2}.$$

Освобождаясь от радикалов, получаем два уравнения первой степени:

$$\frac{x+3}{5x+2} = \frac{8}{27} \text{ и } \frac{x+3}{5x+2} = \frac{27}{8}.$$

*Отв.* $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{30}{127}$.

**268.** *Отв.* $x = 81$.

**269.** Перепишем исходное уравнение в виде

$$(x^2 + \sqrt{x^4 - a^2})^3 (x^2 + \sqrt{x^4 - a^2})(x^2 - \sqrt{x^4 - a^2}) = a^2, \text{ тогда}$$

$$(x^2 + \sqrt{x^4 - a^2})^3 = 1.$$

Отсюда

$$\sqrt{x^4 - a^2} = 1 - x^2; \quad x^2 \leqslant 1 \qquad (1)$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, найдем:

$$-a^2 = 1 - 2x^2;$$

$$x^2 = \frac{1 + a^2}{2}.$$

Возведение в квадрат обеих частей уравнения, как уже упоминалось, равносильно в данном случае умножению $\sqrt{x^4 - a^2} + x^2 - 1 = 0$ на $(\sqrt{x^4 - a^2} - x^2 + 1)$. Следовательно, рассматриваемое новое уравнение не эквивалентно (1). Поэтому среди полученных корней возможны и посторонние. Действительно, найденное значение $x^2$ для уравнения (1) не может превышать единицы:

$$x^2 - 1 \leqslant 0; \quad \frac{1 + a^2}{2} - 1 \leqslant 0; \quad \frac{a^2 - 1}{2} \leqslant 0.$$

Отсюда $a^2 \leqslant 1$, или $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Для значений $a^2 > 1$ тот же корень будет, очевидно, удовлетворять уравнению $x^2 - \sqrt{x^4 - a^2} = 1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет корни $x = \pm\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}$ при $-1 \leqslant a \leqslant 1$. При $|a| > 1$ уравнение корней не имеет.

**270.** Обозначим $\sqrt[4]{a-x} = y$ и $\sqrt[4]{b-x} = z$; $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $a \geqslant x$ и $b \geqslant x$.

Исходное уравнение примет вид

$$y + z = \sqrt[4]{y^4 + z^4}.$$

После соответствующих преобразований получим

$$yz(2y^2 + 3yz + 2z^2) = 0.$$

Из последнего уравнения следует:

1) или $y = 0$, тогда $x_1 = a$;
2) или $z = 0$, тогда $x_2 = b$;
3) или $2y^2 + 3yz + 2z^2 = 0$,

ни при каких положительных значениях $y$ и $z$ (случай, когда $y = 0$ и $z = 0$, уже рассмотрен нами) это уравнение не имеет решения.

Поэтому исходное уравнение имеет следующие действительные корни:

$$x_1 = a, \quad \text{если} \quad a \leqslant b;$$
$$x_2 = b, \quad \text{если} \quad b \leqslant a.$$

**271.** Так как левая часть уравнения положительна при любых значениях $n$ и $x$, то $\sqrt[n]{x^2 - 1} > 0$, т. е. $|x| > 1$.

Разделив обе части уравнения на $\sqrt[n]{x^2-1}$, получим

$$\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{5}{2}.$$

Обозначим $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = y$. Тогда уравнение примет вид

$$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2},$$

или

$$2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

откуда $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\text{если } \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = 2, \quad \text{то} \quad x_1 = \frac{2^n + 1}{2^n - 1};$$

$$\text{если } \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad x_2 = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}.$$

Оба решения $x_1$ и $x_2$ являются корнями исходного иррационального уравнения.

*Отв.* $x_1 = \dfrac{2^n+1}{2^n-1}$; $x_2 = \dfrac{1+2^n}{1-2^n}$.

**272.** Из условия следует, что $\dfrac{a-x}{b+x} > 0$ или $(a-x)(b+x) > 0$, т. е. $x$ может принимать лишь промежуточные значения, лежащие между $a$ и $-b$.

Обозначим $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}} = y$. Тогда уравнение примет вид

$$y + \frac{1}{y} = 2 \quad \text{или} \quad y^2 - 2y + 1 = 0,$$

откуда $y = 1$. Таким образом, $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}} = 1$; $\dfrac{a-x}{b+x} = 1$; $2x = a - b$.

*Отв.* $x = \dfrac{a-b}{2}$.

**273.** Приведем к общему знаменателю левую часть уравнения, вынесем за скобки $\sqrt[n]{a+x}$ и разделим обе части уравнения на $\sqrt[n]{x}$; $x \neq 0$:

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{x}} \cdot \frac{a+x}{ax} = \frac{1}{b};$$

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{a+x}{x} = \frac{a}{b};$$

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{a}{b},$$

откуда

$$\frac{a+x}{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Применяя производную пропорцию, имеем

$$\frac{a+x-x}{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1.$$

*Отв.* $x = \dfrac{a}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}$.

Примечание. Полученное значение $x$ не всегда удовлетворяет исходному уравнению в поле действительных чисел при произвольных значениях параметров $a$, $b$ и $n$, отличных от нуля.

Пусть, например, $n = 2$, $a = 8$ и $b = -27$. Тогда

$$x = \frac{8}{\left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} = \frac{8}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^6} - 1} = \frac{8}{\frac{4}{9} - 1} = -\frac{72}{5} < 0,$$

хотя при $n = 2$ он должен быть положительным.

Таким образом, ограничения, накладываемые на параметры $a$ и $b$ в поле действительных чисел, зависят от данного значения $n$.

**274.** Обозначим $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = y$, тогда $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{y}$. После сокращения правой части исходного уравнения на $(1 + a)$ получим

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} + y = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}},$$

или

$$y^2 - 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}} y + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

откуда $y = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Заменим $y$ его значением:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}};$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-a}{1+a}.$$

*Отв.* $x = -a$.

Примечание. Исключим случай, когда $|a| = 1$. Тогда из данного уравнения вытекают следующие неравенства:

1) $\frac{1-a}{1+a} > 0$; $(1-a)(1+a) > 0$; $1 - a^2 > 0$, $|a| < 1$;

2) $\frac{1-x}{1+x} > 0$; $|x| < 1$.

Указанный ответ примера удовлетворяет всем этим неравенствам. Что же касается значения $a = 1$, то корень $x = -1$, т. е. $x = -a$, не удовлетворяет условию, так как исходное уравнение в этом случае не имеет смысла, как и при $a = -1$.

**275.** Из условия следует, что корень уравнения должен быть положительным, т. е. $a \geqslant 0$.

Помножив левую и правую части данного уравнения на $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{a}} \neq 0$, получим эквивалентное уравнение

$$\sqrt{a^2-a} = 2\sqrt{a} - a.$$

Возведем левую и правую его части в квадрат:

$$a(4\sqrt{a} - 5) = 0.$$

Так как $a \neq 0$, то $4\sqrt{a} - 5 = 0$, откуда $a = \frac{25}{16}$.

Решение необходимо проверить.

*Отв.* $a = \frac{25}{16}$.

Примечание. Из условия видно, что $a > 0$; $a - \sqrt{a} \geqslant 0$ и, следовательно, $a \geqslant 1$.

**276.** Перенесем второй член левой части вправо и возведем обе части в квадрат:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx.$$

Снова возведя в квадрат, будем иметь

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2); \quad a > c.$$

Обозначим $a^2 - c^2 = b^2$, тогда уравнение можно представить так:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на $a^2b^2$, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

**277.** Представим данное уравнение в виде

$$\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}\,(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \sqrt{ab};$$

или (так как $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b} \neq 0$)

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} = \sqrt{ab}.$$

После возведения в квадрат получим

$$x^2 + bx + ax = 0,$$

откуда $x_1 = 0$; $x_2 = -(a+b)$.

Решение $x_1 = 0$ является корнем данного иррационального уравнения лишь при условии, что $a > 0$ и $b > 0$. Наоборот, решение $x_2 = -(a+b)$ удовлетворяет данному уравнению только при отрицательных значениях параметров $a$ и $b$.

278. Из условия непосредственно следует, что

$$14x - 49 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad x \geqslant \frac{7}{2}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 14x + 49} = 14;$$

$$\sqrt{(x-7)^2} = 7 - x.$$

Так как $7 - x \geqslant 0$ или $x \leqslant 7$, то любое значение $x$, удовлетворяющее условиям $\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant 7$, будет корнем исходного уравнения.

279. После приведения левой части уравнения к общему знаменателю получим:

$$\frac{3x - 5\sqrt{x^2 + x}}{-x} = \frac{3}{x};$$

$$3(x+1) = 5\sqrt{x(x+1)},$$

откуда $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{9}{16}$.

Рекомендуем читателю проверить, удовлетворяют ли эти решения исходному уравнению.

280. *Отв.* $x_1 = \frac{1}{4}$.

281. *Отв.* $x = \frac{a-1}{2}$; при $a = 0$ уравнению удовлетворяет всякое отрицательное значение $x$.

282. Из данного уравнения имеем

$$\sqrt{a - x} + \sqrt{a + x} = \frac{a+b}{2\sqrt{b}}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части уравнения, получим

$$a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2} + a + x = \frac{(a+b)^2}{4b}$$

или

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{(a+b)^2}{8b} - a.$$

Снова возведем в квадрат:

$$a^2 - x^2 = \frac{(a+b)^4}{64b^2} - \frac{a(a+b)^2}{4b} + a^2;$$

$$-x^2 = \frac{(a+b)^4}{64b^2} - \frac{a(a+b)^2}{4b},$$

откуда

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a+b)^2 a}{4b} - \frac{(a+b)^4}{64b^2}} = \pm\frac{a+b}{8b}\sqrt{16ab - (a+b)^2}.$$

Проверим корень $x_1 = \frac{a+b}{8b}\sqrt{16ab-(a+b)^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+\frac{a+b}{8b}\sqrt{16ab-(a+b)^2}}+\sqrt{a-\frac{a+b}{8b}\sqrt{16ab-(a+b)^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{8ab+(a+b)\sqrt{16ab-(a+b)^2}}{8b}}+\sqrt{\frac{8ab-(a+b)\sqrt{16ab-(a+b)^2}}{8b}}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{16ab-(a+b)^2+2(a+b)\sqrt{16ab-(a+b)^2}+(a+b)^2}+}$$

$$+\sqrt{16ab-(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{16ab-(a+b)^2}+(a+b)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{[a+b+\sqrt{16ab-(a+b)^2}]^2}+\sqrt{[a+b-\sqrt{16ab-(a+b)^2}]^2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{16ab-(a+b)^2}+a+b-\sqrt{16ab-(a+b)^2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{b}}{2(a+b)} = \frac{2\sqrt{b}}{a+b}.$$

Аналогично проверяется корень $x_2$.

283. Освободимся от иррациональности в знаменателе:

$$1-x^2 = \left(1-\frac{1}{8}\sqrt[3]{15^2x^4}\right)^2,$$

где, как видно из условия, $-1 < x < 1$.

Обозначим $x^2 = y^3$:

$$1-y^3 = \left(1-\frac{y^2}{8}\sqrt[3]{15^2}\right)^2;$$

$$15\sqrt[3]{15}\,y^4 + 64y^3 - 16\sqrt[3]{15^2} \qquad y^2 = 0.$$

Разлагая на множители, находим:

а) $y^2 = 0$, т. е. $y_{1,2} = 0$, поэтому и $x_1 = 0$;

б) $15\sqrt[3]{15}\,y^2 + 64y - 16\sqrt[3]{15^2} = 0$, откуда

$$y_{3,4} = \frac{-32 \pm 68}{15\sqrt[3]{15}} \quad \text{или} \quad y_3 = \frac{12}{5\sqrt[3]{15}}.$$

Отрицательное значение $y_4$ отбрасываем. Так как $x^2 = y^3 \geqslant 0$, то

$$x^2 = \frac{12^3}{5^3 \cdot 15} = \frac{24^2}{25^2},$$

откуда

$$x_{2,3} = \pm \frac{24}{25}.$$

*Отв.* $x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm \frac{24}{25}$.

**284.** У к а з а н и е. После освобождения от иррациональности получим уравнение четвертой степени:

$$(x^2 - x - a)(x^2 + x - a + 1) = 0.$$

Этот пример можно решить и другим способом. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$a - \sqrt{a+x} = x^2;$$
$$x^2 - a + \sqrt{a+x} = 0;$$
$$x^2 - (a+x) + (x + \sqrt{a+x}) = 0;$$
$$(x - \sqrt{a+x})(x + \sqrt{a+x}) + (x + \sqrt{a+x}) = 0.$$

**285.** После возведения в квадрат обеих частей получаем уравнение

$$x\sqrt{x^2+24} = x^2 + 2x,$$

откуда $x_1 = 0$.

Полагая далее $x \neq 0$ и разделив на $x$ обе части уравнения, после возведения в квадрат находим $x_2 = 5$.

Оба решения удовлетворяют заданному иррациональному уравнению.

**286.** Приведем уравнение к виду

$$3(\sqrt{x-1} + \sqrt{11-x}) = 4\sqrt{(x-1)(11-x)}; \quad 1 < x < 11.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат и упростим:

$$9(5 + \sqrt{(x-1)(11-x)}) = 8(11-x)(x-1).$$

Введя замену

$$\sqrt{(x-1)(11-x)} = y,$$

получим

$$45 + 9y = 8y^2,$$

или

$$8y^2 - 9y - 45 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 3; \quad y_2 = -\frac{15}{8}.$$

$y_2 = -\frac{15}{8}$ не удовлетворяет уравнению, остается $y_1 = 3$.

Имеем

$$\sqrt{(x-1)(11-x)} = 3,$$

или

$$x^2 - 12x + 20 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 10; \quad x_2 = 2.$$

*Отв.* $x_1 = 10; \quad x_2 = 2.$

287. Указание. Обозначить $\sqrt[5]{(7x-3)^3} = y$.

288. Освобождаясь от радикалов путем двукратного возвышения левой и правой частей данного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$(a + bx)(b - cx) = 0,$$

откуда

$$x_1 = -\frac{a}{b}; \quad x_2 = \frac{b}{c}.$$

Примечание. Сделаем проверку решения. При $x = -\frac{a}{b}$ левая часть уравнения

$$\sqrt{a + \frac{b(-a)}{b}} + \sqrt{b - \frac{c(-a)}{b}} = \sqrt{\frac{b^2 + ac}{b}},$$

правая часть

$$\sqrt{a + b + (b - c)\left(-\frac{a}{b}\right)} = \sqrt{\frac{b^2 + ac}{b}}.$$

Таким образом, найденный корень справедлив при $(b^2 + ac)b \geqslant 0$.

Проверим второй корень $x_2 = \frac{b}{c}$. После подстановки левая и правая части уравнения равны $\sqrt{\frac{b^2 + ac}{c}}$. Следовательно, второй корень удовлетворяет уравнению также при $(b^2 + ac)c \geqslant 0$. Оба корня справедливы, когда $b^2 + ac$, $b$, $c$ одного знака или $b^2 + ac = 0$.

*Отв.* $x_1 = -\frac{a}{b}; \quad x_2 = \frac{b}{c}.$

289. *Отв.* $x = \pm a$ при $\begin{cases} a > 0; & x = a; \\ a < 0; & x = -a; \\ a = 0; & x = 0. \end{cases}$

290. Очевидно, что корень уравнения, если он существует, удовлетворяет условию $|x| > 1$.

Решая данное уравнение, получим

$$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}.$$

Проверкой убеждаемся, что второй корень не удовлетворяет иррациональному уравнению.

*Отв.* $x_1 = \sqrt{2}$.

**291.** Разделим обе части уравнения на $\sqrt[3]{(a-x)^2}$:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}};\quad a\neq 0.$$

При $a\neq 0$ $x=a$ не является корнем уравнения.

Обозначим $y=\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$, тогда $y_1=4$; $y_2=1$, откуда $x_1=\frac{63}{65}a$; $x_2=0$.

Если $a=0$, то исходное уравнение имеет только один корень $x=0$.

*Отв.* $x_1=\frac{63}{65}a$; $x_2=0$.

**292.** Обозначим $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=z$; $\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}=t$, тогда $\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}=\frac{1}{t}$;

$$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{1}{z},$$

и уравнение примет вид

$$z+\frac{1}{z}=t+\frac{1}{t},$$

или

$$\frac{z}{t}=\frac{z^2+1}{t^2+1}.$$

Вместо $z$ и $t$ подставим их выражения. После соответствующих преобразований находим, что $x_1=0$. Второй корень $x_2=b$ не рассматриваем.

Примечание. Можно уравнение $z+\frac{1}{z}=t+\frac{1}{t}$ преобразовать следующим образом:

$$z-t-\frac{z-t}{zt}=0;\qquad \frac{(z-t)(zt-1)}{zt}=0,$$

откуда $zt=1$; $z=1$.

Предлагаем читателю проверить найденные решения и объяснить, почему не рассматривается корень $x=b$.

*Отв.* При $ab\neq 0$ $x=0$. Если $|a|=|b|\neq 0$, то $x$ — произвольное число, удовлетворяющее условию $|x|<|a|$. При $ab=0$ уравнение корней не имеет.

**293.** Обозначим $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=t$ и $\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}=z$, тогда

$$t+\frac{1}{t}=z+\frac{1}{z}.$$

Возвысим обе части уравнения в куб:

$$t^3+3t+3\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}=z^3+3z+\frac{3}{z}+\frac{1}{z^3};$$

$$t^3+\frac{1}{t^3}+3\left(t+\frac{1}{t}\right)=z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Так как $t+\frac{1}{t}=z+\frac{1}{z}$, то

$$t^3+\frac{1}{t^3}=z^3+\frac{1}{z^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{b+x}{b-x}-\frac{b-x}{b+x};$$

$$\frac{(a+x)^2+(a-x)^2}{a^2-x^2}=\frac{(b+x)^2+(b-x)^2}{b^2-x^2}.$$

После некоторых преобразований находим, что $x=0$.

*Отв.* $x=0$ при $ab\neq 0$; при $a=b\neq 0$ $x$ — произвольное число; если $ab=0$, то $x$ — произвольное число, кроме нуля.

**294.** Из решения примера 293 следует, что

$$t^3-\frac{1}{t^3}=-\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right),$$

или

$$t^3-\frac{1}{t^3}=\frac{1}{z^3}-z^3,$$

где

$$z=\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{и} \quad t=\sqrt[3]{\frac{3+x}{3-x}}.$$

На основании примечания к решению примера 292

$$z=t \quad \text{и} \quad zt=-1,$$

или

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}} \tag{1}$$

и

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}}=-1. \tag{2}$$

Из уравнения (1) имеем $3+x+3x+x^2=3-3x-x+x^2$; $x_1=0$.

Из уравнения (2) имеем $3+3x-x-x^2=-3+3x-x+x^2$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$.

*Отв.* $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$.

**295.** Рассматривая данное уравнение как пропорцию, переставим местами средние члены:

$$\frac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{a-cx}}{\sqrt{a-bx}-\sqrt{a-cx}}=\frac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{a-bx}-\sqrt{ax-b}}.$$

Воспользуемся тем, что сумма предыдущего и последующего членов первого отношения относится к их разности, как сумма предыдущего и последующего членов второго отношения к их разности:

$$\frac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{a-cx}+\sqrt{a-bx}-\sqrt{a-cx}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{a-cx}-(\sqrt{a-bx}-\sqrt{a-cx})}=$$

$$=\frac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{ax-b}+\sqrt{a-bx}-\sqrt{ax-b}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{ax-b}-(\sqrt{a-bx}-\sqrt{ax-b})};$$

$$\frac{\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a-cx}}=\frac{\sqrt{a-bx}}{\sqrt{ax-b}};$$

$$\frac{\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a-cx}}-\frac{\sqrt{a-bx}}{\sqrt{ax-b}}=0;$$

$$\sqrt{a-bx}\left(\frac{1}{\sqrt{a-cx}}-\frac{1}{\sqrt{ax-b}}\right)=0.$$

Если $\sqrt{a-bx}=0$, то $a-bx=0$, откуда $x_1=\frac{a}{b}$; если же $\frac{1}{\sqrt{a-cx}}-\frac{1}{\sqrt{ax-b}}=0$, то $\sqrt{ax-b}=\sqrt{a-cx}$, или $ax-b=a-cx$, откуда $x_2=\frac{a+b}{a+c}$.

*Отв.* $x_1=\frac{a}{b}$; $x_2=\frac{a+b}{a+c}$; $b\neq 0$, $a+c\neq 0$.

**296.** Представим данное уравнение в виде

$$\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}-\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}+\frac{x}{a}}=\frac{1}{4};\quad a\neq 0.$$

После соответствующих преобразований получим

$$16x^2=9a^2,$$

откуда

$$x_1=\frac{3a}{4};\quad x_2=-\frac{3a}{4}.$$

Значение $x_2$ необходимо отбросить, так как оно не удовлетворяет уравнению.

*Отв.* $x=\frac{3a}{4}$.

297. Умножим числитель и знаменатель левой части уравнения на 2 и воспользуемся формулами квадрата суммы и квадрата разности двух количеств:

$$\frac{2(1+x-\sqrt{2x+x^2})}{2(1+x+\sqrt{2x+x^2})}=\frac{2+x-2\sqrt{x(2+x)}+x}{2+x+2\sqrt{x(2+x)}+x}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})^2}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^2=a^3\,\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}},$$

или

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^3=a^3.$$

Извлекая корни из обеих частей уравнения, получим

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=a. \qquad (1)$$

Поскольку везде подразумеваются арифметические значения корней и, следовательно, $x\geqslant 0$, то должно выполняться соотношение $0<a\leqslant 1$, так как числитель и знаменатель левой части уравнения — положительные числа, причем

$$\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\leqslant\sqrt{2+x}+\sqrt{x}.$$

Решая уравнение (1), получим

$$x=\frac{(1-a)^2}{2a};\quad 0<a\leqslant 1.$$

298. Полагаем $x+a=y$; $x-a=z$, тогда уравнение примет вид

$$\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{z^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}\neq 0$; слева окажется разность кубов

$$(\sqrt[3]{y})^3-(\sqrt[3]{z})^3,$$

следовательно,

$$y-z=\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}).$$

Подставим в левую часть вместо $y$ и $z$ их первоначальные значения:

$$x+a-(x-a)=\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z});$$

$$\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})=2a;$$

$$\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}=2\sqrt[3]{a}.$$

Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$y - 3\sqrt[3]{y^2z} + 3\sqrt[3]{yz^2} - z = 8a.$$

Но

$$y - z = x + a - (x - a) = 2a$$

и

$$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} = 2\sqrt[3]{a},$$

поэтому уравнение принимает вид

$$2a - 3\sqrt[3]{yz} \cdot 2\sqrt[3]{a} = 8a,$$

или

$$-\sqrt[3]{yz} = \frac{8a - 2a}{6\sqrt[3]{a}}; \quad a \neq 0.$$

Подставим значения $y$ и $z$ в последнее уравнение и упростим его:

$$-\sqrt[3]{(x+a)(x-a)} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Возведя в куб, получим

$$-(x^2 - a^2) = a^2,$$

откуда $x = 0$.

*Отв.* $x = 0$.

**299.** Обозначим $\sqrt[4]{a+x} = u$, $\sqrt[4]{a-x} = v$,

тогда $\begin{cases} u + v = 4; \\ u^4 + v^4 = 2a. \end{cases}$

Представим второе уравнение в виде

$$(u^2 + v^2)^2 = 2a + 2u^2v^2, \tag{1}$$

а первое, предварительно возводя в квадрат левую и правую части, запишем следующим образом:

$$u^2 + v^2 = 16 - 2uv. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и решая полученное квадратное уравнение относительно $uv$, найдем, что

$$uv = 16 - \sqrt{128 + a}; \quad 16 \geqslant \sqrt{128 + a}, \quad \text{или} \quad a \leqslant 128.$$

С другой стороны, $(uv)^4 = a^2 - x^2$, следовательно,

$$x^2 = a^2 - (16 - \sqrt{128 + a})^4; \quad |x| \leqslant a,$$

или

$$x = \pm\sqrt{[a + (16 - \sqrt{128 + a})^2][a - (16 - \sqrt{128 + a})^2]}.$$

Здесь $a \geqslant (16 - \sqrt{128 + a})^2$ или $16 \leqslant a \leqslant 128$. Уравнение разрешимо, если соблюдено последнее условие.

**300.** Исследуем предварительно некоторые значения параметров. Пусть $a=0$, $b\neq 0$, тогда уравнение примет вид $\sqrt{x\sqrt{x^2+b^2}}=x$. Очевидно, что $x=0$. При $a=0$ и $b=0$ данное уравнение будет $\sqrt{x\sqrt{x^2}}=x$. Последнему удовлетворяет всякое неотрицательное значение $x$: $x\geqslant 0$.

Так как $x-a\geqslant 0$, то можно обе части исходного уравнения возвести в квадрат. После некоторых преобразований получим

$$x\sqrt{x^2+b^2-a^2}=x^2-2ax.$$

Отсюда либо $x=0$, либо $\sqrt{x^2+b^2-a^2}=x-2a$; $x$ может равняться нулю, как видно из условия, лишь при $a\leqslant 0$.

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат ($x>2a$), найдем

$$x=\frac{5a^2-b^2}{4a};\quad a\neq 0.$$

Определим разность между найденным значением $x$ и $2a$:

$$x-2a=\frac{5a^2-b^2}{4a}-2a=-\frac{3a^2+b^2}{4a}.$$

Эта разность должна быть положительная. Следовательно, при $a>0$ уравнение решения не имеет. Полагая $a<0$ (в этом случае $a>2a$), выясним, при каком условии возможно решение. Правая часть исходного уравнения может быть только неотрицательная, $x-a\geqslant 0$, поэтому

$$\frac{5a^2-b^2}{4a}-a=\frac{a^2-b^2}{4a}\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что при $a<0$ должно быть $a^2-b^2\leqslant 0$. Если $a<0$ и $a^2-b^2>0$, уравнение решения не имеет.

Подведем итоги исследования:

1) при $a=0$ и каком угодно $b\neq 0$ $\quad x=0$;

2) при $a=0$ и $b=0$ любое неотрицательное значение $x$ удовлетворяет исходному уравнению;

3) при $a>0$ уравнение решения не имеет;

4) при $a<0$ и каком угодно $b$ один из корней уравнения равен нулю, а второй $x_2=\frac{5a^2-b^2}{4a}$ (в частном случае он может обратиться в нуль) при условии, что $a^2-b^2\leqslant 0$;

5) при $a<0$ и $a^2-b^2>0$ уравнение корней не имеет.

**301.** Обозначим

$$\sqrt{4x+2y}=u \quad \text{и} \quad \sqrt{2x-y}=v.$$

Тогда данная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 3u-5v=2; \\ 7u+2v=32, \end{cases}$$

откуда

$$u = 4; \quad v = 2.$$

Переходя к неизвестным $x$ и $y$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 2y = 16; \\ 2x - y = 4, \end{cases}$$

которая имеет решения: $x = 3$; $y = 2$.

*Отв.* $x = 3$; $y = 2$.

**302.** Очевидно, что $x \neq 0$. Известно, что если сумма положительного числа и обратного к нему равна двум, то это число равно единице. Таким образом, из первого уравнения данной системы делаем вывод, что

$$\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} = 1,$$

откуда $x = 2y$. Подставляя во второе уравнение $x = 2y$, получим уравнение

$$2y^2 - 3y + 1 = 0,$$

откуда $y_1 = 1$; $y_2 = \frac{1}{2}$. Тогда соответственно $x_1 = 2$; $x_2 = 1$.

Таким образом, данная система имеет два решения:

1) $x_1 = 2$; $y_1 = 1$;

2) $x_2 = 1$; $y_2 = \frac{1}{2}$.

*Отв.* $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

**303.** Если данная система уравнений имеет решение, то очевидно, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $xy > 0$.

Представим первое уравнение системы в виде

$$\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{xy}} = \frac{65}{6},$$

или

$$\frac{(x + y)(x - y)}{\sqrt{xy}} = \frac{65}{6}.$$

Принимая во внимание, что $x - y = 5$, получим

$$\frac{x + y}{\sqrt{xy}} = \frac{13}{6},$$

или

$$36(x + y)^2 = 169xy.$$

Подставив из второго уравнения $y = x - 5$, будем иметь квадратное уравнение

$$x^2 - 5x - 36 = 0,$$

откуда

1) $x_1 = 9, \quad y_1 = 4;$

2) $x_2 = -4, \quad y_2 = -9.$

Второе решение не удовлетворяет исходную систему уравнений.

*Отв.* $x_1 = 9, \quad y_1 = 4.$

**304.** Преобразовывая первое уравнение данной системы, получим

$$\sqrt[3]{x^2 + y^2} = 2\sqrt[3]{17}$$

или

$$x^2 + y^2 = 136. \tag{1}$$

Возведем в квадрат второе уравнение ($x > 0$; $x > |y|$):

$$\sqrt{x^2 - y^2} = 18 - x;$$

$$y^2 = 36x - 324. \tag{2}$$

Подставив $y^2$ из уравнения (2) в уравнение (1), найдем

$$x^2 + 36x - 460 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 10; \quad x_2 = -46.$$

Полученные значения $x_1$ и $x_2$ подставим в уравнение (2) и таким образом определим $y$.

Следовательно, получаем четыре пары решений:

$$x_1 = 10, \quad y_1 = 6; \quad x_3 = -46, \quad y_3 = 6\sqrt{55}\,i;$$

$$x_2 = 10, \quad y_2 = -6; \quad x_4 = -46, \quad y_4 = -6\sqrt{55}\,i.$$

Третья и четвертая пары решений содержат комплексные значения и, следовательно, непригодны. Рекомендуем читателю проверить решения первой и второй пар.

*Отв.* $x_1 = 10, \quad y_1 = 6; \quad x_2 = 10, \quad y_2 = -6.$

**305.** Найдем из второго уравнения $x$ и подставим его в первое

$$y^2 + \sqrt{3y^2 - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2y+5}{3} + 5.$$

Обозначим подкоренное выражение через $u^2$ ($u \geqslant 0$), т. е. $\sqrt{3y^2 - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{9y^2 - 4y - 1}{3}} = u$, тогда получим квадратное уравнение

$$u^2 - 3u - 18 = 0,$$

откуда $u_1 = 6$; $u_2 = -3$.

Поскольку по условию $u \geqslant 0$, то возможно только одно уравнение

$$9y^2 - 4y - 109 = 0.$$

Решая его вместе со вторым уравнением данной системы, находим ее решение.

*Отв.* $x_1 = \frac{49 + 2\sqrt{985}}{27}$, $y_1 = \frac{2 + \sqrt{985}}{9}$;

$$x_2 = \frac{49 - 2\sqrt{985}}{27}, \quad y_2 = \frac{2 - \sqrt{985}}{9}.$$

**306.** Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{(2x+y)^{\frac{4}{3}}}{2xy} = \dfrac{81}{182}; \\ \dfrac{(2x-y)^{\frac{4}{3}}}{2xy} = \dfrac{1}{182}, \end{cases}$$

из которой находим

$$\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)^{\frac{4}{3}} = 81 \quad \text{или} \quad \frac{2x+y}{2x-y} = \pm 27.$$

Отсюда

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{13} \text{ и } \frac{x}{y} = \frac{13}{28}.$$

Подставляя $x = \frac{7y}{13}$ во второе уравнение системы, получаем $y = \pm 13$; подстановка $x = \frac{13y}{28}$ дает $y = \pm 14$.

*Отв.* $(\pm 7; \ \pm 13)$; $\left(\pm \frac{13}{2}; \ \pm 14\right)$.

**307.** После преобразований первого уравнения имеем

$$x + y - \sqrt{xy} = 61; \quad x > 0, \quad y > 0$$

и

$$-x - y - \sqrt{xy} = 61; \quad x < 0, \quad y < 0.$$

После преобразований второго уравнения находим

$$\sqrt{xy}(x + 2\sqrt{xy} + y) = 6084; \quad x > 0, \quad y > 0$$

и

$$\sqrt{xy}(-x + 2\sqrt{xy} - y) = 6084; \quad x < 0, \quad y < 0.$$

Из первого уравнения подставляем во второе $x + y = 61 + \sqrt{xy}$; $x > 0$; $y > 0$:

$$\sqrt{xy}(61 + 3\sqrt{xy}) = 6084;$$

$$3(\sqrt{xy})^2 + 61\sqrt{xy} - 6084 = 0,$$

откуда $(\sqrt{xy})_1 = 36$; $(\sqrt{xy})_2 = -\frac{169}{3}$ (не рассматриваем).

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} xy = 1296; \\ x + y = 97. \end{cases}$$

По теореме Виета $z^2 - 97z + 1296 = 0$, откуда $z = \frac{97 \pm \sqrt{4225}}{2}$.

Мы рассмотрели решение при $x > 0$ и $y > 0$, но ответ дан и для $x < 0$, $y < 0$.

Примечание. Аналогично решается эта система и при $x < 0$, $y < 0$. Следует заметить, что если в уравнение (в систему уравнений) вместо неизвестного $x$ (неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$) подставить $-x$ ($-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$) и уравнение (система уравнений) не изменится, то данному уравнению (системе уравнений) удовлетворяют одинаковые по величине и противоположные по знаку значения неизвестного (неизвестных).

*Отв.* $x_{1,2} = \pm 81$; $y_{1,2} = \pm 16$; $x_{3,4} = \pm 16$; $y_{3,4} = \pm 81$.

308. Представим данную систему уравнений в таком виде:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4y^2} = 80; \\ \sqrt[3]{y^6} + \sqrt[3]{x^2y^4} = 5, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) = 80; \\ \sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) = 5. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе

$$\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^4}} = 16;$$

$$x^4 - 2^{12}y^4 = 0;$$

$$(x^2 + 2^6y^2)(x^2 - 2^6y^2) = 0.$$

Для действительных значений $x$ и $y$ $x^2 + 2^6y^2 \neq 0$, поэтому $x^2 - 64y^2 = 0$, откуда $x = \pm 8y$.

1. Подставив $x = 8y$ в первое уравнение, получим $64y^2 + 8y\sqrt[3]{8y^3} = 80$; $80y^2 = 80$, откуда $y = \pm 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = 8; \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -8; \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

2. Подставив $x = -8y$ в первое уравнение, получим $64y^2 - 8y\sqrt[3]{-8y^3} = 80$; $80y^2 = 80$, т. е. полученные значения $y$ совпадают.

Следовательно,

$$\begin{cases} x_3 = 8; \\ y_3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -8; \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Примечание. В данном случае систему удовлетворят корни $\pm x$ и $\pm y$ (см. примечание к решению примера 307). Следовательно, комбинируя знаки, получаем 4 пары корней системы: $x$ и $y$; $-x$ и $-y$; $x$ и $-y$; $-x$ и $y$.

**309.** Указание. Используя свойство производной пропорции и сделав некоторые преобразования, найдем

$$y = \pm \frac{3}{4} x.$$

Подставив эту зависимость во второе уравнение системы, определим значения неизвестных.

Примечание. Применяя производную пропорцию, мы не всегда получаем уравнение, эквивалентное данному. Например, уравнение $x^2 = x$ имеет корни $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Применяя производную пропорцию, получаем уравнение $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1}$, которое имеет лишь один корень $x = 0$.

Вообще, применение производных пропорций может изменить множество допустимых значений неизвестного. В примере 309 $y \neq 0$ и $|x| > |y|$, а в уравнении, которое получается после применения производной пропорции,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{5}{\sqrt{7}} \qquad (1)$$

только $|x| > |y|$.

Если еще раз применить производную пропорцию, предварительно возведя обе части уравнения (I) в квадрат, то для вновь полученного уравнения $\frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{9}$ только $y = 0$ исключается из множества допустимых значений неизвестного.

**310.** Очевидно, что $x > 0$. Исключая из данной системы уравнений $y$, получим уравнение

$$1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+23} = 0,$$

которое имеет единственное решение $x = 121$. Следовательно, $y = -12$.

*Отв.* $x = 121$; $y = -12$.

**311.** Очевидно, что $x \geqslant 1$, $|x| \geqslant |y|$, $\sqrt{x^2-y^2} \leqslant 1$. Возведем левую и правую части первого уравнения в квадрат:

$$\sqrt{x^2-y^2} = 2 - x.$$

После повторного возведения в квадрат получим

$$4x - y^2 - 4 = 0. \qquad (1)$$

Находим из второго уравнения системы $y^2 = 4 - 4x$ и подставляем в уравнение (1). Окончательно: $x = 1$; $y = 0$. Решение необходимо проверить.

*Отв.* $x = 1$; $y = 0$.

**312.** Обозначим $\sqrt{\frac{x+y}{5x}} = z$, тогда $\sqrt{\frac{5x}{x+y}} = \frac{1}{z}$, следовательно, первое уравнение данной системы примет вид

$$z + \frac{1}{z} = \frac{34}{15},$$

или

$$z^2-\frac{34}{15}z+1=0,$$

откуда

$$z=\frac{17}{15}\pm\sqrt{\frac{289}{225}-1};\quad z=\frac{17}{15}\pm\frac{8}{15};$$

$$z_1=\frac{5}{3};\quad z_2=\frac{3}{5}.$$

Если $\sqrt{\frac{x+y}{5x}}=\frac{5}{3}$, то

$$\frac{x+y}{5x}=\frac{25}{9};\quad 9y=116x;\quad y=\frac{116}{9}x.$$

Если же $\sqrt{\frac{x+y}{5x}}=\frac{3}{5}$, то

$$\frac{x+y}{5x}=\frac{9}{25};\quad y=\frac{4}{5}x.$$

Подставим во второе уравнение данной системы $y=\frac{4}{5}x$:

$$x+\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}x^2=29;\quad 4x^2+9x-145=0,$$

откуда

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81+2320}}{8}=\frac{-9\pm 49}{8}.$$

Следовательно, $x_1=5;\quad x_2=-\frac{29}{4};\quad y_1=4;\quad y_2=-\frac{29}{5}$.

Проверкой убеждаемся, что все значения $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ удовлетворяют данной системе. Точно таким же образом можно найти и остальные корни. Для этого необходимо воспользоваться значением $y=\frac{116x}{9}$.

### Системы уравнений степени выше первой

313. Умножив второе уравнение на 2 и сложив его с первым, получим

$$(x+y)^2=100,$$

или

$$x+y=\pm 100.$$

Рассматривая

$$\begin{cases} x+y=10; \\ xy=16 \end{cases}\quad\text{и}\quad \begin{cases} x+y=-10; \\ xy=16 \end{cases}$$

как суммы и произведения корней некоторого квадратного уравнения и принимая во внимание симметричность данных уравнений относительно $x$ и $y$, получим 4 решения данной системы уравнений.

*Отв.* $x_1=8$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=8$; $x_3=-8$, $y_3=-2$; $x_4=-2$, $y_4=-8$.

**314.** Данная система уравнений равносильна четырем следующим системам:

1) $\begin{cases} x+y=5; \\ xy=6, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_1=2; \ y_1=3; \\ x_2=3; \ y_2=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=5; \\ xy=-6, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_3=6; \ y_3=-1; \\ x_4=-1; \ y_4=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=-5; \\ xy=6, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_5=-2; \ y_5=-3; \\ x_6=-3; \ y_6=-2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-5; \\ xy=-6, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_7=-6; \ y_7=1; \\ x_8=1; \ y_8=-6. \end{cases}$

**315.** $xy(x+y)=126$, откуда $xy=14$. Таким образом,

$$\begin{cases} x+y=9; & u^2-9u+14=0; \\ xy=14; & u_1=2; \ u_2=7. \end{cases}$$

Следовательно:

1) $x_1=2, \ y_1=7;$

2) $x_2=7, \ y_2=2.$

Примечание. Вследствие симметричности уравнений системы относительно $x$ и $y$ достаточно найти только одно решение, чтобы сразу написать второе (поменяв местами $x$ и $y$).

**316.** Имеем

$$\begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy}; \\ x^2+y^2=133-xy. \end{cases}$$

Возвысим обе части первого уравнения в квадрат. Тогда перейдем к системе

$$\begin{cases} x^2+y^2=49+14\sqrt{xy}-xy; \\ x^2+y^2=133-xy. \end{cases}$$

Приравняв правые части этих уравнений, получим

$$xy=36.$$

Следовательно, данную систему можно записать

$$\begin{cases} xy=36; \\ x+y=13. \end{cases}$$

Таким образом, будем иметь два решения системы.

*Отв.* $x_1=4, \ y_1=9; \ x_2=9, \ y_2=4.$

**317.** Имеем

$$\begin{cases} y^2+xy=231; \\ x^2+xy=210. \end{cases}$$

После соответствующих преобразований получим

$$(x+y)^2=441, \quad \text{или} \quad x+y=\pm 21.$$

*Отв.* $x_1=10, \ y_1=11; \ x_2=-10, \ y_2=-11.$

**318.** Преобразуем левые части уравнений системы так, чтобы они были выражены через сумму и произведение неизвестных:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy - (xy)^2 = 19; \\ (x+y) - xy = 4. \end{cases}$$

Обозначив $x + y = m$, а $xy = n$, получим

$$\begin{cases} m^2 - 2n - n^2 = 19; \\ m - n = 4, \end{cases}$$

откуда $m = \frac{9}{2}$ и $n = \frac{1}{2}$. По теореме Виета составляем уравнение

$$u^2 - \frac{9}{2}u + \frac{1}{2} = 0.$$

*Отв.* $x_1 = \frac{9+\sqrt{73}}{4}$, $y_1 = \frac{9-\sqrt{73}}{4}$; $x_2 = \frac{9-\sqrt{73}}{4}$, $y_2 = \frac{9+\sqrt{73}}{4}$.

**319.** *Отв.* $x_1 = 4$, $y_1 = 3$; $x_2 = -3$, $y_2 = -4$.

**320.** Левую часть второго уравнения разложим на множители $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ и разделим второе уравнение на первое. Тогда найдем $x + y = 5$.

К обеим частям первого уравнения системы прибавим $3xy$, получим $(x + y)^2 = 7 + 3xy$.

Подставим 5 вместо $x + y$ согласно полученному уравнению, найдем $xy = 6$.

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5; \\ xy = 6. \end{cases}$$

*Отв.* $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

**321.** Из второго уравнения видно, что $x \neq 0$, $y \neq 0$. Тогда

$$y = \frac{1728}{x}. \qquad (1)$$

Подставляя (1) вместо $y$ в первое уравнение, получим

$$(\sqrt[3]{x})^2 - 7\sqrt[3]{x} + 12 = 0,$$

откуда

$$\sqrt[3]{x} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Найдя одно решение данной системы $x_1 = 64$, $y_1 = 27$, сразу же получаем и второе. Для этого достаточно поменять местами $x$ и $y$ *.

Примечание. Этот пример можно также решить при помощи теоремы Виета:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 7; \\ \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 12. \end{cases}$$

*Отв.* $x_1 = 64$, $y_1 = 27$; $x_2 = 27$, $y_2 = 64$.

* Здесь мы принимаем во внимание симметричность уравнений системы относительно $x$ и $y$.

322. Обозначим $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=z$,

тогда

$$\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}=z^2;$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=z^2+2; \quad x\neq 0, \quad y\neq 0.$$

Первое уравнение данной системы запишем так:

$$z^2+z+2=\frac{23}{4};$$

$$z^2+z-\frac{15}{4}=0,$$

откуда

$$z_1=-\frac{5}{2}; \quad z_2=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, имеем две системы:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=-\frac{5}{2};\\ x-y=1\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{3}{2};\\ x-y=1.\end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, получим:

1) $x_1=2, \quad y_1=1;$ 3) $x_3=\frac{1+\sqrt{41}}{10}, \quad y_3=\frac{-9+\sqrt{41}}{10};$

2) $x_2=\frac{1}{3}, \quad y_2=-\frac{2}{3};$ 4) $x_4=\frac{1-\sqrt{41}}{10}, \quad y_4=\frac{-9-\sqrt{41}}{10}.$

323. Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}-(x^2y+y^2x)=0;$$

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}-x^2y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=0;$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}-x^2y^2\right)=0.$$

Таким образом, исходной системе уравнений соответствуют две:

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=x^2y^2;\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x^2y^2},\end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0;\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x^2y^2}.\end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим систему уравнений (1). Возведем второе уравнение в квадрат и вычтем первое:

$$\frac{3}{xy}=\frac{4}{x^4y^4}-x^2y^2;$$

$$3(xy)^3=4-(xy)^6; \quad x\neq 0; \quad y\neq 0.$$

Обозначим $(xy)^3 = z$, тогда

$$3z = 4 - z^2; \quad z^2 + 3z - 4 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -4, \text{ или } x^3y^3 = -4; \quad x^3y^3 = 1.$$

Снова рассмотрим две системы уравнений:

$$\begin{cases} xy = -\sqrt[3]{4}; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt[3]{4^2}}, \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} xy = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2. \end{cases} \quad (4)$$

Из системы уравнений (3) получаем

$$xy = -\sqrt[3]{4};$$

$$x + y = -\frac{2}{\sqrt[3]{4}}.$$

По теореме Виета составляем квадратное уравнение

$$u^2 + \frac{2}{\sqrt[3]{4}}u - \sqrt[3]{4} = 0,$$

откуда

$$u = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} + \sqrt[3]{4}};$$

$$u = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}};$$

$$u_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}; \quad u_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}.$$

Таким образом, имеем:

1) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}, \quad y_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}};$

2) $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}, \quad y_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}.$

Далее преобразуем систему уравнений (4):

$$\begin{cases} xy = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 1; \\ x + y = 2, \end{cases}$$

откуда $x_3 = 1$; $y_3 = 1$.

Система уравнений (2) решений не имеет.

**324.** Складывая и вычитая данные уравнения, получим систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6(x + y); \\ x^3 - y^3 = 4(x - y), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 6) = 0; \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

Для нахождения всех решений полученной системы необходимо рассмотреть следующие четыре системы:

$$\begin{cases} x+y=0; \\ x-y=0; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x+y=0; \\ x^2+xy+y^2-4=0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2-6=0; \\ x-y=0; \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} x^2-xy+y^2-6=0; \\ x^2+xy+y^2-4=0. \end{cases} \quad (4)$$

Из системы уравнений (1) получаем решение $x_1=0$; $y_1=0$.

Чтобы решить систему уравнений (2), нужно найти из первого уравнения $y$, т. е. $y=-x$; подставляя его во второе уравнение, получим $x^2-x^2+x^2-4=0$, т. е. $x^2-4=0$, откуда $x=\pm 2$. Таким образом, $x_2=2$; $y_2=-2$; $x_3=-2$; $y_3=2$.

Для решения системы уравнений (3) подставляем $y=x$ в первое уравнение: $x^2-x^2+x^2-6=0$; $x^2=6$, откуда $x=\pm\sqrt{6}$, т. е. $x_4=\sqrt{6}$; $y_4=\sqrt{6}$, $x_5=-\sqrt{6}$; $y_5=-\sqrt{6}$.

Чтобы решить систему уравнений (4), вычтем первое уравнение из второго, что даст $2xy+2=0$, откуда $xy=-1$. Используя это, можно первое из уравнений системы (4) заменить на $x^2+y^2=5$. Вместе с $xy=-1$ это даст систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ xy=-1. \end{cases}$$

Чтобы решить ее, умножим второе уравнение на 2, после чего прибавим к первому и вычтем из него.

В результате получаем систему

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=3; \\ x^2-2xy+y^2=7, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x+y)^2=3; \\ (x-y)^2=7, \end{cases}$$

все решения которой заключены в четырех системах:

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{3}; \\ x-y=\sqrt{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\sqrt{3}; \\ x-y=\sqrt{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\sqrt{3}; \\ x-y=-\sqrt{7}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-\sqrt{3}; \\ x-y=-\sqrt{7}, \end{cases}$$

т. е.

$$x_6=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \quad y_6=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}; \quad x_7=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2},$$

$$y_7=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}; \quad x_8=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \quad y_8=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};$$

$$x_9=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \quad y_9=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}.$$

Итак, исходная система имеет девять решений.

**325.** Преобразуем второе уравнение данной системы следующим образом: $x+y=\frac{4}{21}xy$; $x\neq 0$; $y\neq 0$. Подставляя на основании первого уравнения вместо $(x+y)$ его значение $-4$, получим

$$-4=\frac{4}{21}xy, \text{ или } xy=-21.$$

Зная сумму $x+y=-4$ и произведение $xy=-21$, считаем, что $x$ и $y$ есть корни некоторого квадратного уравнения.

Составив это уравнение, найдем значения для $x$ и $y$:

$$p=-(x+y)=4;$$

$$q=xy=-21,$$

тогда

$$z^2+4z-21=0,$$

откуда $z=-2\pm\sqrt{4+21}$; $z_1=x_1=3$; $z_2=y_1=-7$; $z_2=y_2=3$; $z_1=x_2=-7$.

*Отв.* $x_1=3$, $y_1=-7$; $x_2=-7$, $y_2=3$.

**326.** Умножив первое уравнение на 17, а второе на 11, приравниваем их левые части:

$$17(3x^2+2xy+y^2)=11(x^2+2xy+3y^2);$$

$$10x^2+3xy-4y^2=0.$$

Так как $y=0$ не удовлетворяет системе уравнений, то, разделив на $y^2$ и полагая $\frac{x}{y}=z$, получим

$$10z^2+3z-4=0,$$

откуда $z_1=\frac{1}{2}$; $z_2=-\frac{4}{5}$.

Подставляя в одно из уравнений системы сначала $y=2x$, а затем $y=-\frac{5}{4}x$, найдем четыре решения системы:

1) $x_1=1$, $y_1=2$; 3) $x_3=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_3=-\frac{5}{\sqrt{3}}$;

2) $x_2=-1$, $y_2=-2$; 4) $x_4=-\frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_4=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

**327.** Раскроем в первом уравнении системы скобки:

$$x^2+xy+y^2=19x^2-38xy+19y^2;$$

$$6x^2-13xy+6y^2=0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $x$, находим

$$x=\frac{13y\pm\sqrt{169y^2-144y^2}}{12}=\frac{13y\pm 5y}{12}.$$

Подставляя во второе уравнение значение $x = \frac{3}{2}y$, получим $\frac{9}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^2 + y^2 = \frac{7}{2}y$, откуда $y^2 - 2y = 0$ и, следовательно, $y_1 = 0$; $y_2 = 2$.

Подобным же образом найдем остальные корни, подставив значение $x = \frac{2}{3}y$.

328. Преобразуем данные уравнения:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1; \\ y(x^2 + 2xy + y^2) = 2, \quad (x \neq 0; \quad y \neq 0). \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{y(x+y)} = \frac{1}{2};$$

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 = y^2 + xy;$$

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $x^2$ $(x \neq 0)$:

$$\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 2 = 0.$$

Обозначим $\frac{y}{x} = z$, тогда $z^2 - 3z + 2 = 0$, откуда

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}; \quad z_1 = 2; \quad z_2 = 1.$$

Следовательно, $y_1 = 2x$ или $y_2 = x$.

Подставляя $y = 2x$ в первое уравнение системы, получим

$$9x^3 = 1; \quad x^3 = \frac{1}{9}; \quad x_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}.$$

После подстановки в это же уравнение $y = x$ будем иметь $2x^3 = 1$;

$x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$. Тогда $y_1 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$; $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

*Отв.* $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$, $y_1 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$; $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

329. Освободив от знаменателей оба уравнения, получим

$$\begin{cases} (y+x)\,7 = 48xy; \\ (x^2 - y^2)\,7 = 48xy; \end{cases} \quad x \neq 0.$$

Делим почленно второе уравнение на первое:

$$\frac{(x^2 - y^2)\,7}{(y+x)\,7} = \frac{48xy}{48xy},$$

откуда $x - y = 1$ и, следовательно, $x = 1 + y$.

Подставляем значение $x$ в первое уравнение:

$$(y + y + 1)\,7 = 48y\,(y + 1);$$

$$48y^2 + 34y - 7 = 0,$$

откуда

$$y_1 = \frac{1}{6};\quad y_2 = -\frac{7}{8};\quad x_1 = \frac{7}{6};\quad x_2 = \frac{1}{8}.$$

*Ответ:* $x_1 = \frac{7}{6},\quad y_1 = \frac{1}{6};\quad x_2 = \frac{1}{8},\quad y_2 = -\frac{7}{8}.$

**330.** Представим первое уравнение данной системы в виде

$$[(x + y) + 1]^2 + (x + y)^2 = 25;$$

$$(x + y)^2 + (x + y) - 12 = 0,$$

откуда

$$x + y = \frac{-1 \pm 7}{2}.$$

Таким образом, имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = -4; \\ x^2 - y^2 = 3, \end{cases} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} x + y = 3; \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему (1), получим $x_1 = -\frac{19}{8};\quad y_1 = -\frac{13}{8}$. Из системы (2) найдем $x_2 = 2;\ y_2 = 1$.

**331.** 1-й способ решения. Перепишем уравнения данной системы следующим образом:

$$x = \frac{2a}{a^2 - 1} + y; \qquad (1)$$

$$x - y = \frac{2xy}{a};\quad xy \neq 0. \qquad (2)$$

Из первого уравнения подставим значение $x$ во второе:

$$\frac{2a}{a^2 - 1} + y - y = \frac{2y}{a}\left(\frac{2a}{a^2 - 1} + y\right);$$

$$y^2 (a^2 - 1) + 2ay - a^2 = 0.$$

Отсюда легко найти значения $y_1,\ y_2,\ x_1,\ x_2$.

2-й способ решения. Предварительно найдем значение $xy$: $\frac{x - y}{xy} = \frac{2}{a}$, но $x - y = \frac{2a}{a^2 - 1}$, поэтому $xy = \frac{a^2}{a^2 - 1}$.

Представим теперь систему в виде

$$\begin{cases} x + (-y) = \frac{2a}{a^2 - 1}; \\ x(-y) = -\frac{a^2}{a^2 - 1}. \end{cases}$$

Составим квадратное уравнение, рассматривая $x$ и $(-y)$ как его корни:

$$z^2 - \frac{2az}{a^2-1} - \frac{a^2}{a^2-1} = 0.$$

Отсюда

$$z_1 = \frac{a}{a-1}; \quad z_2 = -\frac{a}{a+1}.$$

*Отв.* $x_1 = \frac{a}{a-1}$, $y_1 = \frac{a}{a+1}$; $x_2 = -\frac{a}{a+1}$, $y_2 = -\frac{a}{a-1}$.

**332.** Преобразуем данные уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} xy + (x+y) = 29; \\ xy(x+y) = 180. \end{cases}$$

Зная сумму и произведение количеств $xy$ и $x+y$, составим квадратное уравнение

$$z^2 - 29z + 180 = 0,$$

откуда $z_1 = 20$; $z_2 = 9$.

Следовательно, или $xy = 20$; $x + y = 9$ и тогда $x_1 = 5$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 5$, или $xy = 9$; $x + y = 20$ и тогда $x_3 = 10 + \sqrt{91}$ $y_3 = 10 - \sqrt{91}$; $x_4 = 10 - \sqrt{91}$, $y_4 = 10 + \sqrt{91}$.

**333.** Умножив обе части первого уравнения на $xy \neq 0$, а второго — на $20xy$, получим

$$\begin{cases} y - x = 2xy; \\ 20 - 20x^2y^2 = 9xy. \end{cases}$$

Обозначая $xy = z$, имеем из второго уравнения

$$20z^2 + 9z - 20 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$z_1 = \frac{4}{5}; \quad z_2 = -\frac{5}{4}.$$

Таким образом, имеем две системы:

$$\begin{cases} y - x = \frac{8}{5}; \\ xy = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y - x = -\frac{10}{4}; \\ xy = -\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Первая система уравнений имеет такие решения:

$$x_1 = \frac{2}{5}; \quad x_2 = -2; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = -\frac{2}{5}.$$

Решениями второй системы уравнений являются

$$x_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{4}, \quad y_3 = -\frac{5+\sqrt{5}}{4};$$

$$x_4 = \frac{5+\sqrt{5}}{4}, \quad y_4 = \frac{-5+\sqrt{5}}{4}.$$

Подставляя в данную систему найденные значения $x$ и $y$, убеждаемся, что все они удовлетворяют ей.

**334.** Представим данную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} x^2 = 8 - y^2; \\ 2y^2 + 2x^2 = x^2y^2; \end{cases} \qquad xy \neq 0.$$

Подставляя во второе уравнение значение $x^2$ из первого уравнения, получим

$$2y^2 + 2(8 - y^2) = (8 - y^2)y^2;$$
$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0;$$
$$(y^2 - 4)^2 = 0.$$

Значит, $y = \pm 2$ и, следовательно, $x = \pm\sqrt{8 - (\pm 2)^2} = \pm 2$.

Итак, $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -2$; $x_3 = 2$, $y_3 = -2$; $x_4 = -2$, $y_4 = 2$.

Проверка показывает, что найденные значения для $x$ и $y$ удовлетворяют заданному уравнению.

Примечание. Так как $xy \neq 0$, то данная система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8; \\ x^2y^2 = 16, \end{cases}$$

которую можно решить составлением квадратного уравнения по теореме Виета.

**335.** Представим второе уравнение данной системы в виде $y + x = 5 - xy$. Возвысив обе части этого уравнения в куб, получим

$$y^3 + 3xy(x + y) + x^3 = 125 - 15xy(5 - xy) - x^3y^3,$$

или

$$y^3 + x^3y^3 + x^3 + 3xy(y + x) + 15xy(5 - xy) - 125 = 0.$$

Подставим вместо первых трех членов последнего уравнения их значение (17) и вместо $(y + x)$ равное ему количество $(5 - xy)$:

$$17 + 3xy(5 - xy) + 15xy(5 - xy) - 125 = 0;$$
$$x^2y^2 - 5xy + 6 = 0,$$

откуда

$$xy = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

и, следовательно, $x_1y_1 = 3$; $x_2y_2 = 2$.

Из уравнения $y + xy + x = 5$ следует $y + x = 5 - 3 = 2$ или $y + x = 5 - 2 = 3$. По произведению и сумме чисел составим квадратное уравнение, из которого найдем:

$$x_1 = 1 + \sqrt{-2} = 1 + i\sqrt{2}, \qquad y_1 = 1 - i\sqrt{2};$$
$$x_2 = 2, \qquad y_2 = 1;$$
$$x_3 = y_1, \qquad y_3 = x_1;$$
$$x_4 = y_2, \qquad y_4 = x_2.$$

**336.** Эта система уравнений предлагалась для решения на математической олимпиаде. Предлагаем решить ее читателю.

*Отв.* Система имеет 8 решений:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 5 | $-5$ | $-5$ | $i\sqrt{23}$ | $i\sqrt{23}$ | $-i\sqrt{23}$ | $-i\sqrt{23}$ |
| $y$ | 4 | $-3$ | 4 | $-3$ | $\frac{1+i\sqrt{47}}{2}$ | $\frac{1-i\sqrt{47}}{2}$ | $\frac{1+i\sqrt{47}}{2}$ | $\frac{1-i\sqrt{47}}{2}$ |
| $z$ | 3 | $-4$ | 3 | $-4$ | $\frac{-1+i\sqrt{47}}{2}$ | $\frac{-1-i\sqrt{47}}{2}$ | $\frac{-1+i\sqrt{47}}{2}$ | $\frac{-1-i\sqrt{47}}{2}$ |

**337.** Представим данную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - xy = 4; \\ (x+y) + xy = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$(x+y)^2 + (x+y) = 6$$

и, следовательно, $x+y=2$ или $x+y=-3$. Сопоставляя каждое из этих уравнений со вторым уравнением данной системы, получим следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=2; \\ xy=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-3; \\ xy=5. \end{cases}$$

Первая система уравнений дает два решения:

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 2.$$

Вторая система уравнений тоже имеет два решения:

$$x_3 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}, \quad y_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2};$$

$$x_4 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}, \quad y_4 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

**338.** 1-й способ решения. Введем новую переменную $z = x - y$. Решая это уравнение совместно со вторым уравнением данной системы, получим

$$x = \frac{a+z}{2}; \quad y = \frac{a-z}{2}. \tag{1}$$

Подставляя эти значения в первое уравнение системы, имеем

$$(a+z)^4 + (a-z)^4 = 16b^4;$$

$$z^4 + 6a^2z^2 + (a^4 - 8b^4) = 0. \tag{2}$$

Обозначим $z^2 = t$, тогда

$$t^2 + 6a^2t + (a^4 - 8b^4) = 0. \tag{3}$$

Если свободный член этого уравнения $a^4 - 8b^4 > 0$, то заданная система вещественных корней не имеет. Если $a^4 - 8b^4 < 0$, то уравнение (3) имеет один положительный корень

$$t_1 = -3a^2 + \sqrt{8(a^4 + b^4)},$$

следовательно,

$$z_1 = \sqrt{t_1}, \quad z_2 = -\sqrt{t_1}.$$

Подставляя эти значения в уравнения (1), находим вещественные корни исходной системы.

2-й способ решения. Первое уравнение системы перепишем в виде

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = b^4.$$

Возводя в квадрат обе части второго уравнения, имеем

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy.$$

Из двух полученных уравнений легко найти $xy$:

$$(a^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = b^4;$$

$$2x^2y^2 - 4a^2xy - (b^4 - a^4) = 0,$$

откуда

$$xy = \frac{2a^2 - \sqrt{4a^4 + 2(b^4 - a^4)}}{2};$$

$$xy = \frac{2a^2 - \sqrt{2(a^4 + b^4)}}{2}.$$

Зная $xy$ и $x + y$, можно определить $x$ и $y$.

*Отв.* $x_1 = \frac{a + \sqrt{t_1}}{2}$, $y_1 = \frac{a - \sqrt{t_1}}{2}$; $x_2 = \frac{a - \sqrt{t_1}}{2}$, $y_2 = \frac{a + \sqrt{t_1}}{2}$.

**339.** Преобразуем первое уравнение следующим образом:

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 481;$$

$$(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = 481.$$

Приняв во внимание второе уравнение, составим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13; \\ x^2 + y^2 + xy = 37, \end{cases}$$

откуда $xy = 12$. Используя полученный результат, преобразуем второе уравнение к виду

$$(x + y)^2 = 49, \text{ откуда } x + y = \pm 7.$$

Вычитая из второго уравнения $3xy = 36$, получим

$$(x - y)^2 = 1; \quad x - y = \pm 1.$$

*Отв.* $x_{1,2} = \pm 4$, $y_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \pm 3$, $y_{3,4} = \pm 4$.

**340.** Преобразуем и возведем в квадрат второе уравнение данной системы:

$$x + y = 14 - \sqrt{xy};$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 196 + xy - 28\sqrt{xy};$$

$$x^2 + y^2 + xy = 196 - 28\sqrt{xy},$$

или на основании первого уравнения системы

$$196 - 28\sqrt{xy} = 84,$$

откуда $\sqrt{xy} = 4$; $xy = 16$. Подставляя во второе уравнение выражение $\sqrt{xy} = 4$, получим $x + y = 10$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10; \\ xy = 16, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 2$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 2$.

Примечание. Эту систему уравнений можно решить и так. Левую часть первого уравнения разлагаем на множители:

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - (\sqrt{xy})^2 = (x + y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}).$$

Отсюда, учитывая второе уравнение, имеем

$$14(x + y - \sqrt{xy}) = 84$$

или

$$x + y - \sqrt{xy} = 6.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 6; \\ x + y + \sqrt{xy} = 14, \end{cases}$$

из которой легко найти $x + y$ и $\sqrt{xy}$.

*Отв.* $x_1 = 2$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 2$.

**341.** Указание. Данная система уравнений приводится к следующим двум системам:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ xy = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3; \\ xy = 10. \end{cases}$$

*Отв.* $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = -3$, $y_2 = -1$; $x_3 = 1$, $y_3 = 3$; $x_4 = -1$, $y_4 = -3$; $x_5 = \dfrac{\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2}$, $y_5 = \dfrac{\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2}$; $x_6 = \dfrac{-\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2}$, $y_6 = \dfrac{-\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2}$; $x_7 = \dfrac{\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2}$, $y_7 = \dfrac{\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2}$; $x_8 = \dfrac{-\sqrt{23} + i\sqrt{17}}{2}$, $y_8 = \dfrac{-\sqrt{23} - i\sqrt{17}}{2}$.

**342.** Преобразуем первое уравнение системы:

$$(3x-4y)^2-(3x-4y)-2=0,$$

откуда

$$3x-4y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{cases} 3x-4y=2; \\ 8x+7y=68, \end{cases}$$

откуда $x_1=5\frac{21}{53}$; $y_1=3\frac{29}{53}$, и

$$\begin{cases} 3x-4y=-1; \\ 8x+7y=68, \end{cases}$$

откуда $x_2=5$; $y_2=4$.

*Отв.* $x_1=5\frac{21}{53}$, $y_1=3\frac{29}{53}$; $x_2=5$, $y_2=4$.

**343.** Если $y_1=0$, то $x_1=z_1=13$. Считая $y\neq 0$, разделим второе уравнение на первое:

$$x+z=3y^2.$$

Найденное значение $(x+z)$ подставим в третье уравнение:

$$y^3+3y^2+3y=26.$$

Прибавим к левой и правой частям уравнения по 1:

$$y^3+3y^2+3y+1=27;$$

$$(y+1)^3=27.$$

Таким образом, имеем $y+1=3$; $y_2=2$. Подставив в данные уравнения значение $y_2=2$, найдем

$$\begin{cases} x-z=4; \\ x+z=12, \end{cases}$$

откуда $x_2=8$; $z_2=4$.

Примечание. Можно второе уравнение преобразовать и так:

$$(x-z)(x+z)=3y^4;\quad y^2(x+z)-3y^4=0;$$

$$y^2(x+z-3y^2)=0,$$

откуда

$$\begin{cases} y=0 \\ x-z=0; \\ x+z=26 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+z=3y^2; \\ x-z=y^2; \\ y^3+3y^2+3y=26. \end{cases}$$

*Отв.* $y_1=0$, $x_1=z_1=13$; $y_2=2$, $x_2=8$, $z_2=4$.

344. Сложив все уравнения, получим

$$xy + yz + zx = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \qquad (1)$$

Вычтя каждое из уравнений системы из уравнения (1), получим систему

$$\begin{cases} zx = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}; \\ xy = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; \\ yz = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Перемножая уравнения (2) и извлекая квадратный корень из произведения, найдем

$$xyz = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}. \qquad (3)$$

Разделив уравнение (3) последовательно на уравнения (2), определим все корни данной системы:

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{a^2 + c^2 - b^2}};$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{b^2 + c^2 - a^2}}; \quad xyz \neq 0.$$

$$z_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{a^2 + b^2 - c^2}}.$$

Рекомендуем читателю выяснить, каким условиям должны удовлетворять параметры $a$, $b$, $c$, чтобы данная система имела решения.

345. Возведя первое уравнение системы в квадрат и вычтя из него второе, получим

$$xy + xz + yz = 54.$$

В силу третьего уравнения системы можно заменить первые два слагаемых через $2yz$:

$$yz = 18. \qquad (1)$$

Третье уравнение системы можно записать так:

$$xy + xz = 36;$$

$$x(y + z) = 36. \qquad (2)$$

Поскольку первое уравнение имеет вид

$$x + (y + z) = 13, \qquad (3)$$

то из уравнений (2) и (3) определяем $x$ и $y + z$:

$$\begin{cases} x = 9; \\ y + z = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 4; \\ y + z = 9. \end{cases}$$

Воспользовавшись для нахождения $y$ и $z$ уравнением (1), получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} y+z=4; \\ yz=18 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y+z=9; \\ yz=18. \end{cases}$$

**346.** Исключаем из системы уравнений неизвестное $z$. Для этого второе уравнение вычтем из первого, умноженного на $c$, а третье — из второго, также предварительно умноженного на $c$. В результате получим систему

$$\begin{cases} (c-a)x+(c-b)y=(c-d); \\ a(c-a)x+b(c-b)y=d(c-d), \end{cases}$$

из которой легко определяются $x$ и $y$. Аналогично определяем $z$.

*Отв.* $x=\frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}$; $y=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}$; $z=\frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)}$.

**347.** Вычтя из второго уравнения первое, получим $y+2z=1$, откуда $y=1-2z$. Полученное значение $y$ подставим в первое уравнение: $x=z+3$.

Найденные значения для $x$ и $y$ подставим в третье уравнение: $3z^2+z-2=0$, откуда $z_1=\frac{2}{3}$ и $z_2=-1$. Подставляя значения $z$ в уравнения $x=z+3$ и $y=1-2z$, вычислим $y$ и $x$:

1) $x=\frac{11}{3}$; $y=-\frac{1}{3}$; $z=\frac{2}{3}$;

2) $x=2$; $y=3$; $z=-1$.

**348.** У к а з а н и е. Перемножая почленно первое и второе уравнения системы, получим

$$\frac{(x+y)(z+t)}{xyzt}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 18}; \quad xyzt\neq 0,\ (x+y)(z+t)\neq 0.$$

Воспользовавшись четвертым уравнением системы, находим

$$(x+y)(z+t)=105. \qquad (1)$$

Полагая, что $x+y$ и $z+t$ корни квадратного уравнения, по их сумме (третье уравнение системы) и произведению (1) составляем уравнение

$$u^2-22u+105,$$

откуда

$$u_1=7; \quad u_2=15.$$

Следовательно, или

$$x+y=7; \quad z+t=15,$$

или

$$x+y=15; \quad z+t=7.$$

Подставив соотношения (2) в первые два уравнения, получим

$$\begin{cases} x+y=7; \\ xy=12 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z+t=15; \\ zt=54. \end{cases}$$

*Отв.* $x_1=3,\ y_1=4,\ z_1=6,\ t_1=9;$
$x_2=3,\ y_2=4,\ z_2=9,\ t_2=6;$
$x_3=4,\ y_3=3,\ z_3=6,\ t_3=9;$
$x_4=4,\ y_4=3,\ z_4=9,\ t_4=6.$

**349.** Указание. Так как $z=0$ не удовлетворяет системе, то, вынося $z^2$ за скобки в каждом уравнении системы, найдем

$$\begin{cases} z^2\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}-1\right)=0; \\ z^2\left(\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}\right)=47; \\ z^2\left(1-\frac{x}{z}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)=2. \end{cases}$$

Полагая $\frac{x}{z}=a$ и $\frac{y}{z}=b$, получим систему

$$\begin{cases} z^2(a^2+b^2-1)=0; \\ z^2(ab+b+a)=47; \\ z^2(1-a)(1-b)=2, \end{cases}$$

которая приводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными.

Примечание. Этот пример можно решить и другим способом. Сложив все три уравнения, получим

$$x^2+y^2+2xy=49; \quad x+y=\pm 7.$$

Прибавив к первому уравнению второе, умноженное на 2, будем иметь

$$(x+y)^2=z^2-2z(x+y)+94; \quad z^2\pm 14z+45=0,$$

откуда легко определить неизвестные.

**350.** Указание. Возведем первое уравнение в квадрат и вычтем из него второе:

$$xy=\frac{9z^2-5z}{2}.$$

Из третьего уравнения следует

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=9z.$$

Заменив здесь $x+y$ на $3z$, $x^2+y^2$ — на $5z$, $xy$ — на $\frac{9z^2-5z}{2}$, получим $z_1=0$; $z_2=1$; $z_3=\frac{2}{3}$.

*Отв.* $x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0;$

$x_2 = 1, \quad y_2 = 2, \quad z_2 = 1;$

$x_3 = 2, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = 1;$

$x_4 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad y_4 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad z_4 = \frac{2}{3};$

$x_5 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad y_5 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad z_5 = \frac{2}{3}.$

**351.** Из первого и второго уравнений вычтем, а к третьему прибавим $a^2$:

$$\begin{cases} xy + ax - ay - a^2 = m - a^2; \\ yz - ay + az - a^2 = n - a^2; \\ zx - az - ax + a^2 = p + a^2. \end{cases}$$

После преобразований получим

$$\begin{cases} (x - a)(y + a) = m - a^2; \\ (a + y)(z - a) = n - a^2; \\ (z - a)(x - a) = p + a^2. \end{cases} \tag{1}$$

Перемножив эти уравнения, будем иметь

$$(x - a)^2 (a + y)^2 (z - a)^2 = (m - a^2)(n - a^2)(p + a^2),$$

откуда

$$(x - a)(a + y)(z - a) = \pm \sqrt{(m - a^2)(n - a^2)(p + a^2)}. \tag{2}$$

Разделим уравнение (2) на каждое из трех уравнений (1):

$$z - a = \pm \sqrt{\frac{(m - a^2)(n - a^2)(p + a^2)}{(m - a^2)^2}},$$

откуда

$$z = a \pm \sqrt{\frac{(n - a^2)(p + a^2)}{m - a^2}};$$

$$x - a = \pm \sqrt{\frac{(m - a^2)(n - a^2)(p + a^2)}{(n - a^2)^2}},$$

откуда

$$x = a \pm \sqrt{\frac{(m - a^2)(p + a^2)}{n - a^2}};$$

$$a + y = \pm \sqrt{\frac{(m - a^2)(n - a^2)(p + a^2)}{(p + a^2)^2}};$$

откуда

$$y = -a \pm \sqrt{\frac{(m - a^2)(n - a^2)}{p + a^2}};$$

здесь $(m - a^2)(n - a^2)(p + a^2) > 0.$

352. 1-й способ решения. Представим данную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} x+y-z=\dfrac{a}{x}; \\ x+y-z=\dfrac{b}{y}; \\ x+y-z=\dfrac{c}{z}; \end{cases} \qquad xyz \neq 0,$$

откуда

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{b}{a}x; \quad z=\frac{c}{a}x.$$

Подставляя эти зависимости в первое уравнение, получим

$$x\left(x+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}x\right)=a;$$

$$x^2(a+b-c)=a^2,$$

откуда

$$x_{1,2}=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b-c}};$$

$$y_{1,2}=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b-c}}; \quad a+b-c>0;$$

$$z_{1,2}=\pm\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}.$$

2-й способ решения. Складывая почленно два первых уравнения и от суммы отнимая третье, получим

$$x+y-z=\pm\sqrt{a+b-c}.$$

Подставляя в первое, второе и третье уравнения найденное значение $x+y-z$, будем иметь

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b-c}}; \quad y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b-c}}; \quad z=\pm\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}.$$

353. Сложим все три уравнения системы:

$$(x+y+z)[a(x+y+z)+2(x+y+z)]=1+m+n;$$

$$(x+y+z)^2(a+2)=1+m+n,$$

откуда

$$x+y+z=\pm\sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}}.$$

Заменим в первом уравнении $x+y+z$ на его значение, а $y \neq z$ — на $-x \pm \sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}}$:

$$\pm \sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}} \left[ax - x \pm \sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}}\right] = 1,$$

откуда

$$x = \pm \frac{1}{a-1}\left(\sqrt{\frac{a+2}{1+m+n}} - \sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}}\right);$$

$$(a+2)(1+m+n) > 0; \quad a \neq 1.$$

Аналогично во втором уравнении заменяем $x+y+z$ на его значение, а $x+z$ — на $-y \pm \sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}}$:

$$y = \pm \frac{1}{a-1}\left(m\sqrt{\frac{a+2}{1+m+n}} - \sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}}\right).$$

Таким же способом находим $z$:

$$z = \pm \frac{1}{a-1}\left(n\sqrt{\frac{a+2}{1+m+n}} - \sqrt{\frac{1+m+n}{a+2}}\right).$$

**354.** 1-й способ решения. Представим данную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} xy + xz + yz = \frac{7}{2}; \\ x + y + z = \frac{7}{2}; \\ xyz = 1. \end{cases}$$

На основании свойств корней кубического уравнения значения $x$, $y$ и $z$ должны удовлетворять уравнению

$$w^3 - \frac{7}{2}w^2 + \frac{7}{2}w - 1 = 0,$$

откуда $w_1 = 1$; $w_2 = 2$; $w_3 = \frac{1}{2}$.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 2; \\ z_1 = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2; \\ y_2 = \frac{1}{2}; \\ z_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}; \\ y_3 = 1; \\ z_3 = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 1; \\ y_4 = \frac{1}{2}; \\ z_4 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = 2; \\ y_5 = 1; \\ z_5 = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \frac{1}{2}; \\ y_6 = 2; \\ z_6 = 1. \end{cases}$$

2-й способ решения. Приведем данную систему к виду

$$\begin{cases} xy + xz + yz = \frac{7}{2}; \\ x + y + z = \frac{7}{2}; \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Заменив в первом уравнении $xy$ и $x + y$ соответственно через $\frac{1}{z}$ и $\frac{7}{2} - z$, получим

$$\frac{1}{z} + z\left(\frac{7}{2} - z\right) = \frac{7}{2};$$

$$2z^3 - 7z^2 + 7z - 2 = 0;$$

$$(z - 1)(2z^2 - 5z + 2) = 0.$$

Отсюда $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ и $z_3 = \frac{1}{2}$. Зная значения $z$, легко определить $x$ и $y$.

Примечание. Поскольку данное уравнение симметричное относительно $x$, $y$, $z$, то систем корней должно быть столько, сколько можно составить перестановок из трех элементов: $P_3 = 6$.

355. Первые два уравнения на основании свойства равных отношений дадут

$$\frac{2(xy + yz + zx)}{a + b + c} = \frac{xy + xz}{a} = \frac{yz + xy}{b} = \frac{zx + zy}{c}.$$

На основании третьего уравнения имеем

$$2xyz = \frac{xy + xz}{a} = \frac{yz + yx}{b} = \frac{zx + zy}{c},$$

что можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right) = 2; \\ \frac{1}{b}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 2; \\ \frac{1}{c}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 2a; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b; \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2c. \end{cases}$$

Складывая все уравнения, получим

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a+b+c,$$

следовательно,

$$x=\frac{1}{b+c-a};\quad y=\frac{1}{a+c-b};\quad z=\frac{1}{a+b-c}.$$

**356.** Обозначим величину каждой дроби через $t$:

$$\begin{cases} x+y-z=5t; \\ y+z-x=7t; \\ z+x-y=11t; \\ xyz=3t. \end{cases}$$

К первому уравнению прибавим второе:

$$2y=12t;\quad y=6t;$$

к третьему — первое:

$$2x=16t;\quad x=8t$$

и ко второму — третье:

$$2z=18t;\quad z=9t.$$

Подставим найденные значения в четвертое уравнение:

$$9\cdot 8\cdot 6t^3=3t;\quad 3t(144t^2-1)=0,$$

откуда $t_1=0;\quad t_2=\frac{1}{12};\quad t_3=-\frac{1}{12}$.

*Отв.* $\begin{cases} x_1=0; \\ y_1=0; \\ z_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{2}{3}; \\ y_2=\frac{1}{2}; \\ z_2=\frac{3}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-\frac{2}{3}; \\ y_3=-\frac{1}{2}; \\ z_3=-\frac{3}{4}. \end{cases}$

**357.** При $a\neq 0$ $x=t$; $y=at$; $z=2at$, где $t$ — любое число. При $a=0$ $x$ — любое число; $y=0$; $z=0$.

**358.** Сложив и отняв отдельно правые и отдельно левые части первого и второго уравнений, получим

$$z=\frac{a}{2}-x;$$

$$y=-\frac{a}{2}.$$

Подставим найденные значения $z$ и $y$ в третье уравнение системы, предварительно преобразовав его:

$$\frac{a}{2} - x - x = \left(b - \frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{2} - x\right)x;$$

$$2(ab - 2)x^2 - a(ab + 2)x + a^2 = 0.$$

Решая полученное уравнение, найдем, что

$$x = a\,\frac{ab + 2 \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab + 20}}{4(ab - 2)}.$$

Тогда

$$z = a\,\frac{ab - 6 \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab + 20}}{4(ab - 2)}.$$

Чтобы корни системы были действительными числами, необходимо выполнение условия $a^2b^2 - 4ab + 20 > 0$, что в данном случае справедливо при всяких действительных значениях $ab$, так как

$$a^2b^2 - 4ab + 20 = (ab - 2)^2 + 16 > 0.$$

При решении предполагалось, что $a \neq 0$ и $ab \neq 2$. Исследуем теперь решение примера при $a = 0$ и $ab = 2$. При $a = 0$ и $y = 0$ уравнение корней не имеет, при $a \neq 0$ и $ab = 2$ квадратное уравнение относительно $x$ будет иметь вид

$$4x = a,$$

откуда $x = \frac{a}{4}$ и, следовательно, $y = -\frac{a}{2}$ и $z = \frac{a}{4}$.

359. Указание. Вычтя из первого уравнения системы сперва второе, а затем третье, получим

$$(y - x)(x + y + z) = a^2 - b^2;$$

$$(z - x)(x + y + z) = a^2 - c^2.$$

Обозначим $x + y + z = \alpha$ и сложим полученные уравнения:

$$(x + y + z - 3x)\alpha = 2a^2 - b^2 - c^2;$$

$$(\alpha - 3x)\alpha = 2a^2 - b^2 - c^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2a^2}{3\alpha} = \frac{1}{3}\left(\alpha + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{\alpha}\right).$$

Аналогично определим $x$ и $z$.

Чтобы определить $\alpha$, подставим найденные значения $x$, $y$ и $z$ в любое уравнение системы ($a$, $b$ и $c$ одновременно не равны нулю).

Если $a = b = c = 0$, то $x = y = z = 0$.

*Отв.* $x = \frac{1}{3}\left(\alpha + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{\alpha}\right)$;

$y = \frac{1}{3}\left(\alpha + \frac{a^2 + c^2 - 2b^2}{\alpha}\right)$;

$z = \frac{1}{3}\left(\alpha + \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{\alpha}\right)$,

где $\alpha$ имеет одно из следующих четырех значений:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{3(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}.$$

## Показательные и логарифмические уравнения

**360.** Так как $\lg(\lg^2 a) = 2\lg\lg a$, то $\lg\lg^2 a$ вдвое больше $\lg\lg a$; $\lg a > 1$, $\lg\lg a > 0$.

**361.** $\lg 5 = \lg\frac{10}{2} = \lg 10 - \lg 2 = 1 - \lg 2 = 1 - 0{,}30103 = 0{,}69897$.

**362.** Если $a > 1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т. е. $\log_a 2 < \log_a 3$.

Если $a < 1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. $\log_a 2 > \log_a 3$.

Всегда предполагается, что $a > 0$ ($a \neq 1$).

**363.** $x = 10 \cdot 10^{2\left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right)} = 10 \cdot 10^{\lg 9 - 2\lg 2} = 10 \cdot 10^{\lg\frac{9}{4}}$.

Согласно определению логарифма $10^{\lg\frac{9}{4}} = \frac{9}{4}$, таким образом, $x = 10\frac{9}{4} = 22{,}5$.

Примечание. Этот пример можно решить и так:

$$\lg x = \lg 10 + \left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right)\lg 100;$$

$$\lg x = \lg 10 + \lg 9 - 2\lg 2 = \lg\frac{10 \cdot 9}{2^2}.$$

*Отв.* $x = 22{,}5$.

**364.** На основании основного показательно-логарифмического тождества $a^{\log_a N} = N$ данное выражение равно 1600.

**365.**

$$7^{\log_{49}5 - 1} = \frac{7^{\log_{49}5}}{7} = \frac{49^{\frac{1}{2}\log_{49}5}}{7} = \frac{49^{\log_{49}\sqrt{5}}}{7} = \frac{\sqrt{5}}{7}.$$

**366.** Принимая во внимание, что $\log_{25} 16 = \frac{\log_5 16}{\log_5 25} = \frac{1}{2}\log_5 16$ и $125 = 5^3$, запишем данное выражение в виде

$$5^{\frac{3}{2}\log_5 16}, \text{ или } 5^{\log_5 16^{\frac{3}{2}}}.$$

Применяя основное показательно-логарифмическое тождество, получим

$$5^{\log_5 16^{\frac{3}{2}}} = 16^{\frac{3}{2}} = 64.$$

**367.**

$$\lg x = \lg \sqrt[8]{\frac{0{,}03586\sqrt[4]{257}}{0{,}00501}} = \frac{1}{8}\lg 0{,}03586 + \frac{1}{32}\lg 257 - \frac{1}{8}\lg 0{,}00501.$$

$$\lg 0{,}03586 = \overline{2},5546; \quad \frac{1}{8}\lg 0{,}03586 = \overline{2},5546 : 8 = \overline{1},8193;$$

$$\lg 257 = 2{,}4099; \quad \frac{1}{32}\lg 257 = 2{,}4099 : 32 = 0{,}0753;$$

$$\lg 0{,}00501 = \overline{3},6998; \quad \frac{1}{8}\lg 0{,}00501 = \overline{1},7125.$$

Складывая полученные значения логарифмов, находим

$$\lg x = \overline{1},8193 + 0{,}0753 - \overline{1},7125 = 0{,}1821; \quad x = 1{,}521.$$

*Отв.* 1,521.

**368.** $\log_2^2 x\left(\log_2^2 x + 12\log_2\frac{8}{x}\right) = \log_2^2 x(\log_2^2 x - 12\log_2 x + 36) =$

$$= \log_2^2 x(\log_2 x - 6)^2 = [\log_2 x(6 - \log_2 x)]^2.$$

Так как произведение двух положительных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве этих сомножителей, то $\log_2 x = 3$. Таким образом, получим $x = 8$.

*Отв.* 81.

**369.** 1-й способ решения.

$$\log_6 16 = \frac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} 2^4}{\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)} = \frac{4\log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \frac{4a}{1-a}.$$

2-й способ решения. Обозначим $\log_6 16 = x$. Тогда $6^x = 16$; $6^x = 2^4$; $6 = 2^{\frac{4}{x}}$.

$$\log_{12} 2 = a; \quad 12^a = 2; \quad 12 = 2^{\frac{1}{a}}.$$

Отсюда

$$\frac{12}{6}=\frac{2^{\frac{1}{a}}}{2^{\frac{4}{x}}};\quad 2=2^{\frac{1}{a}-\frac{4}{x}};\quad \frac{1}{a}-\frac{4}{x}=1;\quad x=\frac{4a}{1-a}.$$

*Отв.* $\frac{4a}{1-a}$.

**370.** Функция будет иметь смысл, если подкоренное выражение

$$\lg\frac{x-5}{x^2-4}\geqslant 0,$$

а это возможно, когда

$$\frac{x-5}{x^2-4}\geqslant 1;$$

$$\frac{x-5-x^2+4}{x^2-4}\geqslant 0,$$

или

$$\frac{x^2-x+1}{x^2-4}\leqslant 0;$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{x^2-4}\leqslant 0.$$

Но $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ при любом действительном значении $x$, поэтому

$$x^2-4<0,$$

откуда

$$|x|>2;$$

$$-2<x<2.$$

*Отв.* Промежуток (—2,2).

**371.** Используя модуль перехода

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a},$$

приведем логарифмы к основанию 10:

$$\log_9 5\cdot\log_{25}27=\frac{\lg 5}{\lg 9}\cdot\frac{\lg 27}{\lg 25}=\frac{\lg 5}{2\lg 3}\cdot\frac{3\lg 3}{2\lg 5}=\frac{3}{4}.$$

Примечание. Этот пример можно решить, не применяя модуль перехода.

Обозначим $\log_6 5=x$, а $\log_{25}27=y$. Тогда $9^x=5$; $25^y=27$. После некоторых преобразований получим

$$9^{2xy}=27=9^{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$xy=\frac{3}{4}.$$

**372.** Дополним данное выражение до полного квадрата:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab; \quad (a+b)^2 = 9ab,$$

откуда

$$a + b = 3\sqrt{ab}; \quad \frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}.$$

Логарифмируем:

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b).$$

**373.**

$$\lg 15 = \lg \frac{30}{2} = \lg 30 - \lg 2 = \lg 3 + 1 - \lg 2 =$$

$$= 0{,}4771 + 1 - 0{,}3010 = 1{,}1761.$$

**374.** Известно, что логарифм нуля не существует, но если число убывает до нуля, то его логарифм при основании, большем единицы, неограниченно уменьшается, т. е. стремится к $-\infty$. Поэтому, чтобы логарифм числа при основании, большем единицы, неограниченно уменьшался, само число должно приближаться к нулю, оставаясь все время положительным.
Следовательно,

$$\log_4 \log_3 \log_2 x \to 0.$$

Отсюда

$$\log_3 \log_2 x \to 1;$$

$$\log_2 x \to 3;$$

$$x \to 2^3 = 8.$$

**375.** Обозначим $\lg_b a = x$. Следовательно, по определению логарифма $b^x = a$; возводя это выражение в степень $n$, получим $b^{nx} = a^n$, или $(b^n)^x = a^n$. Таким образом, $\lg_{b^n} a^n = x$, а так как $x = \lg_b a$, то $\lg_{b^n} a^n = \lg_b a$.

Примечание. Этот пример можно решить и так: используя модуль перехода, имеем

$$\log_{b^n} a^n = \frac{\log_b a^n}{\log_b b^n} = \frac{n \log_b a}{n \log_b b} = \log_b a,$$

что и требовалось доказать.

**376.** Запишем данное уравнение в виде

$$7 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}.$$

Вынеся за скобку $3^x$ и $5^x$, получим $3^x(7 \cdot 3 - 3^4) = 5^x(5^2 - 5^3)$ или $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$, откуда $x = -1$.

*Ответ.* $x = -1$.

**377.** Вынеся за скобки в левой части уравнения $3^{x-2}$, а в правой части $5^{x-2}$, получим уравнение

$$3^{x-2}(3^3+3+1)=5^{x-2}(5^2+5+1),$$

или

$$3^{x-2}=5^{x-2}. \qquad (1)$$

Поскольку основания различны и отличны от 0 и 1, а показатели одинаковы, то уравнение (1) возможно только тогда, когда показатель равен нулю. Следовательно, $x-2=0$; $x=2$.

Уравнение (1) можно решить еще и так. Разделив левую и правую части на $5^{x-2}$, найдем

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}=1,$$

откуда

$$x-2=0; \quad x=2.$$

*Отв.* $x=2$.

**378.** Имеем

$$5^{2x}-20\cdot 5^x-125=0.$$

Обозначим $5^x=y$, тогда это уравнение будет иметь вид

$$y^2-20y-125=0,$$

откуда $y_1=25$ (решение $y_2=-5$ не учитываем как отрицательное).

Таким образом, получим

$$5^x=5^2; \quad x=2.$$

*Отв.* $x=2$.

**379.** Разделим левую и правую части уравнения на $4^x$:

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{3\sqrt{3}}{8}; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, $x=\frac{3}{2}$.

*Отв.* $x=\frac{3}{2}$.

**380.** Обозначим $x+\sqrt{x^2-2}=y$, тогда $4^y-5\cdot 2^{y-1}=6$; $2^{2y}-\frac{5}{2}\cdot 2^y-6=0$; $2\cdot 2^{2y}-5\cdot 2^y-12=0$, откуда $2^y=\frac{5+11}{4}$; $2^y=4$; $2^y=2^2$; $y=2$ (знак минус перед радикалом приводит к уравнению $2^y=-\frac{3}{2}$, которое не удовлетворяется никакими действительными значениями $y$).

Таким образом, $x+\sqrt{x^2-2}=2$; $\sqrt{x^2-2}=2-x$; $x^2-2=(2-x)^2$; $x^2-2=4-4x+x^2$, откуда $4x=6$.

*Отв.* $x=\frac{3}{2}$.

381. Принимая во внимание, что $x>0$ (при $x\leqslant 0$ уравнение теряет смысл), данное уравнение можно представить в виде

$$5^{\frac{5}{\sqrt{x}}}=5^{\sqrt{x}-4},$$

откуда

$$\frac{5}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-4;$$

$$x-4\sqrt{x}-5=0.$$

Следовательно, $\sqrt{x}=2\pm 3$.

В связи с условием рассматривать только арифметическое значение корня, решение $\sqrt{x}=-1$ отбрасываем. Таким образом $\sqrt{x}=5$.

*Отв.* $x=25$.

382. Если два положительных числа равны, то равны и их логарифмы. Принимая во внимание, что $x>0$, и логарифмируя уравнение $x^x=x$ (при основании 10), получим

$$x\lg x=\lg x;\quad (x-1)\lg x=0,$$

откуда $\lg x=0$ и, следовательно, $x_1=1$, или $x-1=0$ и $x_2=1$, т. е. единица есть двукратный корень данного уравнения.

*Отв.* 1.

383. Логарифмируя, получим

$$\sqrt{x}\lg x=\frac{x}{2}\lg x;\quad \sqrt{x}\lg x-\frac{x}{2}\lg x=0;$$

$$\lg x\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)=0,$$

откуда $\lg x=0$; $x_1=1$.

Если же $\sqrt{x}-\frac{x}{2}=0$, то $\sqrt{x}=\frac{x}{2}$, откуда $x=\frac{x^2}{4}$; $x_2=4$ $(x>0)$.

Значение $x=0$ не удовлетворяет исходному уравнению.

*Отв.* 1; 4.

384.

$$\log_{a^k}a^x=\log_{a^k}(a^k)^{\frac{x}{k}}=\frac{x}{k}\log_{a^k}a^k=\frac{x}{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{k}=b;$$

$$x=bk.$$

**385.** Преобразуем данное уравнение:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

*Отв.* $x = -\frac{1}{4}$.

**386.** Сгруппировав слагаемые, получим

$$34 \cdot 7^x - 34 \cdot 5^{2x} = 0; \quad 7^x - 5^{2x} = 0; \quad 7^x = 25^x; \quad \left(\frac{7}{25}\right)^x = 1.$$

*Отв.* $x = 0$.

**387.** Обозначив $2^x = y$, получим

$$2y^2 - \frac{33}{2}y + 4 = 0;$$

$$4y^2 - 33y + 8 = 0,$$

откуда $y_1 = \frac{1}{4}$; $y_2 = 8$.

Следовательно,

$$2^x = 2^{-2}; \quad x_1 = -2;$$

$$2^x = 2^3; \quad x_2 = 3.$$

*Отв.* $-2$; 3.

**388.** *Отв.* $x_1 = 3$; $x_2 = 1$.

**389.** Запишем данное уравнение в виде

$$3^{x^2-7,7x+16,5} = 3^{3,5},$$

откуда

$$x^2 - 7,7x + 13 = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = 5,2; \quad x_2 = 2,5.$$

*Отв.* 5,2; 2,5.

**390.** Логарифмируя обе части уравнения, будем иметь

$$(3x - 7)(\lg 3 - \lg 7) = (7x - 3)(\lg 1 - \lg 3),$$

или

$$x(10 \lg 3 - 3 \lg 7) = 10 \lg 3 - 7 \lg 7,$$

откуда

$$x = \frac{10 \lg 3 - 7 \lg 7}{10 \lg 3 - 3 \lg 7}.$$

Числовое значение $x$ находим при помощи таблицы логарифмов.

**391.** Представим данное уравнение в следующем виде:

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}},$$

тогда получим

$$\frac{5(x+5)}{x-7} = -2 + \frac{7(x+17)}{x-3}.$$

Решая это уравнение, найдем, что $x = 10$.

*Отв.* 10.

**392.** Представим данное уравнение в виде

$$3^{2x-3} \cdot 5^{2x-3} = 3^{x} \cdot 5^{3x-6}, \text{ или } 3^{x-3} = 5^{x-3}.$$

Это равенство возможно лишь тогда, когда $x - 3 = 0$, т. е. $x = 3$.

*Отв.* 3.

**393.** Разделив все члены уравнения на $6^{-\frac{1}{x}}$, получим

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}}; \quad \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}\right]^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} - 1 = 0,$$

откуда $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (знак минус перед радикалом опускаем, так как левая часть не может быть отрицательной).

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Логарифмируя, получим $\frac{1}{x}\lg\frac{3}{2} = \lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, откуда

$$x = \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg(\sqrt{5}-1) - \lg 2}.$$

**394.** Имеем

$$5^{2x} + 5^{x} \cdot 25 = 1250.$$

Обозначим $5^x = y$, тогда $y^2 + 25y - 1250 = 0$, откуда $y_1 = 25$; $y_2 = -50$ ($y_2$ условию задачи не удовлетворяет).

Таким образом, $5^x = 25$, или $5^x = 5^2$.

*Отв.* $x = 2$.

**395.** После соответствующих преобразований имеем

$$\left(\frac{57}{37}\right)^{x} + \left(\frac{57}{37}\right)^{-x} = 10\frac{37}{57}.$$

Обозначим $y = \left(\frac{57}{37}\right)^x$:

$$y^2 - 10\frac{37}{57}y + 1 = 0; \quad 57y^2 - 370y + 57 = 0,$$

откуда

$$y_1 = \frac{361}{57}; \quad y_2 = \frac{9}{57}.$$

Поскольку

$$y = \left(\frac{57}{37}\right)^x, \text{ то } \left(\frac{57}{37}\right)^x = \frac{361}{57},$$

откуда

$$x_1 = \frac{\lg 361 - \lg 57}{\lg 57 - \lg 37} = \frac{2\lg 19 - \lg 19 - \lg 3}{\lg 57 - \lg 37} = \frac{\lg 19 - \lg 3}{\lg 57 - \lg 37}.$$

Пусть $\left(\frac{57}{37}\right)^x = \frac{9}{57}$, тогда

$$x_2 = \frac{2\lg 3 - \lg 19 - \lg 3}{\lg 57 - \lg 37} = \frac{\lg 3 - \lg 19}{\lg 57 - \lg 37}.$$

**396.** Преобразуем данное уравнение так:

$$2^{-3} \cdot 2^{4x-6} = \frac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{-3x}}; \quad 2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x}.$$

Следовательно,

$$4x - 9 = \frac{5}{2}x.$$

*Отв.* $x = 6$.

**397.** Перепишем данное уравнение в виде

$$2^{\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}\right)\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 2^2;$$

приравнивая показатели, получим

$$\frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2, \text{ или } 2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0.$$

Обозначим $\sqrt{x} = y$, тогда $2y^2 - 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = 3$; $y_2 = -\frac{1}{2}$ ($y_2$ не удовлетворяет уравнению).

Таким образом, $y = \sqrt{x}$, откуда $x = 9$.

*Отв.* $x = 9$.

**398.** Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}} = 1; \quad 2^{x^2-40x} = \left(\frac{1}{64}\right)^{24};$$

$$2^{x^2-40x} = (2^{-6})^{24};$$

$$x^2 - 40x + 144 = 0,$$

откуда $x_1 = 36$, $x_2 = 4$.

*Отв.* 36; 4.

**399.** Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2},$$

тогда

$$x-1-\frac{1}{x}=2;\quad x^2-3x-1=0,$$

откуда

$$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2};\quad x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

**400.** Логарифмируя данное уравнение (при основании 10), получаем

$$\frac{\lg x+7}{4}\lg x=\lg x+1;$$

$$\lg^2 x+3\lg x-4=0,$$

откуда

$$\lg x_1=1;\quad \lg x_2=-4.$$

Следовательно, $x_1=10$; $x_2=0{,}0001$.

*Отв.* 10; 0,0001.

**401.** Потенцируя, получаем

$$9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1);$$

$$(3^{x-1})^2-4(3^{x-1})+3=0,$$

откуда

$$(3^{x-1})_1=3,\quad x_1=2;\quad (3^{x-1})_2=1,\quad x_2=1.$$

*Отв.* 2; 1.

**402.** Логарифмируя, получаем

$$\log_a^2 x-\log_a x-2=0,$$

откуда

$$\log_a x=2;\quad \log_a x=-1.$$

*Отв.* $x_1=a^2$; $x_2=a^{-1}$.

**403.** При помощи модуля перехода получим

$$\log_x 7+\frac{\log_x 7}{2}=6;\quad 3\log_x 7=12;\quad \log_x 7=4;\quad x^4=7.$$

*Отв.* $x=\sqrt[4]{7}$.

Примечание. Этот пример можно решить, не прибегая к модулю перехода ($x > 0$, $x \neq 1$):

$$\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6;$$

$$\log_x 7 + \log_x \sqrt{7} = \log_x x^6,$$

откуда

$$\log_x (7 \cdot \sqrt{7}) = \log_x x^6.$$

Потенцируя, получим $7^{\frac{3}{2}} = x^6$; $x = \sqrt[4]{7}$.

**404.** Очевидно, что $x > \frac{7}{2}$. Потенцируя уравнение, находим

$$\frac{3x-5}{2x} \cdot \frac{x+1}{2(2x-7)} = \frac{5}{x};$$

$$x^2 - 14x + 45 = 0,$$

откуда $x_1 = 5$; $x_2 = 9$. Оба корня удовлетворяют условию $x > \frac{7}{2}$.

*Отв.* $x_1 = 5$; $x_2 = 9$.

**405.** Заметим, что $x > 1$ (при $x \leqslant 1$ уравнение теряет смысл). Запишем данное уравнение в виде

$$\lg x - \lg 6 = \frac{1}{2} \lg x - \lg (\sqrt{x} - 1).$$

Потенцируя, найдем

$$\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}; \quad \sqrt{x}(x - \sqrt{x} - 6) = 0.$$

Приняв во внимание, что $x > 1$, получим уравнение

$$(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 = 0,$$

откуда $\sqrt{x} = 3$; $x = 9$. Значение $\sqrt{x} = -2$ не рассматриваем.

Следовательно, данное логарифмическое уравнение имеет один корень.

*Отв.* $x = 9$.

**406.** Очевидно, что $x > -2$ (при $x \leqslant -2$ левая часть уравнения теряет смысл).

Потенцируя, находим $\frac{x^3+8}{x+2} = 10$, откуда, принимая во внимание, что $x + 2 \neq 0$, получим уравнение

$$x^2 - 2x + 4 = 10, \text{ или } x^2 - 2x - 6 = 0,$$

имеющее два решения.

*Отв.* $x_1 = 1 + \sqrt{7}$; $x_2 = 1 - \sqrt{7}$.

**407.** Решения данного уравнения должны удовлетворять условию $x > -3$. Умножим левую и правую части уравнения на 2. Тогда

данное уравнение будет иметь вид $\lg(x+3)+\lg(x+24)=2$; потенцируя, получим

$$(x+3)(x+24)=100;\quad x^2+27x-28=0,$$

откуда $x_1=1$; $x_2=-28$.

Корень $x_2=-28$ не рассматриваем, так как он не отвечает условию $x>-3$.

**408.** Потенцируя уравнение, находим

$$\frac{2}{y^2-4y+5}=\frac{10}{y^2+4y+5};\quad y^2-6y+5=0,$$

откуда $y_1=5$; $y_2=1$.

*Отв.* $y_1=5$; $y_2=1$.

Примечание. Квадратные трехчлены $y^2-4y+5$ и $y^2+4y+5$ имеют положительные значения при всяком действительном значении $y$, так как их дискриминаторы отрицательны.

**409.** Очевидно, что $x\neq 0$. Потенцируя уравнение, получим

$$2^{x^2-5x+6}+1=2,\text{ или }x^2-5x+6=0,$$

откуда $x_1=2$; $x_2=3$.

*Отв.* $x_1=2$; $x_2=3$.

**410.** Потенцируя, находим

$$2^7=2^{3x^2-20x},\text{ откуда }3x^2-20x-7=0.$$

Таким образом, $x_1=7$; $x_2=-\frac{1}{3}$.

*Отв.* $x_1=7$; $x_2=-\frac{1}{3}$.

**411.** Положим $x^{\lg x}=z$. Тогда данное уравнение примет вид

$$2z^2-5z+3=0,$$

откуда

$$z_1=\frac{3}{2};\quad z_2=1.$$

Пусть $x^{\lg x}=\frac{3}{2}$. Логарифмируя, получим $\lg^2 x=\lg\frac{3}{2}$; $\lg x=\pm\sqrt{\lg\frac{3}{2}}$; $x_{1,2}=10^{\pm\sqrt{\lg\frac{3}{2}}}$. Если $x^{\lg x}=1$, то $\lg^2 x=0$, отсюда $x_3=1$.

**412.** Потенцируя, находим

$$271+3^{\sqrt{3x}}=1000;\quad 3^{\sqrt{3x}}=729;\quad 3^{\sqrt{3x}}=3^6.$$

Следовательно,

$$\sqrt{3x}=6.$$

*Отв.* $x=12$.

**413.** Потенцируя, находим

$$(5-x)(3-x)=1;\ \text{отсюда}\ x_{1,2}=4\pm\sqrt{2}.$$

В связи с тем, что решения данного уравнения должны удовлетворять условию $x<3$, из двух найденных значений $x$ берем только $x=4-\sqrt{2}$.

**414.** Запишем уравнение в виде $2^{\frac{1}{\log_2 x}}=2^2$, откуда

$$\frac{1}{\log_2 x}=2.$$

Итак, $\log_2 x=\frac{1}{2}$, следовательно, $x=2^{\frac{1}{2}}$ или $x=\sqrt{2}$.

*Отв.* $x=\sqrt{2}$.

**415.** Логарифмируя обе части уравнения при основании 5 (очевидно, что $x>0$), получаем

$$\log_5 x\log_5 x=\log_5 625;\quad \log^2 x=4.$$

Следовательно, $\log_5 x_1=2$; $\log_5 x_2=-2$.

*Отв.* $x_1=25$; $x_2=\frac{1}{25}$.

**416.** Применяя основное показательно-логарифмическое тождество $a^{\log_a N}=N$, запишем данное уравнение в таком виде:

$$4^{\lg x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10\cdot 2}{5};\quad 4^{\lg x}=2,$$

откуда $\lg x=\frac{1}{2}$.

*Отв.* $x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$.

**417.** Применяя основное показательно-логарифмическое тождество, получим

$$9=4x^2;\quad x^2=\frac{9}{4},$$

откуда $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-\frac{3}{2}$.

Данному уравнению удовлетворяет только значение $x=\frac{3}{2}$.

*Отв.* $x=\frac{3}{2}$.

**418.** Логарифмируя, находим

$$\lg x\lg x=\lg 100-\lg x;\quad \lg^2 x+\lg x-2=0,$$

т. е.

$$\lg x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

откуда $\lg x_1 = 1$, $x_1 = 10$; $\lg x_2 = -2$, $x_2 = \frac{1}{100}$.

*Отв.* $x_1 = 10$; $x_2 = \frac{1}{100}$.

**419.** *Отв.* $x = 81$.

**420.** Допустимыми являются значения $x > 8$.

$$\lg[(3x+4)(x-8)] = \lg 100;$$
$$(3x+4)(x-8) = 100;$$
$$3x^2 - 20x - 132 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{496}}{3}.$$

Данному уравнению удовлетворяет только $x_1 > 8$.

*Отв.* $x = \frac{10 + 4\sqrt{31}}{3}$.

**421.** В данном уравнении значения неизвестного $x$ должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} 3x - 91 > 0; \\ 30 - x > 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x > 30\frac{1}{3}; \\ x < 30. \end{cases}$$

Так как эти неравенства несовместимы, то уравнение решений не имеет.

**422.** Решим данное в условии квадратное уравнение относительно $\log_3 x$:

$$\log_3 x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

отсюда $\log_3 x = 2$; $x_1 = 9$; $\log_3 x = 1$, $x_2 = 3$.

*Отв.* $x_1 = 9$; $x_2 = 3$.

**423.** Представим данное уравнение в виде $x^{\log_3 3x} = 3^2$. Логарифмируя обе части уравнения при основании 3, получим

$$\log_3 3x \log_3 x = 2;$$

$$(\log_3 3 + \log_3 x)\log_3 x - 2 = 0; \quad \log_3^2 x + \log_3 x - 2 = 0.$$

Пусть $\log_3 x = z$, тогда $z^2 + z - 2 = 0$. Решая это уравнение, найдем, что $z_1 = -2$; $z_2 = 1$; отсюда $\log_3 x_1 = -2$; $x_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_3 x_2 = 1$; $x_2 = 3^1 = 3$.

*Отв.* $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = 3$.

**424.** Перейдем в уравнении к логарифмам с основанием 3. Используя модуль перехода, получим

$$\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1;\quad 1+\log_3 x\neq 0,$$

откуда

$$(1-\log_3 x)\,[1-(1+\log_3 x)^2]=0.$$

Следовательно, $(\log_3 x)_1=1$; $(\log_3 x)_2=0$; $(\log_3 x)_3=-2$.

*Отв.* $x_1=3$; $x_2=1$; $x_3=\frac{1}{9}$.

**425.** Логарифмируем обе части уравнения:

$$(\log_5 x-1)\log_5\sqrt{x}=\log_5 5;$$

$$\log_5^2 x-\log_5 x-2=0,$$

откуда

$$\log_5 x=\frac{1\pm 3}{2}.$$

Следовательно, $\log_5 x=2$; $\log_5 x=-1$.

*Отв.* $x_1=25$; $x_2=\frac{1}{5}$.

**426.** Преобразуем данное уравнение так, чтобы каждая его часть представляла логарифм некоторого выражения, для чего единицу в левой части уравнения заменим lg 10:

$$\lg\frac{4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1}{10}=\lg\frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2}{2^2}.$$

Из равенства логарифмов следует равенство чисел, т. е.

$$\frac{4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1}{10}=\frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2}{4}.$$

После соответствующих преобразований находим

$$2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}-24=0.$$

Поскольку $2^{\sqrt{x}}$ мы можем представить как $\left(2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$, обозначим $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}=y$:

$$y^2-5y-24=0,$$

откуда $y_1=8$; $y_2=-3$.

Таким образом, $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}=8$, откуда $x=36$. Второе решение не удовлетворяет уравнению.

*Отв.* $x=36$.

**427.** Потенцируя, находим

$$6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x = 10^x \cdot 25; \quad 6 \cdot 5^x + 25 \cdot 4^x \cdot 5^x - 2^x \cdot 5^x \cdot 25 = 0.$$

Принимая во внимание, что $5^x \neq 0$, имеем

$$6 + 25 \cdot 4^x - 25 \cdot 2^x = 0.$$

Сделаем подстановку $2^x = y$:

$$25y^2 - 25y + 6 = 0,$$

откуда

$$y_1 = \frac{3}{5}; \quad y_2 = \frac{2}{5}.$$

*Отв.* $x_1 = \dfrac{\lg 3 - \lg 5}{\lg 2}; \quad x_2 = \dfrac{\lg 2 - \lg 5}{\lg 2}.$

**428.** Потенцируя, находим

$$5^{\sqrt[3]{x-1}} = 25; \; 5^{\sqrt[3]{x-1}} = 5^2,$$

откуда $x = 9$.

*Отв.* $x = 9$.

**429.** Имеем $64^{\sqrt[24]{2^{x^2-25}}} = 1; \; 2^{\frac{x^2-25}{24}-6} = 2^0$.

Следовательно, $\dfrac{x^2-25}{24} - 6 = 0$, откуда $x = \pm 13$.

*Отв.* $x = \pm 13$.

**430.** Имеем

$$2^{\frac{3}{\log_3 x}} = 2^{-6}; \; \frac{3}{\log_3 x} = -6; \quad \log_3 x = -\frac{1}{2}.$$

*Отв.* $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**431.** Потенцируя, находим $3x^2 + 7 = 30x - 20; \; x^2 - 10x + 9 = 0$, откуда $x_1 = 9; \; x_2 = 1$. Числа $x_1$ и $x_2$ являются корнями данного логарифмического уравнения, так как они удовлетворяют условию $x > \dfrac{2}{3}$, т. е. принадлежат к множеству допустимых значений неизвестного $x$.

*Отв.* $x_1 = 9; \; x_2 = 1$.

**432.** Имеем

$$10^{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^4} = 10^{-4},$$

откуда $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^4 = -4; \; x^4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}; \; x = \pm\sqrt{3}$.

*Отв.* $x = \pm\sqrt{3}$.

**433.** Очевидно, что $x > 3$, ибо при $x \leqslant 3$ левая часть уравнения теряет смысл.

Принимая во внимание, что $\log_{64}(x-3) = \frac{1}{6}\log_2(x-3)$, данное уравнение можно представить в виде

$$2^{\log_2[(x-3)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^2]} = 50;$$

$$25(x-3)^{\frac{1}{3}} = 50; \quad \sqrt[3]{x-3} = 2.$$

Итак, $x = 11$. Полученное решение удовлетворяет условию $x > 3$ и, как легко проверить, является корнем данного уравнения.

*Ответ.* $x = 11$.

**434.** Потенцируя уравнение, находим

$$2^{\frac{4x-1}{3}} = \frac{10}{1{,}25}; \quad 2^{\frac{4x-1}{3}} = 2^3,$$

откуда $\frac{4x-1}{3} = 3$.

*Ответ.* $x = 2{,}5$.

**435.** Прологарифмируем обе части уравнения при основании $3 (x > 0)$:

$$2 - \log_3 x = 4 + \log_3 x;$$

$$\log_3 x = -1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{3}.$$

*Ответ.* $x = \frac{1}{3}$.

**436.** Потенцируя, получаем

$$\frac{10}{a} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} x \sqrt[3]{a}}.$$

Возвысим обе части уравнения в куб:

$$\frac{1000}{a^3} = \frac{1}{2} x \sqrt[3]{a},$$

откуда $x = \frac{2000}{a^3 \sqrt[3]{a}}$.

*Ответ.* $x = \frac{2000}{a^3 \sqrt[3]{a}}$.

**437.** Логарифмируя левую и правую части уравнения, получим ($x > 0$)

$$2 + \lg^2 x = 3 \lg x; \quad \lg^2 x - 3 \lg x + 2 = 0,$$

откуда

$$\lg x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$$\lg x_1 = 2, \; x_1 = 100; \; \lg x_2 = 1, \; x_2 = 10.$$

*Ответ.* $x_1 = 100; \; x_2 = 10.$

**438.**

$$(\lg x + 1) \lg x = 2; \; x > 0;$$

$$\lg^2 x + \lg x - 2 = 0,$$

откуда

$$\lg x_1 = 1, \; x_1 = 10;$$

$$\lg x_2 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{100}.$$

*Ответ.* $x_1 = 10; \quad x_2 = \frac{1}{100}.$

**439.**

$$\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0; \quad x > 0,$$

откуда $\log x_1 = 3, \; x_1 = 8; \; \log_2 x_2 = 1, \; x_2 = 2.$

*Ответ.* $x_1 = 8; \; x_2 = 2.$

**440.** Очевидно, что $x > 0$. Логарифмируем левую и правую части уравнения:

$$\left[2 (\lg x)^3 - \frac{3}{2} \lg x\right] \lg x = \frac{1}{2};$$

$$4 \lg^4 x - 3 \lg^2 x - 1 = 0,$$

откуда $\lg^2 x = \frac{3 \pm 5}{8}$. Следовательно, $\lg x = \pm 1;$

$$x_1 = 10; \quad x_2 = \frac{1}{10}.$$

Уравнение $\lg^2 x = -\frac{1}{4}$ не рассматриваем, так как в области действительных чисел, из какой мы условились не выходить, квадрат числа не может быть отрицательным.

*Ответ.* $x_1 = 10; \quad x_2 = \frac{1}{10}.$

**441.** Легко убедиться в том, что левая часть уравнения, которую можно записать при $x > 0$ и $x \neq 1$ в виде $x^{\frac{1}{\lg x}}$, есть постоянная величина $\left(\lg x^{\frac{1}{\lg x}} = \frac{1}{\lg x} \lg x = 1, \text{ т. е. } x^{\frac{1}{\lg x}} = 10\right)$, откуда следует,

что уравнение корней не имеет (значения $x \leqslant 0$ и $x = 1$ не рассматриваем). Действительно, логарифмируя левую и правую части данного уравнения, будем иметь

$$\frac{1}{\lg x} \lg x = x^4 \lg 10; \quad x^4 - 1 = 0,$$

откуда

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0.$$

Очевидно, что $x^2 + 1 \neq 0$ при всех действительных значениях $x$ и, следовательно, $x^2 - 1 = 0$; $x = \pm 1$. Но ни $x = 1$, ни $x = -1$ не являются корнями данного уравнения, так как при этих значениях неизвестного левая часть уравнения теряет смысл.

**442.** Потенцируя уравнение, имеем $(x + 1)\, x = a^2$, откуда $x^2 + x - a^2 = 0$; следовательно, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a^2}$. В связи с тем что при неположительных значениях $x$ левая часть данного логарифмического уравнения теряет смысл, решением уравнения будет только $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a^2}$; $a > 0$; $a \neq 1$.

*Отв.* $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a^2}$.

**443.** Легко убедиться, что

$$x > \frac{\sqrt{20}}{3}.$$

Потенцируя левую и правую части уравнения, получаем

$$\frac{9x^2 - 20}{4} = 6x; \quad 9x^2 - 24x - 20 = 0,$$

откуда $x_1 = 3\frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Очевидно, что $x_2 = -\frac{2}{3}$ не является решением данного логарифмического уравнения, так как не удовлетворяет условию $x > \frac{\sqrt{20}}{3}$. Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 3\frac{1}{3}$.

*Отв.* $x = 3\frac{1}{3}$.

**444.** Очевидно, что $x > 3$, так как при $x \leqslant 3$ уравнение теряет смысл. Потенцируя, получаем

$$\frac{2x - \frac{9}{4}}{x} = x - 3;$$

$$4x^2 - 20x + 9 = 0,$$

откуда $x_1 = \frac{9}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Решение $x_2$ не удовлетворяет условию $x > 3$ и не является корнем данного логарифмического уравнения.

*Отв.* $x = \frac{9}{2}$.

**445.** Представим данное уравнение в виде

$$3(x-1)\log_3 2 \cdot 3\log_2 3 = x+7; \quad 9(x-1)\log_3 2 \log_2 3 = x+7.$$

Применив тождество $\log_a N \log_N a = 1$, получим

$$9(x-1) = x+7, \text{ откуда } x = 2.$$

*Отв.* $x = 2$.

**446.** Представим данное уравнение в виде

$$(25^{\sqrt{x}} - 5^{\sqrt{x}}) = \lg 100 + \lg 6; \quad x > 0.$$

Потенцируя, получим

$$25^{\sqrt{x}} - 5^{\sqrt{x}} - 600 = 0;$$

$$5^{2\sqrt{x}} - 5^{\sqrt{x}} - 600 = 0,$$

откуда, полагая $5^{\sqrt{x}} = y$, найдем $y_1 = 25$, т. е. $5^{\sqrt{x}} = 25$; $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$.

Решение $y_2 = -24$ не рассматриваем, так как показательная функция при положительном основании всегда положительна.

*Отв.* $x = 4$.

**447.** Прологарифмируем правую и левую части уравнения при основании 2:

$$\log_2 x \log_2 x = (\log_2 x)^3 \log_2 2,$$

откуда

$$\log_2 x (1 - \log_2 x) = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$$

**448.** Запишем данное уравнение в виде

$$\log_3 \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Потенцируя, получим

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3},$$

откуда

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x = k\pi + \frac{7\pi}{12}, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$$

Таким образом, данное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

**449.**

$$x = 10^{1-2\lg\sqrt[4]{4}} = \frac{10}{10^{\lg\sqrt[4]{4}}} = \frac{10}{\sqrt[4]{4}} = 5.$$

*Отв.* $x = 5$

**450.**

$$\log_2 \log_2 x = \log_2 12; \quad x > 0;$$

$$\log_2 x = 12,$$

откуда

$$x = 2^{12}; \quad x = 4096.$$

*Отв.* $x = 4096$.

**451.** Как видно из данного примера, неизвестное должно удовлетворять такой системе неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{51}{2}; \\ x < 22. \end{cases}$$

Но эта система несовместима, и поэтому уравнение не имеет решения.

**452.** Пусть $\lg \lg x = y$, тогда

$$y = \sqrt{\frac{(m+n)^{\lg(m-n)}}{(m-n)^{\lg(m+n)}}}.$$

Логарифмируя, получаем

$$\lg y = \lg \sqrt{\frac{(m+n)^{\lg(m-n)}}{(m-n)^{\lg(m+n)}}};$$

$$\lg y = \frac{1}{2}[\lg(m-n)\lg(m+n) - \lg(m+n)\lg(m-n)],$$

откуда $\lg y = 0$; $y = 1$. Но так как $y = \lg \lg x$, то $\lg \lg x = 1$; $\lg x = 10$, откуда $x = 10^{10}$.

Примечание. Можно показать и другим способом, что правая часть данного уравнения есть единица.

$$\sqrt{\frac{(m+n)^{\lg(m-n)}}{(m-n)^{\lg(m+n)}}} = \sqrt{\frac{10^{\lg[(m+n)^{\lg(m-n)}]}}{10^{\lg[(m-n)^{\lg(m+n)}]}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10^{\lg(m-n)\lg(m+n)}}{10^{\lg(m-n)\lg(m+n)}}} = 1,$$

где $m > n$;
$m > 0$;
$n > 0$.

453.

$$\lg x = \lg \sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt{ab}} \sqrt[-2]{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{n}\left[\lg \frac{a}{\sqrt{ab}} + \lg \sqrt[-2]{\frac{a}{b}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lg a - \lg \sqrt{ab} - \frac{1}{2}\lg \frac{a}{b}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lg a - \frac{1}{2}\lg a - \frac{1}{2}\lg b - \frac{1}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg b\right] = 0.$$

Если $\lg x = 0$, то $x = 1$, следовательно,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt{ab}} \sqrt[-2]{\frac{a}{b}}} = 1.$$

**454.** Преобразуем $\log_{25} 7$, применив формулу перехода от одного основания логарифмов к другому $\log_b N = \log_a N \frac{1}{\log_a b}$:

$$\log_{25} 7 = \log_5 7 \frac{1}{\log_5 25} = \log_5 7 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_5 7.$$

Подставляя в первоначальное уравнение, найдем ($x > 0$)

$$2\log_5 3 + 4\left(\frac{1}{2}\log_5 7\right) = \log_5 x;$$

$$2\log_5 (3 \cdot 7) = \log_5 x;$$

$$\log_5 21^2 = \log_5 x, \text{ откуда } x = 441.$$

*Ответ.* $x = 441$.

Примечание. Можно применить теорему, указанную в примере 375:

$$2\log_5 3 + 4\log_5 \sqrt{7} = \log_5 x;$$

$$3^2 (\sqrt{7})^4 = x,$$

откуда $x = 441$.

**455.** Указание. При решении данного уравнения следует воспользоваться соотношением $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, а затем обозначить $\log_a x = y$.

*Ответ.* $x_1 = a^{-\frac{4}{3}}$; $x_2 = a^{-\frac{1}{2}}$.

**456.** Воспользовавшись формулой $\log_b a \log_a b = 1$, получим ($x > 0$)

$$\frac{1}{\log_3 3x} = (\log_3 3x)^2; \quad (\log_3 3x)^3 - 1 = 0;$$

$$(\log_3 3x - 1)(\log_3^2 3x + \log_3 3x + 1) = 0;$$

$$\log_3 3x = 1; \quad 3x = 3; \quad x = 1.$$

Второе уравнение имеет комплексные корни, поэтому их значения не рассматриваем.

*Отв.* $x = 1$.

**457.**

$$\lg \frac{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1-x})^3}{\sqrt{1-x^2}} = \lg 100; \quad -1 < x < 1;$$

$$\lg (1-x) = \lg 100,$$

откуда $x = -99$ (не удовлетворяет условию задачи).

*Отв.* Решения нет.

**458.** Представим уравнение в таком виде:

$$\log_a \frac{3(4^{x-2}+9)}{4^{x-2}+1} = \log_a a;$$

$$3(4^{x-2}+9) = a(4^{x-2}+1).$$

Следовательно,

$$4^{x-2} = \frac{a-27}{3-a}.$$

Полученное выражение должно быть положительным, поэтому $a$ находится в промежутке $3 < a < 27$.

*Отв.* $x = 2 + \frac{1}{\lg 4} \lg \frac{a-27}{3-a}$.

**459.** Известно, что $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$. Поэтому

$$\lg [(3x-4)(2x-4)]^2 = \lg 100;$$

$$(3x-4)(2x-4) = \pm 10.$$

*Отв.* $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

**460.** Мы знаем, что $\operatorname{tg} 46° = \operatorname{ctg} 44°$; $\operatorname{tg} 47° = \operatorname{ctg} 43°$; $\operatorname{tg} 89° = \operatorname{ctg} 1°$. Сгруппируем $\lg \operatorname{tg} \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} (90 - \alpha)$:

$$(\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{ctg} 1°) + (\lg \operatorname{tg} 2° + \lg \operatorname{ctg} 2°) + \ldots + \lg \operatorname{tg} 45° =$$

$$= \lg (\operatorname{tg} 1° \operatorname{ctg} 1°) + \lg (\operatorname{tg} 2° \operatorname{ctg} 2°) + \ldots + \lg \operatorname{tg} 45° =$$

$$= \lg 1 + \lg 1 + \ldots + \lg 1 = 0.$$

**461.** Очевидно, что $648 = 2^3 \cdot 3^4$, а $432 = 2^4 \cdot 3^3$. Перемножим оба уравнения данной системы:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 3^x \cdot 2^y = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^3,$$

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2^7 \cdot 3^7.$$

Последнее равенство запишем так: $(2 \cdot 3)^{x+y} = (2 \cdot 3)^7$, следовательно, $x + y = 7$.

Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{3^x \cdot 2^y} = \frac{3}{2}; \quad \frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{y-x} = \frac{3}{2};$$

$$y - x = 1.$$

*Отв.* $y = 4$; $x = 3$.

**462.** Разделив первое уравнение системы на второе ($y > 0$), получим $\frac{8^x}{2^x} = \frac{10y}{5y}$; $\frac{2^{3x}}{2^x} = 2$; $2^{2x} = 2$, откуда $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

Подставим значение $x$ во второе уравнение:

$$y = \frac{1}{5} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

*Отв.* $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

**463.** 1-й способ решения. Принимая во внимание, что $x$ и $y$ положительны (по определению показательной функции в действительной области), и логарифмируя оба уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y \lg x = x \lg y; \\ 3 \lg x = 2 \lg y. \end{cases}$$

Очевидно, что решением данной системы будет

$$\lg x = \lg y = 0; \quad x_1 = y_1 = 1.$$

Предположим, что $\lg x \neq 0$ и $\lg y \neq 0$. Тогда, разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2}; \quad y = \frac{3}{2} x.$$

Второе уравнение системы после подстановки $y^2 = \frac{9}{4} x^2$ примет вид $x^3 = \frac{9}{4} x^2$. Сокращая на $x^2$ (мы здесь отметили, что $x > 0$), найдем второе решение системы

$$x_2 = \frac{9}{4}; \quad y_2 = \frac{27}{8}.$$

2-й способ решения. Из второго уравнения системы найдем $x$ и подставим в первое ($x > 0$; $y > 0$):

$$x = y^{\frac{2}{3}},$$

следовательно,

$$y^{\frac{2}{3} y} = y^{y^{\frac{2}{3}}}.$$

Отсюда (при $y \neq 1$)

$$\frac{2}{3}y = y^{\frac{2}{3}};$$

$$y^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}; \quad y = \frac{27}{8},$$

а

$$x = y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

При $y = 1$ обязательно $x = 1$, что следует непосредственно из условия примера.

**464.** 1-й способ решения. Возвысим обе части первого уравнения в квадрат:

$$5^{2\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{2\sqrt{y}} = 40\,000.$$

Положив $5^{2\sqrt[3]{x}} = t$ и $2^{2\sqrt{y}} = z$,

получим систему уравнений

$$\begin{cases} tz = 40\,000; \\ t + z = 689, \end{cases} \tag{1}$$

из которой видно, что $t$ и $z$ являются корнями уравнения

$$v^2 - 689v + 40\,000 = 0.$$

Следовательно, $t_1 = 625$; $z_1 = 64$; $t_2 = 64$; $z_2 = 625$ [система (1) симметрична относительно $t$ и $z$]. Таким образом,

$$5^{2\sqrt[3]{x}} = 625, \; 2\sqrt[3]{x} = 4, \quad x_1 = 8;$$

$$5^{2\sqrt[3]{x}} = 64, \; 2\sqrt[3]{x} = \log_5 64, \quad x_2 = \log_5^3 8;$$

$$2^{2\sqrt{y}} = 64, \quad 2\sqrt{y} = 6, \quad y_1 = 9;$$

$$2^{2\sqrt{y}} = 625, \; 2\sqrt{y} = \log_2 625, \quad y_2 = \log_2^2 25.$$

2-й способ решения. Прибавим ко второму уравнению и вычтем из него первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt{y}} = 33; \\ 5^{\sqrt[3]{x}} - 2^{\sqrt{y}} = \pm 17. \end{cases}$$

Решая полученные системы уравнений, найдем значения $x$ и $y$.

*Отв.* $x_1 = 8$, $y_1 = 9$; $x_2 = 27 \log_5^3 2$, $y_2 = 4 \log_2^2 5$.

**465.** Логарифмируя данную систему уравнений, имеем

$$\begin{cases}(y+1)\lg x = 3\lg 3;\\ (2y-5)\lg x = -\lg 3;\end{cases} \quad x>0,$$

откуда $\frac{y+1}{2y-5} = -3$.

*Отв.* $x = 3$; $y = 2$.

**466.** Представим второе уравнение системы в виде

$$x + y = 3 \cdot 2^{x-y}. \qquad (1)$$

Подставив значение $x + y$ в первое уравнение системы, получим

$$\sqrt[x-y]{3 \cdot 2^{x-y}} = 2\sqrt{3};\ 3^{\frac{1}{x-y}} = 3^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2};\quad x - y = 2.$$

Из равенства (1) находим $x + y = 12$.

*Отв.* $x = 7$; $y = 5$.

**467.** Представим второе уравнение системы в виде

$$x + y = \frac{2}{x-y}. \qquad (1)$$

Подставив в первое уравнение значение $x + y$, найдем

$$1 - \log_2(x-y) - \log_3(x-y) = 1;$$
$$\log_2(x-y) + \log_3(x-y) = 0.$$

Переходя к логарифмам при основании 3, преобразуем последнее уравнение к виду

$$(\log_3 2 + 1)\log_3(x-y) = 0.$$

Поскольку $\log_3 2 + 1 \neq 0$, то $\log_3(x-y) = 0$ и $x - y = 1$. Принимая во внимание уравнение (1), получим систему

$$\begin{cases}x + y = 2;\\ x - y = 1;\end{cases} \quad x>0,\ x>|y|.$$

Примечание. $x - y > 0$; $x + y > 0$, или $x > 0$; $x > y$. Из равенства

$$\log_2(x-y) + \log_3(x-y) = 0$$

непосредственно следует, что

$$x - y = 1.$$

*Отв.* $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$.

**468.** Потенцируя уравнения, получаем систему

$$\begin{cases}x - y = xy;\\ x + y = 1,\end{cases}$$

решениями которой являются

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Но $x - y > 0$; $x + y > 0$ и $xy > 0$, следовательно, $x > 0$; $y > 0$; поэтому второе решение не удовлетворяет условию задачи.

**469.** 1-й способ решения. Представим $\log_{\frac{4}{9}} a$ в виде $\frac{1}{\log_a \frac{4}{9}}$; $a > 0$.

Потенцируя первое уравнение системы, получаем

$$\log_a\left(\frac{xy}{a^2}\right) = -\log_a \frac{4}{9} = \log_a \frac{9}{4}; \quad \frac{xy}{a^2} = \frac{9}{4}; \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Следовательно, система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} 4xy = 9a^2; \\ x + y = 5a. \end{cases}$$

Решая ее, найдем две пары значений.

2-й способ решения. Пример можно решить, не пользуясь формулой модуля перехода от одной системы логарифмов к другой:

$$(\log_a x + \log_a y - 2)\log_{\frac{4}{9}} a = -1;$$

$$\left(\log_a \frac{xy}{a^2}\right)\log_{\frac{4}{9}} a = -1;$$

$$\log_{\frac{4}{9}} a^{\log_a \frac{xy}{a^2}} = -1;$$

$$a^{\log_a \frac{xy}{a^2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-1};$$

$$\frac{xy}{a^2} = \frac{9}{4}.$$

Дальнейшее решение аналогично приведенному выше.

*Отв.* $x_1 = \frac{1}{2}a, \quad y_1 = \frac{9}{2}a; \quad x_2 = \frac{9}{2}a, \quad y_2 = \frac{1}{2}a.$

**470.** Логарифмируя первое уравнение системы, получим $\lg x + \lg y = \lg a$. Выразим $\lg x$ через $\lg y$ и подставим во второе уравне-

ние системы. В результате получим относительно $\lg y$ квадратное уравнение

$$2\lg^2 y - 2\lg a \lg y - \frac{3}{2}\lg^2 a = 0; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad a > 0,$$

откуда

$$(\lg y)_1 = \frac{3}{2}\lg a, \quad y_1 = a^{\frac{3}{2}}; \quad (\lg y)_2 = -\frac{1}{2}\lg a, \quad y_2 = a^{-\frac{1}{2}}.$$

Значения $x_1$ и $x_2$ находим из данной системы уравнений: $x_1 = a^{-\frac{1}{2}}$; $x_2 = a^{\frac{3}{2}}$.

*Отв.* $x_1 = a^{-\frac{1}{2}}$; $y_1 = a^{\frac{3}{2}}$; $x_2 = a^{\frac{3}{2}}$; $y_2 = a^{-\frac{1}{2}}$.

**471.** Очевидно, что $x > 0$, $y > 0$, так как при значениях $x$ и $y$, не удовлетворяющих этому условию, левая часть второго уравнения системы теряет смысл.

Найдем значение $y$ из первого уравнения и подставим во второе:

$$4\lg^2 x - 4\lg a^2 \lg x - 3\lg^2 a^2 = 0. \tag{1}$$

Обозначим $\lg x = z$. Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$4z^2 - 4\lg a^2 z - 3\lg^2 a^2 = 0,$$

откуда $z_1 = 3\lg a$; $z_2 = -\lg a$.

Итак,

$$\lg x_1 = 3\lg a, \text{ т. е. } x_1 = a^3; \quad y_1 = \frac{1}{a};$$

$$\lg x_2 = -\lg a, \text{ т. е. } x_2 = \frac{1}{a}; \quad y_2 = a^3.$$

Эти решения будут удовлетворять данной системе уравнений только при $a > 0$, ибо только при этом условии $x > 0$, $y > 0$.

Чтобы убедиться в правильности решения данной системы, достаточно проверить только одно из решений, так как оба уравнения системы симметричны относительно $x$ и $y$.

Для всякого $a \neq 0$

$$x_1 = 10^{\frac{3}{2}\lg a^2}; \quad x_2 = 10^{-\frac{1}{2}\lg a^2}.$$

**472.** Логарифмируя первое уравнение системы, получаем

$$\lg m(\lg m + \lg x) = \lg n(\lg n + \lg y);$$

$$\lg^2 m + \lg m \lg x = \lg^2 n + \lg n \lg y; \quad m > 0, \quad n > 0, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Пусть $\lg x = z$; $\lg y = v$, тогда

$$\lg^2 m + z\lg m = \lg^2 n + v\lg n,$$

откуда

$$z = \frac{\lg^2 n + v \lg n - \lg^2 m}{\lg m}.$$

Логарифмируем второе уравнение системы:

$$\lg x \lg n = \lg y \lg m; \quad z \lg n = v \lg m.$$

Подставляя найденное из первого уравнения системы значение $z$, найдем

$$\lg n \frac{\lg^2 n - \lg^2 m + v \lg n}{\lg m} = v \lg m;$$

$$\lg n (\lg^2 n - \lg^2 m + v \lg n) = v \lg^2 m,$$

откуда

$$v (\lg^2 m - \lg^2 n) = \lg n (\lg^2 n - \lg^2 m);$$

$$v = \frac{\lg n (\lg^2 n - \lg^2 m)}{\lg^2 m - \lg^2 n} = -\lg n.$$

Так как $v = \lg y$, то $\lg y = -\lg n$, $y = \frac{1}{n}$; $\lg x = z = \frac{v \lg m}{\lg n} = -\frac{\lg n \lg m}{\lg n} = -\lg m$. Отсюда $x = \frac{1}{m}$.

*Ответ.* $x = \frac{1}{m}$; $y = \frac{1}{n}$.

**473.** 1-й способ решения. Левую часть первого уравнения системы преобразуем так:

$$(xy)^{\frac{xy}{\lg xy}} = (xy)^{xy \log_{xy} 10} = (xy)^{\log_{xy} 10^{xy}} = 10^{xy},$$

откуда

$$xy = 1.$$

Следовательно, приходим к системе

$$\begin{cases} xy = 1; \\ 2x + 2y = 5, \end{cases}$$

решениями которой будут

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 2.$$

2-й способ решения. Этот пример можно решить, не пользуясь формулой перехода от одной системы логарифмов к другой.

Прологарифмируем первое уравнение системы:

$$\frac{xy}{\lg(xy)}\lg(xy)=1.$$

Отсюда

$$xy=1.$$

Дальнейшее решение аналогично указанному выше.

Из первого уравнения системы видно, что $xy>0$, а из второго — что $x$ и $y$ не могут быть одновременно отрицательными числами, поэтому

$$x>0 \text{ и } y>0.$$

**474.** Очевидно, что $x>0$, $y>0$ и $x+y\neq 1$. Запишем первое уравнение системы в виде $\lg xy=\lg(x+y)$. Тогда, потенцируя, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} xy=x+y; \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2, сложим его со вторым:

$$(x+y)^2=8+2(x+y).$$

Сделаем подстановку $x+y=z$ ($z>0$, так как $x>0$; $y>0$):

$$z^2-2z-8=0,$$

откуда

$$z_1=4;\ z_2=-2.$$

Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=4; \\ xy=4. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что $x$ и $y$ являются корнями уравнения $u^2-4u+4=0$, найдем решение данной системы уравнений: $x=2$; $y=2$.

Значение $z_2=-2$ не рассматриваем.

**475.** Прежде всего заметим, что $x>0$; $y>0$; $x+y>3$ и $x>y$.

После возведения в квадрат первого уравнения системы и потенцирования второго получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-2\sqrt{xy}=1; \\ x+y=13. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$2\sqrt{xy}=12;\quad xy=36.$$

Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=13; \\ xy=36. \end{cases}$$

*Ответ.* $x=9$; $y=4$.

**476.** Заметим, что логарифмические функции в левой части второго уравнения имеют смысл только при $x > 0$, $x > |y|$. Следовательно, решения системы уравнений нужно искать среди значений $x$, $y$, удовлетворяющих этим условиям.

Потенцируем первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130; \\ 7x - 9y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Подставив в первое уравнение $\frac{7x}{9}$ вместо $y$, получим следующие решения системы (1):

$$x_1 = 9, \quad y_1 = 7;$$

$$x_2 = -9, \quad y_2 = -7.$$

Второе решение исходной системе уравнений не удовлетворяет, так как не выполняется условие $x > 0$.

*Ответ.* $x = 9$, $y = 7$.

**477.** Заметим, что $x > 0$, $y > 0$, так как при значениях неизвестных, которые не удовлетворяют этому условию, левая часть второго уравнения теряет смысл.

Логарифмируя оба уравнения системы, получим

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 40 \\ \lg x \lg y = \lg 4. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что $\lg x$ и $\lg y$ являются решениями уравнения

$$u^2 - \lg 40u + \lg 4 = 0,$$

откуда $u_1 = 1$; $u_2 = \lg 4$.

Следовательно, будем иметь $\lg x_1 = 1$, $x_1 = 10$; $\lg y_1 = \lg 4$, $y_1 = 4$ и $x_2 = 4$; $y_2 = 10$ (система (1) симметрична относительно $x$ и $y$). Оба решения удовлетворяют исходной системе уравнений.

**478.** 1-й способ решения. Из первого уравнения определяем

$$\log_x y = \frac{1}{\log_y x}.$$

Дальнейшее решение очевидно.

2-й способ решения. Пример можно решить, не применяя формулу модуля перехода от одной системы логарифмов к другой.

Как легко заметить из условия задачи, $x > 0$ и $y > 0$.

Первое уравнение системы запишем в виде

$$\log_y x = \log_x (yx^{\frac{8}{3}});$$

$$x = y^{\log_x (yx^{\frac{8}{3}})}.$$

Прологарифмируем полученное уравнение, приняв за основание логарифмов $x$:

$$1 = \log_x (yx^{\frac{8}{3}}) \cdot \log_x y.$$

Вместо $y$ подставим его значение из второго уравнения системы, выраженное через $x$:

$$1 = \log_x \left(\frac{16}{x} \cdot x^{\frac{8}{3}}\right) \cdot \log_x \left(\frac{16}{x}\right);$$

$$1 = \left(\log_x 16 + \frac{5}{3}\right)(\log_x 16 - 1);$$

$$3 \log_x^2 16 + 2 \log_x 16 - 8 = 0.$$

Отсюда

$$\log_x 16 = \frac{-1 \pm 5}{3}.$$

Следовательно,

$$\log_{x_1} 16 = \frac{4}{3}, \quad x_1 = 8;$$

$$\log_{x_2} 16 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{4}.$$

*Отв.* $x_1 = 8, \quad y_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad y_2 = 64.$

**479.** Заметим, что $x > 0$, $y > 0$, так как мы рассматриваем логарифмы только положительных чисел. Потенцируя второе уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} x^3 y^2 = 200; \\ x^3 + y^2 = 33, \end{cases}$$

из которой следует, что $x^3$ и $y^2$ — корни уравнения

$$u^2 - 33u + 200 = 0,$$

откуда $u_1 = 8$, $u_2 = 25$.

Таким образом, данная система уравнений имеет два решения:

$$x_1^3 = 8, \quad y_1^2 = 25; \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 5;$$

$$x_2^3 = 25, \quad y_2^2 = 8; \quad x_2 = \sqrt[3]{25}, \quad y_2 = 2\sqrt{2}.$$

**480.** Умножив первое уравнение на 2 и сложив его со вторым, найдем

$$24 \cdot 5^x = 24; \quad 5^x = 1; \quad x = 0.$$

Подставляя $x = 0$ в первое уравнение, получим

$$9 + 7 \cdot 2^y = 457; \quad 2^y = 64; \quad y = 6.$$

Итак, данная система уравнений имеет единственное решение $x = 0$, $y = 6$.

Примечание. Можно сначала сократить второе уравнение на 2, а потом сложить его с первым.

**481.** Преобразуем первое уравнение:

$$(3^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{y}{2}})(3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y}{2}})=77,$$

откуда

$$3^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{y}{2}}=11.$$

Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases}3^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{y}{2}}=11;\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y}{2}}=7.\end{cases}$$

Складывая уравнения почленно, найдем

$$3^{\frac{x}{2}}=9, \text{ откуда } \frac{x}{2}=2 \text{ и } x=4.$$

Подставляя $x=4$ в одно из уравнений системы, получим $y=2$.

Таким образом, данная система уравнений имеет единственное решение: $x=4$, $y=2$.

**482.** Указание. Потенцируя первое и второе уравнения, получаем систему

$$\begin{cases}x^2-y^2=40;\\ xy=21;\end{cases} \quad x>0,\ y>0,\ x>y.$$

*Ответ.* $x=7$, $y=3$.

**483.** Указание. Необходимо преобразовать данную систему уравнений. Для этого надо перейти в первом уравнении к основанию 2, во втором — к основанию 3 и в третьем — к основанию 4. Тогда получим

$$\begin{cases}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 z=\log_2 4;\\ \log_3 y+\frac{1}{2}\log_3 z+\frac{1}{2}\log_3 x=\log_3 9;\quad x>0,\ y>0,\ z>0.\\ \log_4 z+\frac{1}{2}\log_4 x+\frac{1}{2}\log_4 y=\log_4 16;\end{cases}$$

Потенцируя, находим

$$\begin{cases}x\sqrt{yz}=4;\\ y\sqrt{xz}=9;\\ z\sqrt{xy}=16.\end{cases}$$

После соответствующих преобразований с учетом, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, находим решение системы.

*Отв.* $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{27}{8}$; $z = \frac{32}{3}$.

**484.** Воспользовавшись формулой $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$, получим $\log_4 x = \frac{1}{2}\log_2 x$. Следовательно, первое уравнение будет иметь вид $x = y^2$. Решив систему

$$\begin{cases} x = y^2; \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0, \end{cases}$$

найдем две пары корней.

*Отв.* $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$.

Примечание. При решении примера можно не применять формулу модуля перехода от одной системы логарифмов к другой. Так как здесь $x > 0$ и $y > 0$, то достаточно воспользоваться условием примера 375.

## Графики функций и графический способ решения уравнений

Между точками прямой линии и действительными числами всегда можно установить следующее взаимно-однозначное соответствие: *каждой точке прямой соответствует единственное число и каждому числу соответствует единственная точка на прямой.*

Каждой точке плоскости можно поставить в соответствие упорядоченную пару чисел, которые называются *координатами точки.*

Построим в плоскости чертежа (рис. 2) две взаимно перпендикулярные прямые $XX_1$ и $YY_1$ и выберем масштаб.

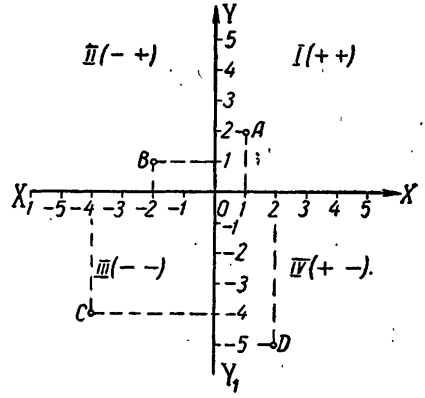


Рис. 2.

Прямые $XX_1$ и $YY_1$ называются *осями координат*, а точка $O$ их пересечения будет *началом координат*; кроме того, необходимо выбрать направление на каждой оси.

Горизонтальная ось $XX_1$ называется осью $x$, или *осью абсцисс*, вертикальная $YY_1$ — осью $y$, или *осью ординат*, а плоскость, в которой они расположены — плоскостью $XOY$.

Откладывая в соответствии с масштабом отрезки от точки $O$ вправо, будем получать положительные числа, а влево от точки $O$ —

отрицательные. Аналогично откладываем в этом же масштабе отрезки и на оси ординат.

Таким образом, получаем возможность любой точке на плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел (координаты этой точки), из которых первое будет выражать ее расстояние от оси $YY_1$, взятое со знаком «+», если точка расположена вправо от оси $YY_1$, и со знаком «—», если точка слева. Это число называется *абсциссой данной точки* и обозначается так: $x = +3$; $x = -4$ и т. д.

*Ордината точки* (второе число) выражает расстояние от точки до оси $XX_1$. Если точка будет находиться над осью абсцисс, то ордината будет положительным числом, а если под осью абсцисс — отрицательным. Обозначается ордината так: $y = +3$; $y = -4$ и т. д.

На рис. 2 точкам $A$, $B$, $C$, $D$ будут соответствовать такие пары чисел

$$A(x = +1;\ y = +2);\quad B(x = -2;\ y = +1);$$
$$C(x = -4;\ y = -4);\quad D(x = +2;\ y = -5).$$

Координаты точек $A$, $B$, $C$, $D$ будем записывать следующим образом:

$$A(1;\ 2);\quad B(-2;\ 1);\quad C(-4;\ -4);\quad D(2;\ -5).$$

Следовательно, каждому действительному числу соответствует определенная точка на оси $X$, а каждой упорядоченной паре действительных чисел соответствует одна определенная точка плоскости.

Всякому неопределенному уравнению с двумя неизвестными $x$ и $y$ будет соответствовать некоторая линия. Если уравнение первой степени, то будем иметь прямую линию, а если уравнение не первой степени, то — кривую *.

Если принять одно из неизвестных рассматриваемого уравнения, например $x$, за переменное независимое, то $y$ будет принимать значения, которые зависят от значения $x$. Независимая величина $x$ называется *аргументом*, зависимая $y$ — *функцией* **, а полученная соответствующая кривая — *графиком данной функции*.

**485.** Функция $y = 5 - 3x$ является линейной и графически изображается прямой линией. Придавая произвольные значения аргументу $x$, например, $-2$; $-1$; $0$; $+1$; $+2$, находим соответствующие значения $y$: $+11$; $+8$; $+5$; $+2$; $-1$.

Составляем таблицу соответствующих значений аргумента и функции:

---

* Неопределенное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

** Более строгое определение функции дал великий русский математик Н. И. Лобачевский: «*Переменная величина y называется функцией (однозначной) от переменной величины x, если каждому рассматриваемому значению величины x (допустимые значения) соответствует единственное вполне определенное значение величины y*».

| $x$ | $y$ | Точка плоскости |
|---|---|---|
| $-2$ | $+11$ | $D(-2;\ 11)$ |
| $-1$ | $+8$ | $E(-1;\ 8)$ |
| $0$ | $+5$ | $A(0;\ 5)$ |
| $+1$ | $+2$ | $B(1;\ 2)$ |
| $+2$ | $-1$ | $C(2;\ -1)$ |

Для построения графика функции $y = 5 - 3x$ проведем оси координат и для каждой пары значений найдем в плоскости соответствующую точку (рис. 3). Соединяя найденные точки, получим прямую линию, которая и является графиком функции $y = 5 - 3x$.

Примечание. Поскольку график функции есть прямая, то можно ограничиться для ее вычерчивания нахождением только двух точек, которые лежат на этой прямой.

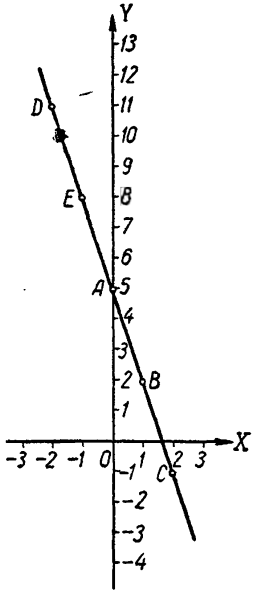



Рис. 3.

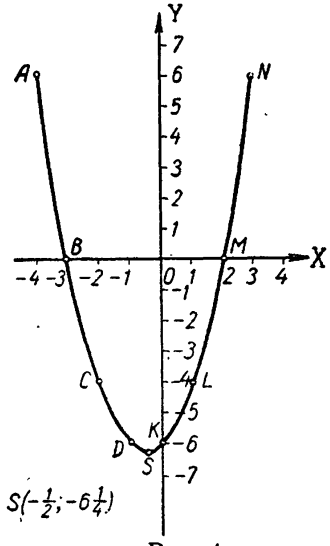



Рис. 4.

**486.** Составляем таблицу соответствующих значений $x$ и $y$:

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+2$ | $+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+6$ | $0$ | $-4$ | $-6$ | $-6$ | $-4$ | $0$ | $+6$ |

Так как задана функция второй степени, то получаемая на графике (рис. 4) кривая является *параболой*. При построении параболы

следует предварительно находить координаты ее вершины. С этой целью представим данную функцию в виде

$$y = x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4}.$$

Полагая $x + \frac{1}{2} = 0$, найдем координаты вершины

$$x = -\frac{1}{2}; \quad y = -6\frac{1}{4}.$$

Заметим, что у точек $B$ и $M$ координата $y = 0$, следовательно, в точках $B$ и $M$ функция обращается в нуль, т. е. $y = x^2 + x - 6 = 0$. Таким образом, абсциссы этих точек $x = -3$ и $x = +2$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 + x - 6 = 0$.

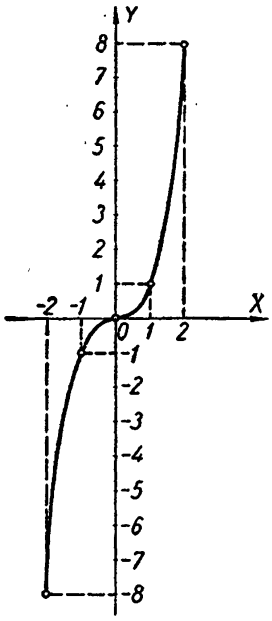



Рис. 5.

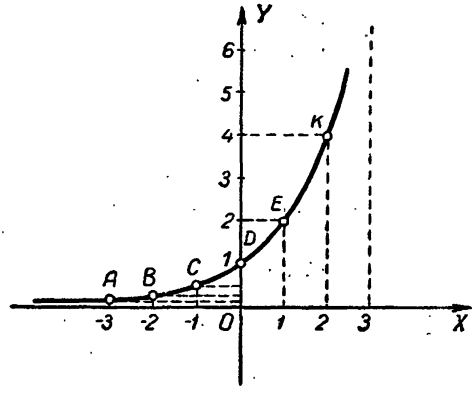



Рис. 6.

**487.** Составим таблицу значений для функции $y = x^3$:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-8$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+8$ |

Избрав некоторый отрезок в качестве единицы длины, построим соответствующие точки и, соединив их, получим кривую, которая называется *кубической параболой* (рис. 5).

**488.** Функция вида $y = 2^x$ называется *показательной функцией* (рис. 6). Составляем таблицу ее значений:

| | A | B | C | D | E | K |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+2$ |
| $y$ | $+\frac{1}{8}$ | $+\frac{1}{4}$ | $+\frac{1}{2}$ | $+1$ | $+2$ | $+4$ |

Примечание. Укажем некоторые свойства показательной функции:

а) ордината кривой остается положительной при любом значении абсциссы;

б) при $x = 0$ ордината $y = 1$;

в) когда $x \to \infty$, тогда $y \to \infty$, а когда $x \to -\infty$, тогда $y \to 0$.

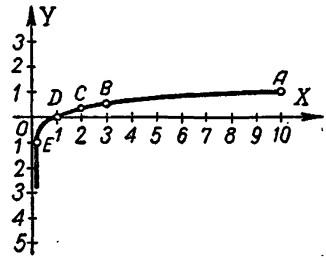


Рис. 7.

**489.** Функция вида $y = \lg x$ называется *логарифмической функцией*. Составляем таблицу ее значений:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 10 | 3 | 2 | 1 | 0,1 |
| $y$ | 1 | 0,47... | 0,3... | 0 | $-1$ |

и по ним строим график (рис. 7).

Примечание. Логарифмическая функция обратна показательной функции. Если для показательной функции при $x = 0$ $y = 1$, то для логарифмической функции при $x = 1$ $y = 0$, так как $\lg 1 = 0$.

При возрастании $x$ возрастает и $y$, но медленнее, чем $x$; при убывании $x$ $y$ также убывает, но быстрее, и неограниченно уменьшается, оставаясь отрицательным, если $x$ стремится к нулю.

**490.** График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой*. Составляем таблицу значений для этой функции:

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ | $\frac{5}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $+0,7...$ | $+1$ | $+0,7...$ | 0 | $-1$ | 0 | $+1$ |

и по ним строим график (рис. 8).

Примечание. Значение $y$ колеблется между $+1$ и $-1$, в то время как аргумент может возрастать до бесконечности. Необходимо помнить, что расстояние между точками $O$ и $\pi$ равно 3,14...

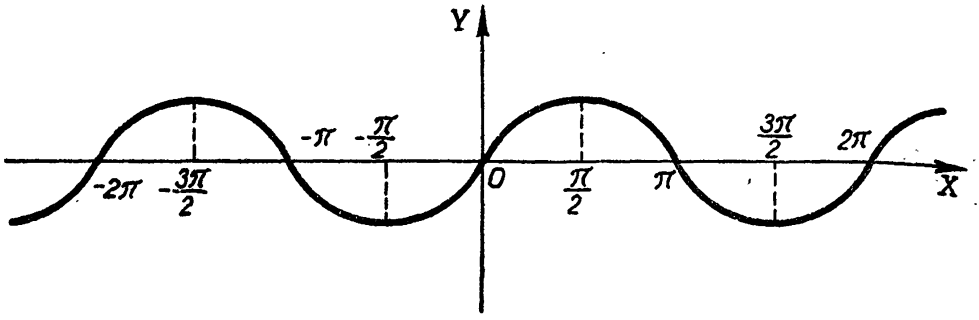



Рис. 8.

Функция $y = \sin x$ имеет период $2\pi$, следовательно, через каждый промежуток в $2\pi$ по оси абсцисс значения $y$ повторяются.

**491.** Областью существования данной функции есть множество всех действительных чисел, за исключением $x = 0$. Если $x \to 0$, то $y \to +\infty$. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$. Так как функция четная, то ее график симметричен относительно оси $y$ (рис. 9).

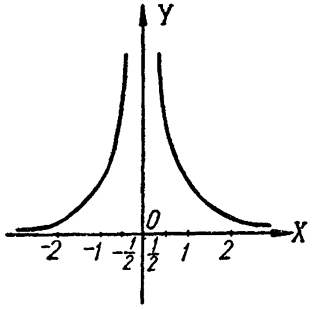



Рис. 9.

**492.** График данной функции — *гипербола*. Функция существует для всех действительных значений $x$, кроме $x = 5$. Если $x \to 5$, то $y \to \pm\infty$.

Ось $y$ пересекает гиперболу в точке $y = -\frac{1}{5}$; если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$.

Составляем таблицу значений этой функции:

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{1}{9}$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{7}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ |

и по ним строим график (рис. 10).

**493.** Указание. Сделаем преобразования:

$$y = \frac{x-5+5}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}.$$

Предлагаем начертить график этой функции читателю.

**494.** Указание. Сделаем преобразования:

$$y = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Предлагаем начертить график этой функции читателю.

**495.** Указание. Известно, что $y = x$ при $x > 0$ будет биссектрисой I координатного угла; $y = -x$ при $x < 0$ будет биссектрисой II координатного угла.

Предлагаем начертить график этой функции читателю.

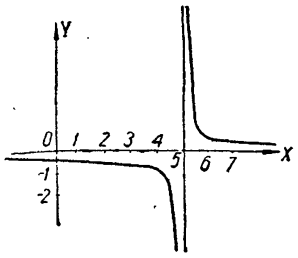



Рис. 10.

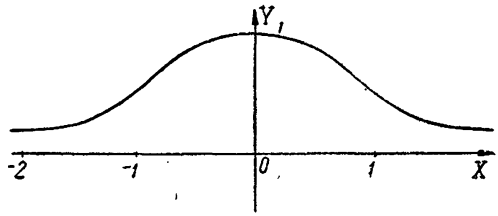



Рис. 11.

**496.** Функция существует для множества всех действительных значений $x$. Функция будет четной (проверить самим). С осью $y$ кривая пересекается в точке $x = 0$; $y = 1$.

Составляем таблицу значений этой функции:

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{17}$ |

и по ним строим график (рис. 11).

**497.** Предлагаем начертить график этой функции читателю.

Примечание. График дает две ветки кривой, которая называется *гиперболой*.

**498.** Указание. Нужно $y$ выразить через $x$, т. е. $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.

Предлагаем начертить график этой функции читателю.

*Отв.* Окружность с центром в начале координат.

**499.** Решениями данного уравнения будут такие значения аргумента $x$, при которых функции $y = 2^x$ и $y = 4x$ принимают равные значения.

Для нахождения таких значений строим графики каждой из этих функций.

Функция $y = 2^x$ есть показательная функция, а $y = 4x$ есть функция прямой пропорциональной зависимости, графиком кото-

рой является прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 12).

Абсциссы точек $A$ и $B$ пересечения прямой с кривой указывают на два значения $x$, при которых значения первой и второй функций равны. Из чертежа находим, что абсцисса точки $A$ есть $x = 4$; это значение $x$ удовлетворяет данному уравнению.

Второе значение (абсцисса точки $B$) — иррациональное, находящееся между нулем и единицей. Из графика находим, что $x \approx 0{,}3$.

**500.** Указание. Следует вычертить графики функций $y = 3^x$ и $y = x^2$ и найти абсциссы точек пересечения.

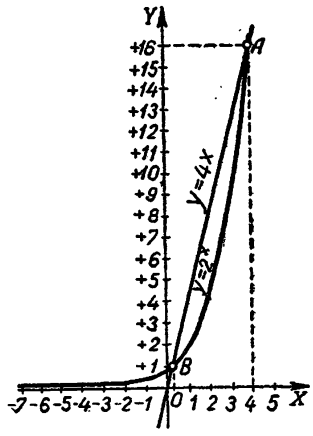



Рис. 12.

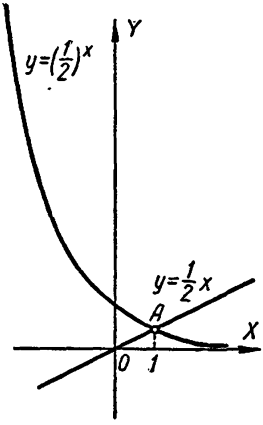



Рис. 13.

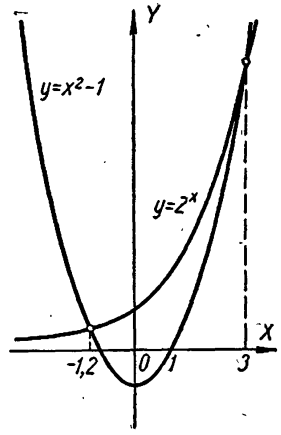



Рис. 14.

**501.** Указание. Необходимо построить графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \frac{1}{2}x$ (рис. 13). Точка $A$ пересечения их даст единственный корень уравнения $x = 1$.

**502.** Указание. Представим данное уравнение в виде

$$2^x = x^2 - 1.$$

Построим графики функций $y = 2^x$ (см. пример 488) и $y = x^2 - 1$ (рис. 14).

Абсциссы точек пересечения этих графиков определяют корни уравнения.

*Отв.* $x_1 = 3$; $x_2 \approx -1{,}2$.

**503.** Представим данное уравнение в виде

$$x3^x = 18.$$

При всех действительных значениях $x$ $3^x > 0$, поэтому $x = \frac{18}{3^x} > 0$, следовательно, решениями данного уравнения могут быть только положительные числа.

Запишем данное уравнение так: $3^x = \frac{18}{x}$ и построим графики функций $y = 3^x$ и $y = \frac{18}{x}$ (рис. 15). При построении графиков ограничиваемся только положительными значениями аргумента.

*Отв.* $x = 2$.

**504.** Множество допустимых значений неизвестных есть множество положительных чисел. Поскольку при $x > 0$ левая часть уравнения положительна, то, логарифмируя при основании 2, находим эквивалентное уравнение $x \log_2 x = 6$ или $\log_2 x = \frac{6}{x}$.

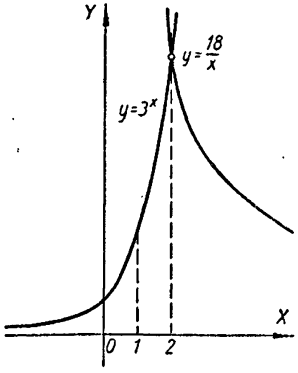



Рис. 15.

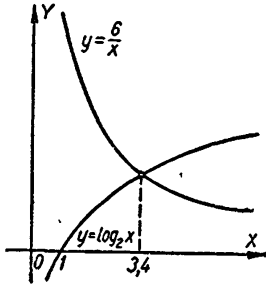



Рис. 16.

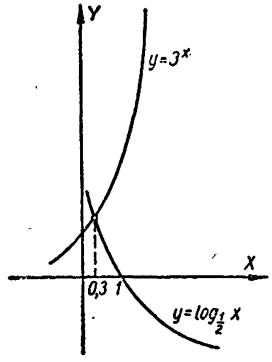



Рис. 17.

Строим графики функций (рис. 16) $y = \log_2 x$ и $y = \frac{6}{x}$ (ограничиваясь частью этого графика для $x > 0$).

*Отв.* $x \approx 3{,}4$.

**505.** Поскольку $3^x > 0$ при всех действительных значениях $x$, то $2^{3^x} > 1$. Но тогда $0 < x < \frac{1}{2^{3^x}}$ и, следовательно, корни уравнения могут быть только положительными числами, меньшими единицы. Так как при $0 < x < 1$ обе части уравнения $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}$ положительны, то, логарифмируя их при основании $\frac{1}{2}$, получим уравнение $\log_{\frac{1}{2}} x = 3^x$.

Вычерчиваем графики функций $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = 3^x$ (рис. 17).

*Отв.* $x \approx 0{,}3$.

**506.** Первое уравнение системы запишем в виде $y = 5 - x$, а второе — в виде $y = x^2 - 1$. Составив для каждого уравнения таблицу значений, строим графики этих функций (рис. 18).

На чертеже получим параболу, которую пересекает прямая в точках $A$ (— 3; 8) и $B$ (2; 3).

Координаты точек пересечения и являются корнями данной системы.

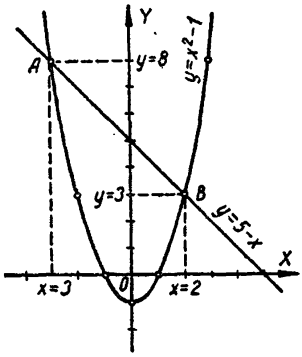



Рис. 18.

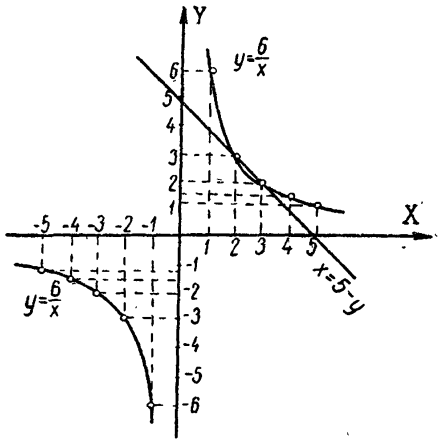



Рис. 19.

**507.** Начертив графики каждого уравнения (рис. 19), находим координаты точек пересечения. Это и будут корни данной системы уравнений.

*Отв.* $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $x_2 = 3$; $y_2 = 2$.

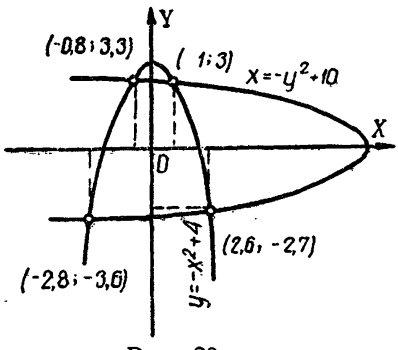



Рис. 20.

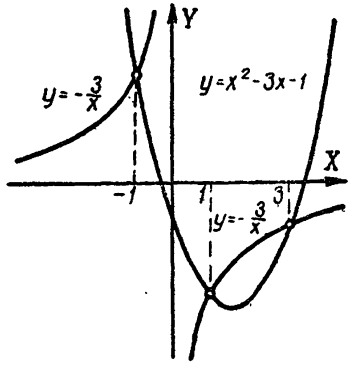



Рис. 21.

**508.** Указание. Обе кривые — параболы.

**509.** Указание. Надо начертить графики функций $x^2 + y^2 = 3$ (окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}$) и $y^2 = 2x$ (парабола).

**510.** Указание. Решение данной системы сводится к нахождению точек пересечения (рис. 20) парабол $y = -x^2 + 4$ и $x = -y^2 + 10$.

*Отв.* $x_1 = 1$; $y_1 = 3$; $x_2 \approx -0{,}8$; $y_2 = 3{,}3$; $x_3 \approx -2{,}8$; $y_3 \approx \approx -3{,}6$; $x_4 \approx 2{,}6$; $y_4 = -2{,}7$.

511. 1-й способ решения. Представим данное уравнение в виде

$$x(x^2 - 3x - 1) + 3 = 0.$$

Обозначим $x^2 - 3x - 1 = y$, тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 1; \\ xy = -3. \end{cases}$$

Построив графики функций (рис. 21) $y = x^2 - 3x - 1$ и $y = -\frac{3}{x}$, получим абсциссы точек пересечения, которые дают корни данного уравнения.

2-й способ решения. Введем сперва замену неизвестных. Пусть $x = x_1 + \alpha$, где $x_1$ — новое неизвестное, а $\alpha$ равно второму коэффициенту уравнения, взятому с противоположным знаком и поделенному на 3, т. е. $\alpha = 1$. Тогда

$$(x_1 + 1)^3 - 3(x_1 + 1)^2 - (x_1 + 1) + 3 = 0;$$

$$x_1^3 - 4x_1 = 0.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$x_1^3 = 4x_1.$$

Положив

$$y = x_1^3; \quad y = 4x_1,$$

строим в системе координат $X$, $Y$ кубическую параболу и прямую. Абсциссы точек пересечения этих кривых, увеличенные на 1, и будут искомыми корнями уравнения.

*Отв.* $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

## Неравенства

512. Решив первое неравенство, получим границу для неизвестного $x > \frac{11}{3}$. Второе неравенство дает $x > \frac{65}{21}$. Таким образом, систему удовлетворяют значения

$$x > \frac{65}{21}.$$

513. Из первого неравенства следует, что $x < \frac{13}{4}$, второе неравенство дает границу $x > -\frac{17}{5}$.

Таким образом, систему удовлетворяют значения

$$-\frac{17}{5} < x < \frac{13}{4}.$$

**514.** Представим данную систему неравенств в виде

$$\begin{cases} y + \frac{1}{2} > |x^2 - 2x|; \\ y < 2 - |x - 1|. \end{cases}$$

Поскольку $|x^2 - 2x| \geqslant 0$ и $|x - 1| \geqslant 0$, то

$$-\frac{1}{2} < y < 2.$$

Единственными целыми числами $y$, удовлетворяющими этому неравенству, являются 0 и 1. Следовательно, данная система неравенств, рассматриваемая для целых $x$ и $y$, может быть совместима лишь при значениях $y = 0$ и $y = 1$.

Пусть $y = 0$, тогда

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < \frac{1}{2}; \\ |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Второму неравенству этой системы удовлетворяют целые числа 0,1 и 2; первому неравенству удовлетворяют целые числа 0 и 2. Поэтому для случая $y = 0$ находим два решения:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 0.$$

При $y = 1$ данная система неравенств примет вид

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < \frac{3}{2}; \\ |x - 1| < 1. \end{cases}$$

Второму неравенству этой системы удовлетворяет только целое число 1; одновременно оно удовлетворяет и первому неравенству.

Таким образом, получаем решение $x_3 = 1$, $y_3 = 1$.

*Ответ.* $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 2$, $y_2 = 0$; $x_3 = 1$, $y_3 = 1$.

**515.** Данная система состоит из двух неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} > -3; \\ \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2. \end{cases}$$

Левые части их представляют собой дроби с одинаковыми знаменателями, которые при всех действительных значениях $x$ положительны, так как их дискриминанты отрицательны ($1 - 4 < 0$). Поэтому, приводя каждое из неравенств к общему знаменателю, последний можно отбросить. Следовательно,

$$\begin{cases} x^2 + ax - 2 > -3(x^2 - x + 1); \\ x^2 + ax - 2 < 2(x^2 - x + 1), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4x^2 + (a-3)x + 1 > 0; \\ x^2 - (a+2)x + 4 > 0. \end{cases}$$

Каждое из полученных неравенств должно быть справедливо при всяком действительном значении $x$, а для этого необходимо, чтобы дискриминанты левых частей неравенств были отрицательны:

$$\begin{cases} (a-3)^2 - 16 < 0; \\ (a+2)^2 - 16 < 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему неравенств относительно $a$, найдем

$$\begin{cases} -4 < a-3 < 4; \\ -4 < a+2 < 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < a < 7; \\ -6 < a < 2. \end{cases}$$

Отсюда $-1 < a < 2$.

*Отв.* $-1 < a < 2$.

**516.** Дробь может быть больше нуля, если числитель и знаменатель больше нуля или когда и числитель и знаменатель меньше нуля.

В первом случае $3a - 8 > 0$; $5 - a > 0$, т. е. $a > \frac{8}{3}$ и $a < 5$.

Следовательно, $\frac{8}{3} < a < 5$.

Во втором случае $3a - 8 < 0$; $5 - a < 0$, т. е. $a < \frac{8}{3}$ и $a > 5$.

Это невозможно, ибо полученные границы противоречивы.

Таким образом, дробь будет положительной, если $a$ удовлетворяет условию $\frac{8}{3} < a < 5$.

**517.** Дробь будет отрицательной в том случае, когда числитель больше нуля, а знаменатель меньше нуля, или наоборот, когда числитель отрицательный, а знаменатель положительный.

В первом случае $2 - 3a > 0$; $2a + 7 < 0$, т. е. $a < \frac{2}{3}$ и $a < -\frac{7}{2}$. Следовательно,

$$a < -\frac{7}{2}.$$

Во втором случае $2 - 3a < 0$; $2a + 7 > 0$, т. е. $a > \frac{2}{3}$ и $a > -\frac{7}{2}$, откуда

$$a > \frac{2}{3}.$$

Таким образом, дробь будет отрицательной при значениях $a < -\frac{7}{2}$ или $a > \frac{2}{3}$.

**518.** Имеем $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Разделив доказываемое неравенство на $x - 1$ (по условию $x - 1 > 0$), получим

$$5 < x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 < 5x^4.$$

В связи с тем что $x > 1$ и, следовательно, $x^4 > x^3 > x^2 > x > 1$, то, с одной стороны, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 5$, а с другой $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 < 5x^4$.

Таким образом, неравенство $5(x - 1) < x^5 - 1 < 5x^4(x - 1)$ доказано.

**519.** Преобразуем левую часть доказываемого неравенства:

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 = x^4(x - y) - y^4(x - y) =$$
$$= (x - y)(x^4 - y^4) = (x - y)(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) =$$
$$= (x - y)^2(x^2 + y^2)(x + y).$$

В связи с тем что множители $(x - y)^2$ и $x^2 + y^2$ неотрицательные и по условию $x + y \geqslant 0$, все алгебраическое выражение $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$ тоже неотрицательное.

Равенство нулю будет иметь место при условии, когда $|x| = |y|$.

**520.** Под каждым радикалом прибавим соответственно $4a^2$, $4b^2$, $4c^2$, тогда каждое из слагаемых увеличится:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < \sqrt{4a^2+4a+1} +$$
$$+ \sqrt{4b^2+4b+1} + \sqrt{4c^2+4c+1} = \sqrt{(2a+1)^2} + \sqrt{(2b+1)^2} +$$
$$+ \sqrt{(2c+1)^2} = 2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1 = 2(a + b + c) + 3 = 5.$$

Заметим, что $2a + 1 > 0$; $2b + 1 > 0$; $2c + 1 > 0$, ибо, как следует из условия, $a \leqslant -\frac{1}{4}$; $b \leqslant -\frac{1}{4}$ и $c \leqslant -\frac{1}{4}$.

Примечание. Можно и другим способом доказать это неравенство:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} - 5 =$$
$$= \frac{2\sqrt{4a+1} + 2\sqrt{4b+1} + 2\sqrt{4c+1} - 10}{2} =$$
$$= \frac{2\sqrt{4a+1} + 2\sqrt{4b+1} + 2\sqrt{4c+1} - 6 - 4(a+b+c)}{2} =$$
$$= -\frac{(4a + 1 - 2\sqrt{4a+1} + 1) + (4b + 1 - 2\sqrt{4b+1} + 1) + (4c + 1 - 2\sqrt{4c+1} + 1)}{2} =$$
$$= -\frac{(\sqrt{4a+1} - 1)^2 + (\sqrt{4b+1} - 1)^2 + (\sqrt{4c+1} - 1)^2}{2} < 0.$$

**521.** Указание. Нужно рассмотреть

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

**522.** Из предыдущего примера следует, что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab};$$

$$\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd},$$

откуда

$$\sqrt{abcd} \leqslant \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}.$$

Но нам известно, что $\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab$, следовательно,

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} \leqslant \left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\sqrt{abcd} \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2,$$

откуда

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$

**523.** Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства:

$$3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2 = 3+3a^2+3a^4-1-a^2-$$
$$-a^4-2a^3-2a-2a^2 = 2+2a^2+2a^4-2a^3-2a-2a^2 =$$
$$= (a^2-a)^2+(a^2-1)^2+(a-1)^2 \geqslant 0.$$

Примечание. Это неравенство можно доказать и другим путем. Разложим его левую часть на множители: $1+a^2+a^4 = 1+2a^2+a^4-a^2 = (1+a)^2-a^2 = (1+a+a^2)(1-a+a^2)$. Поскольку $1+a+a^2 > 0$, то доказательство данного неравенства сводится к доказательству неравенства $3(1-a+a^2) \geqslant 1+a+a^2$:

$$3(1-a+a^2)-1-a-a^2 = 2a^2-4a+2 = 2(a-1)^2 \geqslant 0.$$

**524.** Очевидно, что

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}; \quad \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}; \quad \ldots; \quad \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}; \quad \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}.$$

Сложив почленно эти неравенства (вместе с первым равенством), находим

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

**525.** Раскроем скобки в обеих частях неравенства:

$$a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3 \leqslant$$
$$\leqslant a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2.$$

Вычтем из обеих частей сумму

$$a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2,$$

после чего, перенеся все члены неравенства в одну сторону, получим очевидное неравенство

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \geqslant 0.$$

Из него видно, что доказываемое неравенство превращается в равенство лишь в случае, когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

**526.** Не нарушая общности, положим, что $a \leqslant b \leqslant c$. Обозначим $\frac{b}{a} = p$ и $\frac{c}{b} = q$, при этом $p \geqslant 1$; $q \geqslant 1$. Тогда первое неравенство примет вид

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geqslant 3.$$

Очевидно, что $(p - 1)(q - 1) \geqslant 0$, следовательно, $pq \geqslant p + q - 1$, поэтому

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geqslant \left(\frac{1}{p} + p\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) - 1 \geqslant 2 + 2 - 1 = 3. \quad (1)$$

Равенство имеет место только при $p + \frac{1}{p} = q + \frac{1}{q} = 2$, т. е. при $p = q = 1$ или $a = b = c$.

Второе неравенство легко доказывается с помощью первого или так:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) +$$

$$+ \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + 3 \geqslant 9.$$

Примечание. Можно доказать неравенство (1) и другим способом:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1}{4} 4 \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot 1} = 4,$$

откуда

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3.$$

**527.** Если не все отношения $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ равны, то, очевидно, при любом значении $\lambda$ сумма

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{*}(a_k - \lambda b_k)^2 > 0.$$

Отсюда следует, что квадратный трехчлен (относительно $\lambda$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 > 0$$

для всех значений $\lambda$, что может быть только тогда, когда его дискриминант отрицателен:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 < 0,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 > 0.$$

**528.** Даем доказательство Коши, основанное на методе математической индукции. При $n = 1$ теорема очевидна. При $n = 2$ имеем последовательно

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{1}{2}(a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2.$$

Но квадрат любого действительного числа неотрицателен. Следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}.$$

Остается доказать, что знак равенства имеет место только тогда, когда числа $a_1$ и $a_2$ равны между собой. Очевидно, что если $a_1 = a_2 = a$, то $\frac{a_1 + a_2}{2} = a = \sqrt{a_1 a_2}$.

Пусть $a_1 \neq a_2$. Тогда $\sqrt{a_1} \neq \sqrt{a_2}$, $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 > 0$, а отсюда следует $\frac{a_1 + a_2}{2} \neq \sqrt{a_1 a_2}$.

---

* Знаком $\sum_{k=1}^{n}$ (сигма) сокращенно обозначается сумма, например, $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n)$.

Итак, если $n = 2$, то теорема полностью доказана.

Теперь докажем, что если требуемое неравенство верно для числа $n$, то оно верно и для числа $2n$. В самом деле,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{2n} =$$

$$= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \ldots + \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \ldots \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}},$$

так как мы предположили справедливость формулы для числа $n$.

Заменяя в последнем неравенстве выражения

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \quad \frac{a_3 + a_4}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}$$

соответственно выражениями

$$\sqrt{a_1 a_2}, \quad \sqrt{a_3 a_4}, \quad \ldots, \quad \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}},$$

мы можем лишь усилить неравенство, следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n} \geqslant \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4} \ldots \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}},$$

что и требовалось доказать. Так как формула справедлива для $n = 2$, то она справедлива и для $n = 4, 8, 16, 32\ldots$, т. е. для любой целой положительной степени двух.

Если $n$ не является степенью двух, то всегда найдется такое число $m$, что $n + m$ будет степенью двух: $n + m = 2^k$. Тогда по доказанному

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}}{n + m} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}}.$$

Заметив это, положим

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+m} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Тогда последнее неравенство примет вид

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} m}{n + m} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^m};$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^m},$$

откуда

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n+m} \geqslant a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^m;$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Итак, формула справедлива для любого положительного $n$. Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, то очевидно, что в формуле имеет место знак равенства. Пусть хотя бы две величины, например $a_1$ и $a_2$, не равны между собой. Тогда

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3\ldots a_n}.$$

Заменив выражение $\frac{a_1+a_2}{2}$ выражением $\sqrt{a_1a_2}$, мы усилим неравенство, так как при $a_1 \neq a_2$

$$\frac{a_1+a_2}{2} > \sqrt{a_1a_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{(\sqrt{a_1a_2})^2 a_3\ldots a_n};$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_4},$$

что и требовалось доказать.

**529.** Напишем ряд очевидных неравенств:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

что и требовалось доказать.

**530.** *Отв.* $R - r \leqslant d \leqslant R + r$.

**531.** Так как каждый член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое между предыдущим и последующим, задача сводится к составлению прогрессии, в которой 1-й член $a_1 = 5$, число членов $n = 10$ и 10-й член $a_{10} = 12$.

Имеем $a_{10} = a_1 + 9d = 5 + 9d$, следовательно, $5 + 9d = 12$, откуда $d = \frac{7}{9}$.

Таким образом, искомые средние арифметические будут: 5; $5\frac{7}{9}$; $6\frac{5}{9}$; $7\frac{1}{3}$; ...

**532.** Так как по условию $a_1 = 5$, а $d = 4$, то, подставляя эти значения в $S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}$, найдем $S_n = \frac{[10 + 4(n-1)]n}{2}$.

После соответствующих преобразований получим квадратное уравнение

$$2n^2 + 3n - 10877 = 0,$$

откуда $n_1 = 73$; $n_2 = -74{,}5$.

Условию задачи удовлетворяет только $n_1 = 73$, т. е. необходимо взять 73 члена арифметической прогрессии.

**533.** Натуральные двузначные числа составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 1$, первым членом $a_1 = 10$ и последним $a_n = 99$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ определяем число членов: $n = 90$, а по формуле $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ — сумму: $S_n = \frac{(10 + 99)90}{2} = 4905$.

Итак, сумма всех двузначных чисел равна 4905.

**534.** Обозначим через $a_k$, $a_{k+1}$, $a_{k+2}$ и $a_{k+3}$ последовательные четыре члена арифметической прогрессии:

$$a_{k+1} = a_k + d;$$

$$a_{k+2} = a_k + 2d;$$

$$a_{k+3} = a_k + 3d.$$

Составим их сумму:

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} = 4a_k + 6d =$$

$$= 4a_k + 6(2n + 1) = 2[2a_k + 3(2n + 1)].$$

Так как $2n + 1$ — число нечетное, а $2a_k$ — четное, то выражение, стоящее в квадратных скобках, не делится на 2, поэтому вся сумма имеет множителем число 2 лишь в первой степени и, следовательно, не может быть точным квадратом.

535. В связи с тем, что разность прогрессии известна, для определения последней нужно найти первый член. По условию задачи $d = 4$; $3S_5 = S_{10} - S_5$; $4S_5 = S_{10}$. Но

$$S_5 = \frac{2a + 4d}{2} 5 = 5a + 40;$$

$$S_{10} = \frac{2a + 9d}{2} 10 = 10a + 180;$$

следовательно, $4(5a + 40) = 10a + 180$, откуда $a = 2$.

Таким образом, искомая прогрессия $\div$ 2; 6; 10; 14...

536. 1-й способ решения. В соответствии с условием задачи

$$\frac{2a + d(n-1)}{2} n = \frac{a + d(n-1)}{2} (n + 1),$$

или

$$(n - 1)(a - d) = 0,$$

откуда $a = d$.

В самом деле, при $a = d$

$$a + 2a + \ldots + na = a(1 + 2 + \ldots + n) =$$
$$= \frac{a(1+n)}{2} n = \frac{na}{2}(n + 1).$$

2-й способ решения. По условию $S_n = \frac{n+1}{2} a_n$ при всех значениях $n$. Пусть $n = 2$, тогда $S_2 = a_1 + a_2$ и, следовательно, $a_1 + a_2 = \frac{3}{2} a_2$, откуда $a_2 = 2a_1$; $d = a_2 - a_1 = 2a_1 - a_1 = a_1$.

537. Из условия задачи следует, что $b - a = c - b = d$, где $d$ — разность данной арифметической прогрессии. Так как каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть средняя арифметическая величина двух других ее членов, равно отстоящих от рассматриваемого, то нужно доказать, что $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b - c} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} =$$
$$= \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{d} = \frac{c - a}{d(\sqrt{c} + \sqrt{a})} = \frac{2d}{d(\sqrt{c} + \sqrt{a})} = \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.$$

538. Пусть члены первой арифметической прогрессии $a_n$ соответственно равны членам второй прогрессии $a_m$, т. е.

$$5 + (n - 1)3 = 3 + (m - 1)4,$$

или

$$3n + 2 = 4m - 1,$$

откуда

$$n = m + \frac{m}{3} - 1. \qquad (1)$$

Чтобы $n$ принимало только целые положительные значения, $\frac{1}{3}m$ должна равняться $k$ (целому положительному числу), т. е. $m = 3k$. Но тогда из равенства (1) следует

$$n = 4k - 1.$$

По условию задачи $n$ может принимать значения 1; 2; 3; ...; 100, следовательно, $k = 1; 2; 3; 4; \ldots; 25$.

Итак, общих членов в рассматриваемых двух арифметических прогрессиях будет 25:

$$11;\ 23;\ 35;\ \ldots\ ;\ 299.$$

**539.** Пусть оба катка встретятся через $x$ *мин*. Тогда второй каток пройдет до встречи путь, равный $6x$ *м*, а первый — путь, который можно выразить с помощью суммы членов арифметической прогрессии, где $a_1 = 1$; $n = x$; $d = \frac{1}{2}$:

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2 + \frac{1}{2}(x-1)}{2} x = \frac{4 + x - 1}{4} x = \frac{3x + x^2}{4}.$$

Весь путь равен 117 *м*. Следовательно, имеем квадратное уравнение

$$6x + \frac{3x + x^2}{4} = 117, \text{ или } x^2 + 27x - 468 = 0,$$

откуда $x_1 = 12$; $x_2 = -39$ (второй корень $x_2 = -39$ не удовлетворяет условию задачи).

*Отв.* 12 *мин*.

**540.** Обозначим среднюю сторону через $x$, тогда меньшая сторона равна $(x - 2)$ *см*, а большая $(x + 2)$ *см*.

Применим формулу Герона, получим

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$p = \frac{x - 2 + x + x + 2}{2} = \frac{3}{2}x;$$

$$p - (x - 2) = \frac{3}{2}x - x + 2 = \frac{1}{2}x + 2;$$

$$p - x = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x;$$

$$p - (x + 2) = \frac{3}{2}x - x - 2 = \frac{1}{2}x - 2;$$

$$6 = \sqrt{\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{2}x + 2\right)\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x - 2\right)};$$

$$6 = \frac{1}{4} x \sqrt{3(x+4)(x-4)};$$

$$6 = \frac{1}{4} x \sqrt{3(x^2-16)};$$

$$576 = 3x^2(x^2-16); \quad 192 = x^4 - 16x^2;$$

$$x^4 - 16x^2 - 192 = 0,$$

откуда $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

*Отв.* $2(\sqrt{6}-1)$; $2\sqrt{6}$; $2(\sqrt{6}+1)$.

**541.** Члены данного ряда можно представить в следующем виде:

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3;$$

$$2 \cdot 3 = \frac{1}{3}(2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3);$$

$$3 \cdot 4 = \frac{1}{3}(3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4);$$

. . . . . .

$$n(n+1) = \frac{1}{3}[n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)].$$

Отсюда

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) =$$

$$= \frac{1}{3}[1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 +$$

$$+ \ldots + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)] = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

так как все слагаемые, стоящие в квадратных скобках, взаимно уничтожаются, кроме предпоследнего.

**542.** Рассмотрим ряд $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$, сумма которого равна $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (см. пример 541). Его можно представить в следующем виде:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = 1 \cdot (1+1) +$$

$$+ 2 \cdot (2+1) + 3 \cdot (3+1) + \ldots + n(n+1) =$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Обозначая

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = S_{n^2};$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = S_n,$$

получим

$$S_{n^2} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) - S_n =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**543.** 1-й способ решения. Из первой точки можно провести $(n-1)$ прямых линий ко всем остальным. Из второй точки можно провести $(n-2)$ прямых линий, так как прямая, идущая к первой точке, уже учтена. Из третьей точки можно провести $(n-3)$ прямых линий и т. д. Из последней точки нельзя будет провести ни одной новой прямой линии.

Итак, число прямых линий выразится суммой членов арифметической прогрессии

$$S = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

с первым членом $a_1 = n - 1$, последним $a_n = 1$ и числом членов $n - 1$.

По формуле находим сумму

$$S_n = \frac{[a_1 + a_{n-1}](n-1)}{2} = \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2-й способ решения. Соединим какую-либо точку последовательно с остальными $(n-1)$ точками, тогда получим $(n-1)$ прямых линий.

Но так как всех точек $n$, то, повторив то же самое $n$ раз, получим $n(n-1)$ прямых линий, а так как каждая линия повторяется два раза (например, от $A$ к $B$ и от $B$ к $A$), то число различных прямых линий будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Примечание. Очевидно, что число прямых равно числу сочетаний из $n$ элементов по 2. Пользуясь формулой соединений, получим тот же результат:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

**544.** 1-й способ решения. По условию $S_n = 3n^2$ при любом $n$. Пусть $n = 1$, тогда $S_1 = a_1 = 3 \cdot 1^2 = 3$; если $n = 2$, то $S_2 = a_1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$; следовательно, $a_2 = 12 - a_1 = 12 - 3 = 9$. Искомая прогрессия: 3; 9; 15; 21; 27; ...

2-й способ решения. Согласно условию задачи

$$S_n = 3n^2,$$

или

$$3n^2 = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2},$$

но так как $n \neq 0$, то, сокращая последнее уравнение на $n$, получим

$$2a_1 + dn - d = 6n;$$

$$2a_1 - d = (6 - d)\,n. \qquad (1)$$

По условию равенство (1) должно удовлетворяться при любом значении $n$. Однако левая часть равенства (1) не содержит $n$, тогда как правая часть будет менять свое значение с изменением $n$ при условии, если множитель $(6 - d) \neq 0$.

Только при условии $6 - d = 0$ правая часть не зависит от $n$, так как она равна нулю. Следовательно, в этом случае $d = 6$. Таким образом, $2a_1 - d = 0$, откуда $a_1 = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

*Отв.* $\div$ 3; 9; 15; 21; ...

**545.** По условию задачи

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15;$$

$$a_1 a_2 a_3 = 80.$$

Выразив $a_2$ и $a_3$ через $a_1$ и $d$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15; \\ a_1 (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 80. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $a_1 + d = 5$. Составляем систему.

$$\begin{cases} a_1 + d = 5; \\ a_1^2 + 2a_1 d = 16, \end{cases}$$

которая имеет два решения:

$$1)\ a_1 = 2; \quad d = 3;$$

$$2)\ a_1 = 8; \quad d = -3.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две арифметические прогрессии:

$$1)\ \div 2;\ 5;\ 8; \ldots$$

$$2)\ \div 8;\ 5;\ 2; \ldots$$

**546.** Обозначим стороны данного прямоугольного треугольника через $x$, $y$ и $z$ в порядке их возрастания.
Тогда по теореме Пифагора

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что по условию числа $x$, $y$ и $z$ образуют арифметическую прогрессию, т. е.

$$2y = x + z,$$

и, подставляя $z = 2y - x$ в выражение (1), получаем уравнение

$$3y^2 - 4xy = 0. \qquad (2)$$

Нам, кроме того, известно, что площадь треугольника $\frac{1}{2}xy = 10^{\lg 6} = 6$, т. е. $xy = 12$. Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде $y^2 - 16 = 0$, откуда $y = 4$ (решение $y = -4$ условию задачи не удовлетворяет). Тогда $x = 3$; $z = 5$.

**547.** У к а з а н и е. Записать искомую сумму в виде

$$\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{a_n-a_1}{d\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}$$ и т. д

**548.** Мы знаем, что сумма членов арифметической прогрессии

$$S=\frac{a+a_n}{2}n=\frac{2a+d(n-1)}{2}n.$$

Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии

$$4a+6d=124;\quad 2a+3d=62;$$

сумма последних четырех членов арифметической прогрессии

$$4a+4d(n-1)-6d=4a+4dn-10d=156,$$

т. е.

$$2a+2dn-5d=78;$$

сумма всех членов арифметической прогрессии

$$[2a+d(n-1)]n=420.$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$2a+3d=62;$$

$$2a+2dn-5d=78;$$

$$2an+dn^2-dn=420.$$

Решив ее, получим $n = 6$; $d = 4$; $a = 25$.

*Ответ.* 25; 29; 33; 37; 41; 45.

**549.** По формуле сумма $n$ членов арифметической прогрессии

$$S_n=\frac{[2a_1+d(n-1)]}{2}n.$$

Вычислим сумму членов $p$-й прогрессии:

$$S_n^{(p)}=\frac{[2(2p-1)+(2p-1)(n-1)]n}{2}=\frac{(2p-1)(n+1)n}{2}.$$

Подставляя вместо $p$ числа 1, 3, 5, ..., $(2p-1)$, получим

$$S_n^{(1)}=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$S_n^{(2)}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot 3;$$

$$S_n^{(3)} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 5;$$

. . . . . .

$$S_n^{(p)} = \frac{n(n+1)}{2}(2p-1).$$

Суммируя левые и правые части равенств, найдем

$$S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + S_n^{(3)} + \ldots + S_n^{(p)} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 3 +$$

$$+ \frac{n(n+1)}{2} \cdot 5 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}(2p-1) = \frac{n(n+1)}{2}[1+3+5+$$

$$+ \ldots + (2p-1)] = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(1+2p-1)p}{2} = \frac{n(n+1)}{2} p^2.$$

**550.** Пусть $a_k = \sqrt{2}$; $a_m = \sqrt{3}$; $a_p = \sqrt{5}$. Тогда $a_1 + (k-1)d = \sqrt{2}$; $a_1 + (m-1)d = \sqrt{3}$; $a_1 + (p-1)d = \sqrt{5}$.

Образуем разности $a_m - a_k$; $a_p - a_m$:

$$[a_1 + (m-1)d] - [a_1 + (k-1)d] = (m-k)d = \sqrt{3} - \sqrt{2};$$

$$[a_1 + (p-1)d] - (a_1 + (m-1)d] = (p-m)d = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{p-m}{m-k}.$$

Полученное равенство не имеет смысла, так как слева находится иррациональное число, а справа — рациональное. Следовательно, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

**551.** По формуле любого члена арифметической прогрессии $a_k = a_1 + d(k-1)$, где $a_1$ — первый член прогрессии; $d$ — разность; $k-1$ — число членов прогрессии, предшествующих определяемому. Найдем число членов обеих арифметических прогрессий, которые стоят в левой части данного уравнения:

1) $2n + 1 = 1 + 2(k_1 - 1)$, откуда число членов $k_1 = n + 1$;

2) $\frac{7+3n}{2} = 3{,}5 + 1{,}5(k_2 - 1)$, откуда $k_2 = n + 1$.

По формуле суммы членов арифметической прогрессии

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = \frac{1+2n+1}{2} k_1 = (n+1)^2;$$

$$3{,}5 + 5 + \ldots + \frac{7+3n}{2} = \frac{3{,}5 + 3{,}5 + 1{,}5n}{2} k_2 = \frac{(14+3n)(n+1)}{4}.$$

Следовательно, данное уравнение можно записать в таком виде:

$$(n+1)^2+\frac{(14+3n)(n+1)}{4}=105;$$

$$7n^2+25n-402=0,$$

откуда

$$n_1=6 \text{ и } n_2=-\frac{67}{7}.$$

Решение $n=-\frac{67}{7}$ условию задачи не удовлетворяет, так как число членов арифметической прогрессии не может быть дробным и к тому же отрицательным.

**552.** Пусть $a$ — первый член прогрессии, а $d$ — разность. Тогда

$$S_{p+q}=\frac{2a+(p+q-1)d}{2}(p+q).$$

Для определения $S_{p+q}$ воспользуемся условиями задачи:

$$\frac{2a+(p-1)d}{2}p=q;\quad \frac{2a+(q-1)d}{2}q=p,$$

или

$$\begin{cases} 2ap+(p^2-p)d=2q; \\ 2aq+(q^2-q)d=2p. \end{cases}$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$2a(p-q)+(p^2-p-q^2+q)d=2(q-p);$$

$$2a(p-q)+[(p+q)(p-q)-(p-q)]d=-2(p-q).$$

Сокращая на $(p-q)$, находим

$$2a+(p+q-1)d=-2.$$

Следовательно, $S_{p+q}=-(p+q)$.

**553.** Первый член прогрессии $a_1=\frac{x-1}{x}$, а последний $a_n=\frac{1}{x}$. Число членов $n$, очевидно, равно $x-1$. Следовательно,

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\left(\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{x-1}{2}.$$

Итак,

$$S_n=\frac{x-1}{2}.$$

**554.** Пусть расстояние между двумя телами будет равно 1000 *м* через $t$ *сек* после начала падения первого тела. Тогда путь $s_1$, пройденный первым телом за $t$ *сек*, будет равен сумме членов арифметической прогрессии, у которой $a=4{,}9$; $d=9{,}8$, а число членов $t$. Путь $s_2$, пройденный вторым телом, будет равен сумме членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=4{,}9$; $d=9{,}8$, а число членов $t-2$.

По условию задачи

$$s_1 - s_2 = 1000.$$

Но

$$s_1 = \frac{2a + d(t-1)}{2} t = \frac{2 \cdot 4{,}9 + 9{,}8(t-1)}{2} t = 4{,}9t^2;$$

$$s_2 = \frac{2a_1 + d(t-3)}{2} (t-2) = \frac{9{,}8 + 9{,}8(t-3)}{2} (t-2) = 4{,}9(t-2)^2.$$

Таким образом,

$$4{,}9t^2 - 4{,}9(t-2)^2 = 1000,$$

откуда

$$t = 52\frac{1}{49} \text{ сек.}$$

**555.** Искомая сумма равна

$$7(1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots1) = 7\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{10^n - 1}{9}\right) = \frac{7}{9}(10 + 10^2 + \ldots + 10^n - n) =$$

$$= \frac{7}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

**556.** Представим члены данного ряда в таком виде:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4};$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot \frac{1}{4};$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot \frac{1}{4};$$

. . . . . .

$$n(n+1)(n+2) = [n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+$$

$$+ 1)(n+2)] \cdot \frac{1}{4}.$$

Суммируя левые и правые части равенств, получим

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

**557.** Рассмотрим ряд $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$, сумма которого равна (см. пример 556)

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Общий член этого ряда

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

состоит из трех слагаемых, указывающих на то, что сумма рассматриваемого ряда равна сумме трех рядов:

1) сумме кубов чисел натурального ряда от 1 до $n$ включительно

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = S_{n^3};$$

2) утроенной сумме квадратов чисел натурального ряда от 1 до $n$ включительно

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = 3S_{n^2};$$

3) удвоенной сумме чисел натурального ряда от 1 до $n$ включительно

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2S_n.$$

Следовательно,

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = S_{n^3} + 3S_{n^2} + 2S_n.$$

Отсюда

$$S_{n^3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3S_{n^2} - 2S_n,$$

но

$$S_{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (см. пример 542);}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

поэтому

$$S_{n^3} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} -$$

$$- \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3(n^2+5n+6) - 12n - 6 - 12}{6} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

558. Третий член геометрической прогрессии $a_3 = a_1 q^2$, откуда, зная, что $a_3 = \frac{1}{9}$, а $q = \frac{1}{3}$, найдем $a_1 = 1$.

Для определения числа членов прогрессии воспользуемся формулой суммы членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q},$$

откуда

$$q^n = \frac{a_1 + S_n q - S_n}{a_1}.$$

Подставляя известные числовые значения $a_1$, $q$ и $S_n$, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{27},$$

откуда $n = 3$.

**559.** 1-й способ решения. Пусть данная сумма будет $S_n$. Умножая каждое слагаемое этой суммы на $x$ и вычитая полученную величину из $S_n$, после некоторых преобразований получим

$$S_n - xS_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1}.$$

Суммируем входящую сюда геометрическую прогрессию, при $x \neq 1$:

$$(1-x)S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1},$$

откуда

$$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

Если $x = 1$, то

$$S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2-й способ решения. Обозначим $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)\cdot x^n = S_n$. Тогда (при $x \neq 1$)

$$S_n = 1 + (1+1)x + (1+2)x^2 + \ldots + (1+n)x^n =$$
$$= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x + 2x^2 + \ldots + nx^n =$$
$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x[S_n - (n+1)x^n].$$

Отсюда, считая $S_n$ неизвестным и перенося его в левую часть равенства, получим

$$(1-x)S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1};$$

$$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

**560.** По условию $a_3 - a_1 = 16$ и $a_5 - a_3 = 144$. Принимая во внимание, что $a_3 = a_1q^2$; $a_5 = a_1q^4$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1(q^2-1) = 16; \\ a_1q^2(q^2-1) = 144, \end{cases}$$

откуда $q = \pm 3$; $a_1 = 2$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две прогрессии:

1) $\mp$ 2; 6; 18; 54; 162; ...

2) $\mp$ 2; $-6$; 18; $-54$; 162; ...

**561.** По условию задачи

$$a - aq = 36; \quad aq^2 - aq^3 = 4,$$

где $a$ — первый член геометрической прогрессии, а $q$ — знаменатель.

Запишем второе уравнение в виде

$$q^2(a - aq) = 4,$$

или

$$36q^2 = 4,$$

откуда

$$q = \frac{1}{3}; \quad q' = -\frac{1}{3}$$

и соответственно

$$a = 54; \quad a' = 27.$$

Следовательно, задача имеет два решения:

1) 54; 18; 6; 2;

2) 27; —9; 3; —1.

**562.** Принимая во внимание, что сумма восьми членов прогрессии и ее знаменатель известны, найдем $a_1$ из уравнения

$$S_8 = \frac{a_1(1 - q^8)}{1 - q}.$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{S_8(1 - q)}{1 - q^8};$$

$$a_1 = -1.$$

Тогда $a_3 = a_1q^2 = -4$.

**563.** Сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находящейся в левой части данного уравнения, можем записать в виде ($a_1 = x^2$; $q = x$)

$$S = \frac{x^2}{1 - x}.$$

Принимая во внимание, что $\sin^2 45° = \frac{1}{2}$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{1 - x} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = \frac{1}{2}$ ($x = -1$ не удовлетворяет условию задачи).

**564.** Если первое число $a$, знаменатель геометрической прогрессии $q$, то по условию задачи второе число будет $aq$ и третье $aq^2$. Тогда

$$a + aq + aq^2 = 114;$$
$$a(1 + q + q^2) = 114. \qquad (1)$$

Приняв во внимание, что эти числа являются одновременно первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии, получим уравнения

$$aq = a + 3d;$$
$$aq^2 = a + 24d,$$

где $d$ — разность арифметической прогрессии.

Умножим первое уравнение на 8 и вычтем из него второе. Тогда получим $8aq - aq^2 = 7a$, или, после сокращения на $a$ ($a \neq 0$)

$$q^2 - 8q + 7 = 0, \qquad (2)$$

откуда $q = 7$.

Из уравнения (1) находим соответствующее значение для $a$; $a = 2$.

Таким образом, искомыми числами будут 2; 14; 98.

Решению уравнения (2) $q' = 1$ соответствуют три равных между собой числа 38; 38 и 38, которые можно рассматривать как члены геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1$ и арифметической прогрессии с разностью $d = 0$.

**565.** Деньги, которые должен заплатить первый товарищ, составляют геометрическую прогрессию: $a_1 = 1$; $q = \frac{3}{2}$; $n = 8$.

Нужно найти ее сумму:

$$S = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

*Отв.* $\approx$ 50 коп.

**566.** Данный ряд представляет геометрическую прогрессию, у которой знаменатель $x$, следовательно,

$$S = \frac{x^{10} x - 1}{x - 1} = \frac{x^{11} - 1}{x - 1}.$$

**567.** Согласно условию задачи

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = 56 \text{ и } u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots = 448.$$

Очевидно, что слагаемые второй суммы образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $u_1^2$ и знаменателем $q^2$.

Выражая суммы этих прогрессий, получим

$$\frac{u_1}{1 - q} = 56; \quad \frac{u_1^2}{1 - q^2} = 448;$$
$$u_1 = 56(1 - q); \qquad (1)$$
$$u_1^2 = 448(1 - q^2). \qquad (2)$$

Делим уравнение (2) на уравнение (1):

$$u_1 = 8(1 + q). \qquad (3)$$

Исключая $u_1$ из уравнений (1) и (3), найдем

$$8(1+q) = 56(1-q),$$

откуда $q = \frac{3}{4}$.

Из уравнения (1) $u_1 = 14$.

**568.** Данная сумма является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $a_1 = \sqrt{5}$ и $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \sqrt{10}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

**569.** Если первое число равно $a$, то по условию задачи два других будут $a + d$ и $a + 2d$ и, кроме того,

$$3a + 3d = 15,$$

или

$$a + d = 5.$$

Приняв во внимание, что числа $a + 1$, $a + d + 4$ и $a + 2d + 19$ составляют геометрическую прогрессию, получим уравнение

$$\frac{a+d+4}{a+1} = \frac{a+2d+19}{a+d+4},$$

из которого после замены $a = 5 - d$ найдем

$$\frac{9}{6-d} = \frac{24+d}{9};$$

$$d^2 + 18d - 63 = 0,$$

откуда

$$d = 3, \quad a = 2;$$

$$d' = -21, \quad a' = 26.$$

Следовательно, задача имеет два решения:

1) 2; 5; 8;

2) 26; 5; $-16$.

**570.** По условию задачи

$$\frac{a}{1-q} = \frac{2a(1-q^n)}{1-q}.$$

Разделив обе части этого равенства на $\frac{a}{1-q} \neq 0$, получим уравнение

$$2q^n = 1,$$

откуда

$$q = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

**571.** Пусть три числа, о которых идет речь в задаче, составляют геометрическую прогрессию, первый член которой равен $a$, а знаменатель $q$. Тогда получим уравнение

$$a + aq + aq^2 = 26.$$

Но по условию задачи числа $a + 1$, $aq + 6$, $aq^2 + 3$ составляют арифметическую прогрессию и, следовательно,

$$aq^2 + 3 - (aq + 6) = aq + 6 - (a + 1);$$

$$a(q^2 - 2q + 1) = 8.$$

Таким образом, будем иметь систему двух уравнений с двумя неизвестными $a$ и $q$:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 26; \\ a(q^2 - 2q + 1) = 8. \end{cases}$$

Исключая из обоих уравнений $a$, получим уравнение

$$3q^2 - 10q + 3 = 0,$$

откуда

$$q_1 = 3; \quad q_2 = \frac{1}{3}$$

и соответственно

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 18.$$

Следовательно, имеем два решения (две последовательности чисел):

1) 2; 6; 18;

2) 18; 6; 2.

**572.** Девятый член $a_9$ арифметической прогрессии определяется из соотношения

$$\frac{1 + a_9}{2} 9 = 369,$$

откуда $a_9 = 81$.

Знаменатель геометрической прогрессии находится из соотношения

$$81 = 1 \cdot q^8,$$

откуда $q = \pm \sqrt{3}$.

Таким образом, седьмой член геометрической прогрессии будет равен 27.

**573.** *Отв.* $\frac{4}{3} a^2$.

574. Из условия задачи нам известно, что $a_1 = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{7}{2}$. Принимая во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$, находим

$$\frac{7}{2} = \frac{3}{1-q},$$

откуда $q = \frac{1}{7}$.

*Отв.* $\div 3; \frac{3}{7}; \frac{3}{49}; \ldots$

575. Обозначим данные числа через $a$, $b$ и $c$. Тогда

$$b = a + d; \quad c = a + 2d;$$

$$b = aq; \quad c = aq^2.$$

Но по условию

$$\begin{cases} a + d = aq; \\ a + 2d = aq^2. \end{cases}$$

Исключая из этой системы уравнений $d$, получим

$$a(q-1)^2 = 0.$$

Если $a = 0$, то $a = b = c = 0$. Если же $a \neq 0$, то $q = 1$, т. е. $b = c = a$, что и требовалось доказать.

576. По условию задачи сумма членов данной бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{a}{1-q} = 12$, а сумма кубов членов этой же прогрессии

$$a^3 + a^3q^3 + a^3q^6 + \ldots = a^3(1 + q^3 + q^6 + \ldots) = \frac{a^3}{1-q^3} = \frac{1728}{7}.$$

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a - 12(1-q) = 0; \\ 7a^3 - 1728(1-q^3) = 0, \end{cases}$$

откуда находим, что $q = \frac{1}{2}$; $a = 6$. Решение $q = 2$; $a = -12$ не удовлетворяет условию задачи.

Таким образом,

$$S_{10} = \frac{a - aq^{10}}{1-q} = 11\frac{253}{256}.$$

**577.** Искомая сумма равна

$$\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots\right\}+\left\{+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\ldots\right\}+\left\{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=\left\{1-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right\}+\ldots=1.$$

**578.** Напишем число $a$ в виде $\frac{3a}{3}$, а число $b$ — в виде $\frac{3b}{3}$. Следовательно, все дроби со знаменателем 3, включая числа $a$ и $b$, можно выразить так:

$$\frac{3a}{3};\ \frac{3a+1}{3};\ \frac{3a+2}{3};\ \frac{3a+3}{3};\ \ldots;\ \frac{3b}{3}.$$

Очевидно, что дроби $\frac{3a}{3};\ \frac{3a+3}{3};\ \ldots;\ \frac{3b}{3}$ являются дробями сократимыми, которые можно записать и так: $a;\ a+1;\ a+2;\ \ldots;\ b$. Последние не должны быть включены в требуемую сумму дробей. Поэтому подсчет суммы всех несократимых дробей, заключенных между числами $a$ и $b$, можно произвести следующим образом: сложить дроби $\frac{3a}{3};\ \frac{3a+1}{3};\ \frac{3a+2}{3};\ \ldots;\ \frac{3b}{3}$ и из их суммы вычесть сумму чисел $a;\ a+1;\ a+2;\ \ldots;\ b$.

Последовательность дробей является арифметической прогрессией с первым членом $\frac{3a}{3}=a$, последним $\frac{3b}{3}=b$ и разностью $\frac{1}{3}$. Найдем число $n$ членов этой прогрессии:

$$b=a+\frac{1}{3}(n-1);\quad n-1=3(b-a);\quad n=3b-3a+1.$$

Отсюда сумма этих дробей равна

$$\frac{(b+a)(3b-3a+1)}{2}.$$

Последовательность чисел $a,\ a+1,\ \ldots,\ b$ также является арифметической прогрессией с первым членом $a$, последним $b$ и разностью, равной 1.

Найдем число $n$ членов этой прогрессии: $b=a+n-1$, откуда $n=b-a+1$. Тогда сумма этих чисел равна $\frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$.

Таким образом, сумма несократимых дробей со знаменателем 3, заключенных между $a$ и $b$, будет

$$S=\frac{(b+a)(3b-3a+1)}{2}-\frac{(b+a)(b-a+1)}{2}=$$

$$=\frac{(b+a)(2b-2a)}{2}=b^2-a^2.$$

**579.**

$$S_{n+1} = S_n + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

**580.** Сумма $1^3 + 2^3 + 3^3$ делится без остатка на 9. Допустим, что $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ делится без остатка на 9. Нужно доказать, что $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ тоже делится на 9.

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = [(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3] + \\ + 9(k^2 + 3k + 3).$$

Первое слагаемое делится на 9, второе — тоже, поэтому вся сумма разделится на 9.

Примечание. Этот пример можно решить и так:

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9k^2 + 9 + 3k(k^2 + 5). \qquad (1)$$

Если $k$ делится на 3, то, очевидно, вся правая часть равенства (1) делится на 9. Если $k$ не делится на 3, то $k$ можно представить в виде $k = 3m + 1$ или $k = 3m - 1$ ($m$ — целое положительное число или нуль).
Тогда

$$k^2 + 5 = (3m+1)^2 + 5 = 9m^2 + 6m + 6 = 3(3m^2 + 2m + 2);$$

$$k^2 + 5 = (3m-1)^2 + 5 = 9m^2 - 6m + 6 = 3(3m^2 - 2m + 2).$$

В обоих случаях $k^2+5$ делится на 3, поэтому и вся правая часть равенства (1) делится на 9.

**581.** При $n = 1$ утверждение верно в связи с тем, что одна прямая делит плоскость на две части. Допустим, что $n$ различных прямых, проходящих через одну точку, делят плоскость на $2n$ частей. Тогда прямая $n + 1$, проходящая через ту же точку, разделит всю плоскость на $2n + 2$, или $2(n + 1)$ частей.

**582.** $S_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$; $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5} = \frac{2}{2 \cdot 2 + 1}$.

Пусть $S_n = \frac{n}{2n+1}$, докажем, что сумма верна для $n + 1$ членов:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n+3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.$$

Примечание. Не прибегая к методу математической индукции, получаем

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

583. $S_1 = 1 \cdot 1! = 1$; $S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5 = 3! - 1$. Допустим, что сумма верна для $n$ членов:

$$S_n = (n+1)! - 1.$$

Докажем, что она верна тогда и для $n+1$ членов:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$$
$$= (n+1)![n+1+1] - 1 = (n+2)! - 1.$$

Примечание. Так как общий член ряда $n \cdot n!$ можно представить в виде

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!,$$

то данная сумма записывается следующим образом:

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) +$$
$$+ \ldots + [(n+1)! - n!] = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1.$$

584.

$$S_{n+1} = (n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 5n + 6 + 3n(n+1) =$$
$$= S_n + 3n(n+1) + 6,$$

а $3n(n+1) + 6$ делится на 6.

Примечание. Представим $n^3 + 5n$ в виде $n[(n-1)(n+1) + 6]$. Если $n$ делится на 3, то все выражение также делится на 3. При $n$, не делящемся на 3, каждое из слагаемых, стоящих в квадратных скобках, делится на 3 (из трех последовательных целых чисел $n-1$, $n$ и $n+1$ одно делится на 3), поэтому все выражение делится на 3.

Следовательно, при всяком натуральном $n$ $n^3 + 5n$ делится на 3. Это же выражение, очевидно, делится и на 2. Отсюда $n^3 + 5n$ имеет делителем 6 при натуральном $n$.

585.

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1}; \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{8}{4 \cdot 7} = \frac{2}{3 \cdot 2 + 1}.$$

Допустим, что формула верна для $n$ членов:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Докажем, что она верна и для $n+1$ членов:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4};$$

$$\frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)} =$$
$$= \frac{n+1}{3n+4} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}.$$

Примечание. Этот пример можно решить, не пользуясь методом математической индукции:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}.$$

586. Очевидно, что корни данного уравнения принадлежат множеству целых положительных чисел, не меньших 3.

Имеем

$$C_x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ и } C_{x+1}^2 = \frac{(x+1)x}{1 \cdot 2}.$$

Подставим значения $C_x^3$ и $C_{x+1}^2$ в данное равенство

$$\frac{11x(x-1)(x-2)}{3!} = \frac{24(x+1)x}{2!}.$$

Разделив обе части на $\frac{x}{2!}$, получим $(x \neq 0)$

$$\frac{11(x-1)(x-2)}{3} = 24(x+1);$$

$$11x^2 - 105x - 50 = 0,$$

откуда $x_1 = 10$; $x_2 = -\frac{5}{11}$.

Второе решение $x_2 = -\frac{5}{11}$ условию задачи не удовлетворяет, так как число элементов может быть только целым и положительным.

587.

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{n!} +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}(m -$$

$$- n + n) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} = C_m^n.$$

Таким образом,

$$C_{m-1}^n = C_{m-2}^n + C_{m-2}^{n-1};$$

$$C_{m-1}^{n-1} = C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}.$$

Складывая последние два равенства почленно, получим

$$C_m^n = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2},$$

что и требовалось доказать.

588. Находим, что $A_{n+2}^2 = (n+2)(n+1)$.

Тогда

$$\frac{(n+2)(n+1)n!}{(n+1)!} - 2 = n + 2 - 2 = n,$$

что и требовалось доказать.

**589.** $A_x^n = x(x-1)(x-2)\ldots[x-(n-1)]$ и, следовательно,

$$\frac{(x+2)!}{(x-n)![x-(n-1)]\ldots(x-2)(x-1)x} = 132$$

($x_1 = 0$; $x_2 = 1$; ...; $x_n = n$ не рассматриваем);

$$(x+1)(x+2) = 132;$$

$$x^2 + 3x - 130 = 0,$$

откуда $x' = 10$; $x'' = -13$ ($x'' = -13$ не удовлетворяет условию задачи).

Примечание. Как известно, $A_x^n = \frac{P_x}{P_{x-n}}$. Поэтому, подставляя в данное уравнение вместо $A_x^n$ его значение, получим $\frac{P_{x+2}}{P_x} = 132$; $(x+2)(x+1) = 132$, откуда $x = 10$.

**590.** Прежде всего примем к сведению, что областью допустимых значений неизвестного есть целые положительные числа не меньше 4.

Воспользовавшись формулой

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \ldots m},$$

получим уравнение

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x(x-1)} = 1, \qquad (1)$$

или

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

откуда $x_1 = 6$; $x_2 = -1$.

Условию задачи удовлетворяет только решение $x = 6$. Решение $x = -1$ появилось вследствие нарушения эквивалентности при переходе от данного уравнения, решения которого принадлежат множеству целых положительных чисел, больших 4, к уравнению (1), левая часть которого имеет смысл при любых действительных значениях $x$, отличных от 0 и 1.

Из соотношения $C_x^4 = C_x^2$ на основании известного свойства сочетаний также следует, что $x = 4 + 2 = 6$.

**591.** Указание. Показатель степени, с которым 7 входит в число $n!$, равен сумме

$$\left[\frac{n}{7}\right] + \left[\frac{n}{7^2}\right] + \left[\frac{n}{7^3}\right] + \ldots,$$

где каждое слагаемое равно наибольшему целому числу, не превосходящему целой части числа, стоящего в скобках (например, $\left[\frac{30}{7}\right] = 4$.

Примечание. Рассмотрим произведение ряда последовательных натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m = m!$ Пусть $p$ — простое число. Найдем высшую степень числа $p$, являющуюся множителем $m!$. Если $m < p$, то, очевидно, $m!$ не делится на $p$. При $m = p$ множителем $m!$ будет число $p$ в первой степени.

Положим, что $m > p$. В состав произведения $m!$ войдут числа $p$, $2p$, $3p$, ..., $\left[\frac{m}{p}\right] p$, каждое из которых делится на $p$, где $\left[\frac{m}{p}\right]$ — целая часть числа $\frac{m}{p}$, т. е. $\left[\frac{m}{p}\right] p \leqslant m$, но $\left[\left[\frac{m}{p}\right]+1\right] p > m$.

Указанные числа дают произведение

$$p \cdot 2p \cdot 3p \ldots \left[\frac{m}{p}\right] p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \left[\frac{m}{p}\right] p^{\left[\frac{m}{p}\right]}.$$

Таким образом, $m!$ делится на $p^{\left[\frac{m}{p}\right]}$ и, кроме того, на ту степень числа $p$, которая входит в $\left[\frac{m}{p}\right]!$.

Среди множителей $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \left[\frac{m}{p}\right]$ выберем снова те, которые делятся на $p$:

$$p \cdot 2p \ldots \left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right],$$

где $\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right] = \left[\frac{m}{p^2}\right]$ — целая часть числа $\frac{m}{p^2}$.

Поэтому

$$p \cdot 2p \ldots \left[\frac{m}{p^2}\right] p = 1 \cdot 2 \ldots \left[\frac{m}{p^2}\right] \cdot p^{\left[\frac{m}{p^2}\right]}.$$

Продолжая тот процесс отбора множителей, делящихся на $p$, из все время уменьшающихся факториалов, получим, в конце концов, $\left[\frac{m}{p^{k+1}}\right]$, где $\left[\frac{m}{p^{k+1}}\right] < p$.

Таким образом, высшая степень числа $p$, входящая в $m$, будет

$$p^{\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{m}{p^k}\right]},$$

где $p^k \leqslant m$, но $p^{k+1} > m$.

*Отв.* Нет.

**592.** Доказываемое равенство имеет вид

$$1 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^m}{m+1} + \ldots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

и равносильно

$$1 + (n+1) + \frac{n+1}{2} C_n^1 + \frac{n+1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{n+1}{m+1} C_n^m + \\ + \ldots + \frac{n+1}{n} C_n^{n-1} + 1 = 2^{n+1}.$$

Поскольку

$$\frac{n+1}{m+1}C_n^m = \frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} = C_{n+1}^{m+1},$$

то левая часть этого равенства будет равна

$$1 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{m+1} + \ldots + C_{n+1}^n + 1 = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

**593.** Обозначим искомое число участников турнира через $x$. Со всеми участниками сыграли лишь $x - 2$ шахматиста (двое выбыли). Число этих партий

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

вместе с шестью партиями, сыгранными двумя выбывшими участниками, составляет 84 партии:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 6 = 84;$$

$$x^2 - 5x - 150 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, находим $x = 15$. Отрицательное значение не учитываем по тем же соображениям, что и в примере 586.

**594.** *Отв.* 24.

**595.** *Отв.* $C_{32}^{16}C_4^2$.

**596.** Если не нарушается порядок размещения людей, сидящих у стола, несмотря на их перемещения вокруг него, то можно считать все такие перемещения одинаковыми. Под порядком размещения нужно понимать определенное чередование лиц в одном или другом направлении (по движению часовой стрелки или против), причем само направление значения не имеет. Тогда из $P_6$ возможных перестановок людей вокруг стола не все будут различны, а именно: каждой перестановке будет соответствовать 12 одинаковых $(6 \cdot 2)$. Поэтому различных способов, которыми можно разместить 6 человек вокруг стола, будет

$$\frac{P_6}{12} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{12} = 60.$$

**597.** *Отв.* 7 слонов; 16 способами.

**598.** Поскольку произведения должны отличаться только цифрами и не зависят от их порядка, то количество этих произведений

$$C_6^4 = C_6^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15.$$

**599.** По условию задачи

$$C_m^2 - C_m^1 = 35, \qquad (1)$$

или

$$m^2 - 3m - 70 = 0,$$

откуда $m = 10$.

Решение $m = -7$ уравнению (1) не удовлетворяет.

Принимая во внимание, что

$$\left(a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{10} = (a^{\frac{4}{3}} + a^{-\frac{1}{2}})^{10},$$

искомый член биномиального разложения запишем в виде

$$T_{x+1} = C_{10}^{x}(a^{\frac{4}{3}})^{10-x}(a^{-\frac{1}{2}})^{x}.$$

Тогда по условию

$$(a^{\frac{4}{3}})^{10-x}(a^{-\frac{1}{2}})^{x} = a^{6},$$

откуда $x = 4$.

Следовательно, искомый член биномиального разложения

$$T_5 = 210a^6.$$

**600.** Пусть искомый член разложения

$$T_{x+1} = C_7^x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{7-x}(\sqrt{a})^{x}.$$

Тогда получим уравнение

$$(a^{-\frac{1}{3}})^{7-x}(a^{\frac{1}{2}})^{x} = a,$$

откуда $x = 4$.

Таким образом,

$$T_5 = C_7^4 a = 35a.$$

**601.** Если искомый член разложения

$$T_{m+1} = C_8^m(\sqrt{x})^{8-m}\left(\frac{-3}{\sqrt{x}}\right)^{m} = (-1)^m C_8^m \cdot 3^m(\sqrt{x})^{8-m}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{m},$$

то по условию

$$(\sqrt{x})^{8-m}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{m} = x^{0}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}(8-m) - \frac{1}{2}m = 0,$$

откуда $m = 4$.

Таким образом, искомый член разложения

$$T_5 = C_8^4 \cdot 3^4 = 5670.$$

**602.** Пусть данный член разложения будет

$$T_{x+1} = C_n^x a^{n-x} \cdot 5^x.$$

Тогда по условию

$$C_n^x = 1365;$$

$$C_n^x \cdot 5^x = 853\,125,$$

откуда получаем, что $x = 4$, т. е. $p = 5$.

Для отыскания $n$ воспользуемся первым уравнением, записав его в виде $n(n-1)(n-2)(n-3) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Одно из четырех последовательных целых чисел, произведение которых стоит в левой части этого уравнения, есть 13. Если одно из чисел равно хотя бы $13 \cdot 2 = 26$, то произведение всей последовательности чисел значительно превысит произведение чисел, стоящих в правой части уравнения.

Принимая во внимание, что ни число 11, ни число 16 не могут быть множителями левой части рассматриваемого уравнения, приходим к выводу, что

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Таким образом, $n = 15$.

**603.** Принимая во внимание, что $C_x^{x-2} = C_x^2$, запишем данное уравнение в виде

$$(x-2)(x-3) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 101$$

или

$$3x^2 - 11x - 190 = 0,$$

откуда $x_1 = 10$; $x_2 = -\frac{19}{3}$.

Данному уравнению $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$ удовлетворяет только решение $x_1 = 10$, так как при $x_2 = -\frac{19}{3}$ его левая часть теряет смысл.

**604.** *Отв.* $T_{13} = 6188$.

**605.** Если рассмотреть разложение, равное данному,

$$-\left(\frac{1}{x} - x\right)^{2n+1},$$

то искомый член в нем $(p+2)$-й от начала. Следовательно,

$$T_{p+2} = -C_{2n+1}^{p+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-p} x^{p+1} (-1)^{p+1},$$

или

$$T_{p+2} = (-1)^p \frac{(2n+1)\,2n \ldots (2n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+1)} x^{2(p-n)+1}.$$

**606.** 1-й способ решения. Очевидно, что допустимыми значениями для неизвестного $x$ будут целые положительные числа $\geqslant 10$.

Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-9)+x(x-1)(x-2)\ldots(x-8)}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-7)}=9.$$

Принимая во внимание, что $x \geqslant 10$ и сокращая на

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-7),$$

получим

$$x^2-16x+55=0,$$

откуда

$$x_1=11; \quad x_2=5.$$

Уравнению $\frac{A_x^{10}+A_x^9}{A_x^8}=9$ удовлетворяет только решение $x_1=11$.

2-й способ решения. Очень удобно воспользоваться рекуррентной формулой

$$A_n^k=A_n^{k-1}[n-(k-1)]:$$

$$\frac{A_x^9(x-9)+A_x^9}{A_x^8}=9; \qquad \frac{A_x^8(x-8)(x-9+1)}{A_x^8}=9;$$

$$(x-8)^2=9,$$

откуда $x-8=\pm 3$, следовательно, $x_1=11$; $x_2=5$.

*Отв.* $x=11$.

**607.**

$$C_{x+8}^{x+3}=C_{x+8}^5=\frac{(x+8)(x+7)(x+6)(x+5)(x+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};$$

$$A_{x+6}^3=(x+6)(x+5)(x+4).$$

Тогда

$$\frac{(x+8)(x+7)(x+6)(x+5)(x+4)}{120}=5(x+6)(x+5)(x+4);$$

$$(x+6)(x+5)(x+4)[(x+8)(x+7)-600]=0;$$

$$x_1=-6; \quad x_2=-5; \quad x_3=-4.$$

$$(x+8)(x+7)-600=0,$$

или

$$x^2+15x-544=0.$$

откуда $x_4=17$; $x_5=-32$.

Все отрицательные значения отпадают, так как $x+8 \geqslant 5$ или $x \geqslant -3$.

*Отв.* $x=17$.

608. Прежде всего отметим, что $x > 0$.

По условию задачи

$$T_3 = C_5^2 (x^{\lg x})^3 x^2 = 100$$

или

$$x^{3 \lg x + 2} = 10,$$

откуда, логарифмируя, получаем

$$(3 \lg x + 2) \lg x = 1;$$

$$3 \lg^2 x + 2 \lg x - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\lg x_1 = -1; \quad \lg x_2 = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$x_1 = 10^{-1} = \frac{1}{10}; \quad x_2 = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}.$$

Проверкой устанавливаем, что оба решения удовлетворяют условию данной задачи.

**609.** Числа $a_1$; $a_3$; $a_5$, которые являются соответственно первым, третьим и пятым членами арифметической прогрессии, сами образуют арифметическую прогрессию, так что $2a_3 = a_1 + a_5$. По условию $a_1 = C_m^1$; $a_3 = C_m^2$; $a_5 = C_m^3$, следовательно,

$$\frac{2m(m-1)}{1 \cdot 2} = m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \qquad (1)$$

Сократив равенство (1) на $m \neq 0$, получим уравнение

$$m^2 - 9m + 14 = 0,$$

откуда $m_1 = 7$; $m_2 = 2$. Решение $m_2 = 2$ не рассматриваем, так как по условию задачи $m \geqslant 5$.

Таким образом, получаем бином

$$[2^{\frac{1}{2}\lg(10-3^x)} + 2^{\frac{x-2}{5}\lg 3}]^7.$$

Но по условию $T_6 = 21$, или

$$C_7^5 2^{(x-2)\lg 3} 2^{\lg(10-3^x)} = 21,$$

откуда

$$2^{(x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x)} = 1 = 2^0;$$

$$(x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x) = 0.$$

Потенцируя последнее равенство, находим

$$3^{x-2}(10-3^x) = 1; \quad \frac{3^x}{3^2}(10-3^x) = 1,$$

откуда $x_1 = 2$; $x_2 = 0$.

**610.** В разложении $(1+\sqrt{2})^{50}$ общий член будет равен

$$T_{n+1}=C_{50}^{n}(\sqrt{2})^{n}.$$

Биномиальный коэффициент $C_{50}^{n}$ растет с возрастанием $n$ до 26, а затем убывает. Множитель $(\sqrt{2})^{n}$ все время растет с возрастанием $n$. Следовательно, пока $n$ растет от 0 до 26, растет и величина члена разложения. Когда $n$ станет больше 26, то биномиальный коэффициент $C_{50}^{n}$ станет убывать, и хотя $(\sqrt{2})^{n}$ продолжает возрастать, непосредственно не видно, будет ли общий член $T_{n+1}$ возрастать или убывать. Чтобы это выяснить, исследуем отношение $n+1$-го члена разложения к $n$-му, т. е.

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{C_{50}^{n}(\sqrt{2})^{n}}{C_{50}^{n-1}(\sqrt{2})^{n-1}}=\frac{C_{50}^{n}}{C_{50}^{n-1}}\sqrt{2}=\frac{51-n}{n}\sqrt{2}.$$

Решаем неравенства:

$$\frac{51-n}{n}\sqrt{2}<1;\quad \frac{51}{n}-1<\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \frac{51}{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{51}{n}<\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}};$$

$$n>\frac{51\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{51\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2-1}=51(2-\sqrt{2}).$$

Итак, если $n>51(2-\sqrt{2})$, то отношение $\frac{T_{n+1}}{T_n}$ станет и будет оставаться меньше единицы. Найдем наименьшее целое число, большее числа $51(2-\sqrt{2})$. Возьмем значение $\sqrt{2}$ по недостатку и по избытку с точностью до одной тысячной:

1) $\sqrt{2}=1{,}414$; $2-\sqrt{2}=2-1{,}414=0{,}586$; $51(2-\sqrt{2})=29{,}886$;

2) $\sqrt{2}=1{,}415$; $2-\sqrt{2}=2-1{,}415=0{,}585$; $51(2-\sqrt{2})=29{,}885$.

Сопоставляя числа 29,885 и 29,886, видим, что в числе $51(2-\sqrt{2})$ содержится 29 целых и еще правильная дробь. Значит, наименьшее целое число, которое больше числа $51(2-\sqrt{2})$, есть 30. Следовательно, начиная с $n=30$, отношение $\frac{T_{n+1}}{T_n}$ становится меньше единицы и значит $T_{30+1}<T_{30}$. При значениях $n<30$ отношение $\frac{T_{n+1}}{T_n}>1$.

Это означает, что $T_{30} > T_{29} > T_{28}\ldots$, т. е. наибольший член разложения есть

$$T_{30} = C_{50}^{29}\left(\sqrt{2}\right)^{29} = C_{50}^{21}\left(\sqrt{2}\right)^{29}.$$

**611.** По условию задачи $C_m^2 = 66$, откуда $m = 12$. Таким образом, в данном разложении будет 13 членов и средним будет седьмой. Следовательно,

$$T_7 = C_{12}^6\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{a}\right)^6 (ax^{-\frac{3}{4}})^6(-1)^6;$$

$$T_7 = \frac{924}{x^4}.$$

**612.** Рассмотрим отношение коэффициентов членов данных разложений, которые содержат букву $x$ в степени $n$:

$$\frac{C_{2n}^n}{C_{2n-1}^n} = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)\cdot 1\cdot 2\ldots n}{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)n\cdot 1\cdot 2\ldots n} = 2.$$

**613.** *Отв.* $T_3 = C_4^2\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = 6\sqrt[3]{x}.$

**614.** *Отв.* $T_3 = C_5^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^2 = 60.$

**615.** Указание. По условию

$$\lg(3\cdot C_m^3) - \lg C_m^1 = 1.$$

После соответствующих преобразований получаем уравнение

$$m^2 - 3m - 18 = 0,$$

откуда $m_1 = 6$; $m_2 = -3$.

Таким образом, мы нашли показатель бинома $m = 6$.

По условию $9T_3 - T_5 = 240$, откуда

$$9C_6^2 2^{2\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)} 2^{4\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)} - C_6^4 2^{4\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)}\cdot 2^{2\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = 240.$$

После соответствующих преобразований находим, что $x = 2$.

**616.** Определим, сколько рублей было уплачено двум бригадам. Согласно условию задачи эта сумма равна коэффициенту того члена разложения, который содержит $x^4$.

Пусть

$$T_{n+1} = C_{13}^n(x^{-\frac{2}{3}})^{13-n}(x^{\frac{3}{5}})^n = C_{13}^n x^4,$$

отсюда

$$x^{\frac{3}{5}n+\left(-\frac{2}{3}\right)(13-n)} = x^4;$$

$$\frac{3}{5}n + \left(-\frac{2}{3}\right)(13-n) = 4;$$

$$9n - 130 + 10n = 60; \quad 19n = 190;$$

$$n = 10.$$

Тогда $C_{13}^{10} = C_{13}^{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286$. Таким образом, число рублей, полученных двумя бригадами, равно 286.

Для определения числа рублей, полученных каждым рабочим первой бригады, необходимо найти число $n$ членов арифметической прогрессии, у которой $S_n = 462$; $a_6 = 27$; $a_{10} = 43$.

Сперва определим первый член $a$ и разность $d$ прогрессии из уравнений

$$\begin{cases} a_6 = a + 5d; \\ a_{10} = a + 9d \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 27 = a + 5d; \\ 43 = a + 9d. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим, что $d = 4$. Подставив значение $d$ в первое уравнение данной системы, получим $a = 7$.

Для определения числа членов арифметической прогрессии, у которой $S_n = 462$; $a = 7$; $d = 4$, воспользуемся уравнением

$$S_n = \frac{2a + d(n-1)}{2} n;$$

$$462 = \frac{14 + 4(n-1)}{2} n;$$

$$2n^2 + 5n - 462 = 0,$$

откуда $n_1 = 14$; $n_2 = -\frac{33}{2}$.

Второй корень непригоден, так как число членов арифметической прогрессии должно быть целым и положительным. Таким образом, каждый рабочий первой бригады получил по 14 руб.

Для определения числа рублей, полученных каждым рабочим второй бригады, найдем корень уравнения

$$\lg 10 + \frac{1}{3} \lg (3^{2\sqrt{x}} + 271) = 2.$$

Решая это уравнение, получим $x = 9$. Таким образом, каждый рабочий второй бригады получил по 9 руб.

Обозначим через $y$ число рабочих второй бригады, тогда в первой бригаде было $(y + 4)$ рабочих. Составим уравнение

$$9y + (y + 4)\,14 = 286,$$

откуда $y = 10$.

Следовательно, во второй бригаде было 10 человек, а в первой $10 + 4 = 14$ человек.

## Комплексные числа

**617.** Запишем данное выражение в виде

$$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}.$$

По формуле Муавра

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right).$$

Пусть $k=0$, тогда

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Применяя формулы $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, получим

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

Пусть $k=1$, тогда

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi+i\sin\frac{9}{8}\pi\right).$$

После соответствующих преобразований получим

$$-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

**618.** Указание. Этот пример решается так же, как и пример 617, с той только разницей, что $k$ можно давать три значения: 0; 1; 2.

**619.** 1-й способ решения.

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{50}=i^{50}=i^{48}\cdot i^2=-1.$$

2-й способ решения.

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)^{100}=(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)^{25}=-1.$$

**620.** 1-й способ решения.

$$\left[\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^{20}=\left(\frac{+8}{8}\right)^{20}=1.$$

2-й способ решения.

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^{60}=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ=1.$$

**621.** Модуль $i$ равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$.

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},$$

где $k=0;\ 1;\ 2$.

Таким образом, получим три значения:

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2};$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

**622.**

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}=\frac{(1+i)^5}{-2(1+i)}=-\frac{1}{2}(1+i)^4=-\frac{1}{2}(1+i)^2(1+i)^2=$$

$$=-\frac{1}{2}2i\cdot 2i=2.$$

**623.**

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=-1;\quad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=-1.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}=(-1)^{20}+(-1)^{10}=2.$$

**624.** *Отв.*

$$-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2};\quad -1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi;\quad S=\frac{1}{2}.$$

**625.** По определению равенства двух комплексных чисел

$$(x+y)^2+6=5(x+y);$$

$$x=y+1.$$

Из первого уравнения получаем

$$x+y=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

Следовательно, нужно решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=3; \\ x-y=1; \end{cases}\qquad \begin{cases} x+y=2; \\ x-y=1. \end{cases}$$

Первая система имеет решения

$$x_1=2;\quad y_1=1,$$

а вторая

$$x_2=\frac{3}{2};\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Оба решения удовлетворяют исходному соотношению.

**626.** Пусть $z = \sqrt[8]{1}$. Единицу можно представить так:

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi.$$

Тогда

$$z = \sqrt[8]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8},$$

где $k = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$.

Следовательно, имеем восемь значений:

$$z_1 = 1; \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad z_3 = i; \quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_5 = -1; \quad z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad z_7 = -i; \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Примечание. Решение двучленного уравнения $z^8 = 1$ равнозначно отысканию восьми значений корня из единицы. Если в плоскости комплексных чисел начертим окружность радиусом $|z| = 1$ и разделим ее на восемь равных частей диаметрами, причем начальная точка деления должна соответствовать числу 1, то числа, соответствующие всем точкам деления, дадут значение корня восьмой степени из единицы.

**627.** Если уравнение с действительными коэффициентами имеет корень $x = 1 + i$, то ему удовлетворяет также и $x = 1 - i$. Следовательно, многочлен, стоящий в левой части уравнения, делится на множитель

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2.$$

Приравнивая нулю частное от деления, получим уравнение

$$3x^2 + x - 1 = 0,$$

имеющее корни

$$x = \frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{13}).$$

Таким образом, исходное уравнение четвертой степени имеет такие корни:

$$x_1 = 1 + i; \quad x_2 = 1 - i; \quad x_3 = \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13}); \quad x_4 = \frac{1}{6}(-1 - \sqrt{13}).$$

**628.** (Доказательство В. Б. Лидского и др.). Докажем, что для представления комплексного числа $a + bi$ в виде

$$a + bi = \frac{1 - ix}{1 + ix} \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы $|a + bi| = 1$ и $a + ib \neq -1$.

Докажем необходимость. Пусть выполняется равенство (1). Тогда

$$|a + bi| = \frac{|1 - ix|}{|1 + ix|} = 1,$$

так как

$$|1-ix|=|1+ix|=\sqrt{1+x^2};$$

$$\frac{1-ix}{1+ix}\neq -1,$$

ибо в противном случае мы бы имели $1-ix=-1-ix$, т. е. $2=0$.

Докажем достаточность. Пусть

$$|a+bi|=1 \quad \text{и} \quad a+ib\neq -1.$$

Положим $\arg(a+bi)=\alpha$, где $-\pi<\alpha<\pi$. Заметим, что $\alpha\neq\pi$ в силу условия $a+ib\neq -1$. Имеем теперь

$$a+bi=|a+bi|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha. \qquad (2)$$

Но

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Подставляя эти выражения в правую часть формулы (2), получим

$$a+bi=\frac{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-ix}{1+ix},$$

где $x=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Примечание. Докажем другим способом достаточность условий, не прибегая к тригонометрической форме комплексного числа.

Пусть $a^2+b^2=1$ и $a\neq -1$, тогда

$$a+ib=a+i\sqrt{1-a^2}=\frac{2a+2i\sqrt{1-a^2}}{2}=$$

$$=\frac{a+1+2i\sqrt{1-a^2}-1+a}{2}=\frac{(\sqrt{a+1}+i\sqrt{1-a})^2}{2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a+1}+i\sqrt{1-a})(\sqrt{a+1}+i\sqrt{1-a})(\sqrt{a+1}-i\sqrt{1-a})}{2(\sqrt{a+1}-i\sqrt{1-a})}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+1}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}-i\sqrt{1-a}}=\frac{1+i\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}}{1-i\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}} \quad (a\neq -1).$$

Полагая $x = -\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$, окончательно получим

$$a + bi = \frac{1 - ix}{1 + ix}.$$

**629.** Представим второе равенство в следующем виде:

$$x^2 + 1 = 2x\cos\varphi;$$

$$x^2 - 2x\cos\varphi + 1 = 0,$$

откуда $x = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.

По формуле Муавра

$$x^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi} = \cos n\varphi \mp \sin n\varphi.$$

Складывая почленно два последних соотношения, находим искомый результат.

**630.**

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\cos kx + i\sin kx}{\cos(k-1)x + i\sin(k-1)x} =$$

$$= \frac{(\cos kx + i\sin kx)[\cos(k-1)x - i\sin(k-1)x]}{\cos^2(k-1)x + \sin^2(k-1)x} =$$

$$= \cos kx\cos(k-1)x + \sin kx\sin(k-1)x +$$

$$+ i[\sin kx\cos(k-1)x - \cos kx\sin(k-1)x] =$$

$$\cos x + i\sin x.$$

Таким образом, мы получили последовательность, представляющую собой геометрическую прогрессию.

Определим сумму этой прогрессии:

$$S_n = \frac{(\cos nx + i\sin nx)(\cos x + i\sin x) - (\cos x + i\sin x)}{\cos x + i\sin x - 1} =$$

$$= \frac{[(\cos nx + i\sin nx)(\cos x + i\sin x) - (\cos x + i\sin x)](\cos x - 1 - i\sin x)}{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} =$$

$$= \frac{\cos nx - 1 - \cos(n+1)x + \cos x + i[\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x]}{4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + i\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

откуда

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

**631.**

$$(x + iy)^2 = a + bi;$$
$$x^2 - y^2 + 2ixy = a + bi;$$
$$a = x^2 - y^2; \quad b = 2xy.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a; \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Решив ее, найдем

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Примечание. Из данного примера можно получить такую формулу:

$$\sqrt{a + bi} = \mp \left( \sqrt{\frac{M + a}{2}} + \sqrt{\frac{M - a}{2}}\, i \right),$$

где $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль данного комплексного числа. Если под корнем будет $a - bi$, то в скобках вместо знака «+» необходимо брать знак «—».

**632.**

$$\frac{a + bi}{a - bi} + \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a + bi)^2 + (a - bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 + a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 2\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

**633.**

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1; \quad x^2 + y^2 \leqslant 1;$$

очевидно, что это будет круг, радиус которого равен единице.

**634.**

$$x = \frac{(3 - 2i) \pm \sqrt{(3 - 2i)^2 - (6 - i)}}{6 - i} = \frac{(3 - 2i) \pm \sqrt{9 - 12i - 4 - 6 + i}}{6 - i} =$$

$$= \frac{(3 - 2i) \pm \sqrt{-1 - 11i}}{6 - i}.$$

По формуле (см. решение предыдущего примера)

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right]$$

имеем

$$\sqrt{-1-11i} = \sqrt{\frac{\sqrt{122}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{122}+1}{2}}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{(3-2i) \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{122}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{122}+1}{2}}\right)}{6-i} =$$

$$= \frac{(6+i)\left[(3-2i) \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{122}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{122}+1}{2}}\right)\right]}{37},$$

откуда

$$x_1 = \frac{(6+i)\left[3+\sqrt{\frac{\sqrt{122}-1}{2}} - i\left(2+\sqrt{\frac{\sqrt{122}+1}{2}}\right)\right]}{37};$$

$$x_2 = \frac{(6+i)\left[3-\sqrt{\frac{\sqrt{122}-1}{2}} - i\left(2-\sqrt{\frac{\sqrt{122}+1}{2}}\right)\right]}{37}.$$

**635.** Запишем данное равенство в виде

$$x-2+i(y-3) = 4-2i.$$

В соответствии с определением равенства двух комплексных чисел будем иметь

$$x-2=4; \quad x=6;$$
$$y-3=-2; \quad y=1.$$

**636.** Рассмотрим выражение

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4.$$

С одной стороны,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi,$$

с другой

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi.$$

Приравняем действительные и мнимые части:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi;$$
$$\sin 4\varphi = 4\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

**637.** Решая уравнение

$$(m+2)x^2 - 2mx + m - 1 = 0,$$

получим

$$x = \frac{m^2 \pm \sqrt{2-m}}{m+2}.$$

Чтобы корни были мнимыми, должно выполняться условие

$$2 - m < 0,$$

т. е.

$$m > 2.$$

Примечание. Корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами будут комплексными в том случае, если дискриминант уравнения отрицательный, т. е.

$$4m^2 - 4(m+2)(m-1) < 0; \quad 2 - m < 0; \quad m < 2.$$

**638.** Пусть $x = \alpha + \beta i$; $y = \eta + \xi i$. Тогда

$$x + y = \alpha + \eta + (\beta + \xi) i;$$
$$x - y = \alpha - \eta + (\beta - \xi) i.$$

Таким образом, левую часть доказываемого равенства можно записать в виде

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = (\alpha+\eta)^2 + (\beta+\xi)^2 + (\alpha-\eta)^2 + (\beta-\xi)^2 =$$
$$= 2(\alpha^2+\beta)^2 + 2(\eta^2+\xi^2) = 2[|x|^2 + |y|^2].$$

*РАЗДЕЛ III*

# ГЕОМЕТРИЯ

## Планиметрия

**639.** 1-й способ решения.

1. Данный $\triangle ABC$ остроугольный (рис. 22). Из точек $L$ и $M$ середин сторон $AC$ и $BC$ опустим перпендикуляры $LL_1$ и $MM_1$ на основание $AB$.

Разрезав треугольник $ABC$ вдоль $LL_1$ и $MM_1$ и повернув треугольники $ALL_1$ и $MM_1B$ вокруг точек $L$ и $M$ на 180°, получим прямоугольник.

Принимая за основание стороны $AC$ и $BC$, получим еще два решения.

2. Данный $\triangle ABC$ прямоугольный. Указанный способ решения возможен, когда за основание принимается гипотенуза. Если в качестве оснований принимать катеты, то для получения прямоугольника достаточно разрезать треугольник на две части.

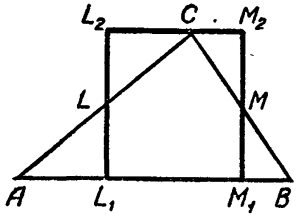



Рис. 22.

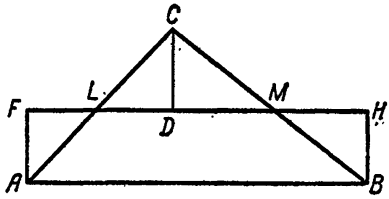



Рис. 23.

3. Данный $\triangle ABC$ тупоугольный. Указанный способ решения возможен, если за основание принимается сторона, лежащая против тупого угла.

2-й способ решения. Через середины двух сторон данного треугольника $ABC$ проводим среднюю линию $LM$ треугольника (рис. 23), а из вершины $C$ опускаем на нее перпендикуляр $CD$. Образованные при вершине $C$ прямоугольные треугольники $CLD$ и $CDM$ отрезаем и поворачиваем на 180° вокруг точек $L$ и $M$. Полученный прямоугольник $AFHB$ искомый.

Разрез возможен, если перпендикуляр из соответствующей вершины на среднюю линию данного треугольника лежит внутри треугольника или совпадает с его стороной, не возможен — когда он находится вне треугольника.

**640.** 1-й способ решения. Построим на гипотенузе $AB$ как на диаметре окружность (рис. 24).

Так как $\angle C=\angle P=90°$, то $P$ и $C$ лежат на одной окружности; $\angle CPA=\angle CBA$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Отсюда следует, что $\triangle PDC \sim \triangle ABC$.

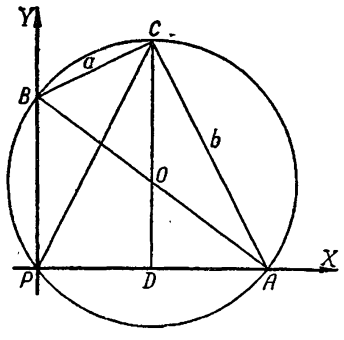



Рис. 24.

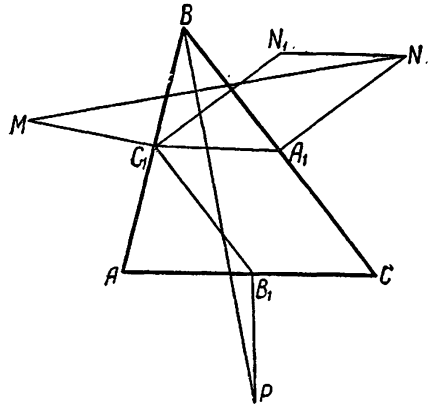



Рис. 25.

Из подобия следует, что $\frac{CD}{PD}=\frac{b}{a}$. Следовательно, если точки $D$ и $C$ лежат по разные стороны гипотенузы $AB$, то искомое геометрическое место точек есть отрезок прямой $y=\frac{b}{a}x$, проходящей через начало координат.

2-й способ решения. Пусть координаты точки $C$ будут $x$, $y$. Так как $\angle CBA=\angle CPA$, то их тангенсы равны и $\operatorname{tg}(CPA)=\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, откуда $y=\frac{b}{a}x$.

*Отв.* Отрезок прямой $PC$.

**641.** Пусть $ABC$ — искомый треугольник; $M$, $N$ и $P$ (рис. 25) — заданные центры квадратов; $A_1$, $B_1$ и $C_1$ — середины сторон треугольника $ABC$. Соединим $M$ с $N$, $P$ с $B$, $C_1$ с $A_1$, $C_1$ с $B_1$ и $M$ с $C_1$. Затем проведем отрезок $C_1N_1$, равный и параллельный отрезку $A_1N$, и точку $N_1$ соединим с $N$. Тогда $MC_1=BC_1$; $C_1N_1=CA_1$, так как оба равны $\frac{1}{2}BC$; $N_1N=B_1P$, так как оба равны $\frac{1}{2}AC$; $\angle MC_1N_1=\angle BC_1B_1$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами; $\angle C_1N_1N=\angle C_1B_1P$ на том же основании.

Отсюда следует, что ломаные $MC_1N_1N$ и $BC_1B_1P$ совместимы одна с другой (конгруентны) и, значит, $MN=PB$, а так как $MC_1 \perp BC_1$,

то эти ломаные повернуты одна относительно другой на 90°, откуда следует, что $MN \perp BP$.

Примечание. Если рассматривать отрезки ломаных как вектора, т. е. считать, что ломаная $BC_1B_1PB$ состоит из векторов $\vec{BC_1}$, $\vec{C_1B_1}$, $\vec{B_1P}$ и $\vec{PB}$, а ломаная $MC_1N_1NM$ — из векторов $\vec{MC_1}$, $\vec{C_1N_1}$, $\vec{N_1N}$ и $\vec{NM}$, то при повороте ломаной $MC_1N_1NM$ по часовой стрелке вокруг точки $C_1$ на 90° она совместится с $BC_1B_1PB$ так, что векторы $\vec{MC_1}$ и $\vec{BC_1}$; $\vec{C_1N_1}$ и $\vec{C_1B_1}$; $\vec{N_1N}$ и $\vec{B_1P}$; $\vec{NM}$ и $\vec{PB}$ совместятся как по длине, так и по направлению.

Отсюда построение: соединяем точки $M$ и $N$, опускаем из $P$ перпендикуляр на $MN$ и откладываем $BP = MN$. Получаем вершину $B$ искомого треугольника. Таким же способом находим и остальные вершины.

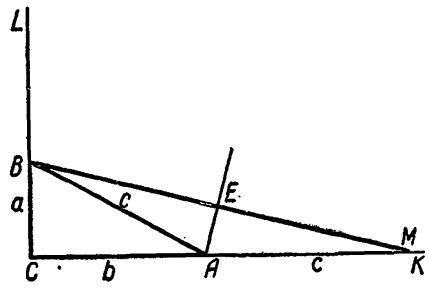



Рис. 26.

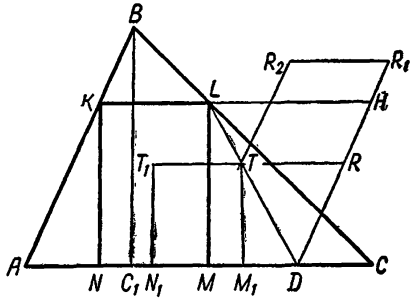



Рис. 27.

**642.** Анализ. Пусть прямоугольный треугольник $ABC$, один из катетов которого $a$, а сумма второго катета и гипотенузы $b + c$, построен (рис. 26).

На продолжении катета $b$ от вершины $C$ отложим отрезок $CM$ длины $b + c$. Соединив точки $B$ и $M$, получим треугольник $ABM$. Этот треугольник равнобедренный, так как $AB$ равно $AM$. Поэтому точка $A$ равноудалена от точек $B$ и $M$.

Построение. Строим прямой угол $LCK$. От вершины $C$ на сторонах угла откладываем соответственно отрезки $CB = a$ и $CM = c + b$. Соединив $B$ и $M$, получим $\triangle BCM$.

Проводим к отрезку $BM$ через его середину $E$ перпендикуляр $EA$. Точку пересечения последнего с отрезком $CM$ (точку $A$) соединяем с точкой $B$. Треугольник $ABC$ — искомый.

Доказательство. Действительно, точка $A$, принадлежащая $AE$, равноудалена от $B$ и $M$, а поэтому $AB = AM$. Но $CA$ и $CB$ — катеты прямоугольного треугольника, причем $BC = a$. Так как $CA + AM = b + c$, а $AM = AB$, то и $CA + AB = b + c$. Следовательно, треугольник $ABC$ — искомый.

Исследование. Чтобы построение треугольника $ABC$ было возможно, необходимо соблюдение условия $a < b + c$.

**643.** Анализ. Пусть в остроугольный треугольник $ABC$ (рис. 27) вписан прямоугольник $KLMN$ данного периметра $2p$ и $\angle A \neq 45°$. Отложим на стороне $AC$ отрезок $AD$, равный полупери-

метру прямоугольника, и через точку $D$ проведем прямую $DR$, параллельную стороне $AB$, а $KL$ продолжим до пересечения с $DR$ в точке $H$. Легко заметить, что

$$LM = LH,$$

ибо

$$LK + ML = KL + LH = p.$$

Поэтому $L$ является точкой пересечения стороны $BC$ с геометрическим местом точек, перпендикуляры из которых, опущенные на $AC$, равны отрезкам прямых, проведенных из этих же точек параллельно $AC$ до пересечения с $DR$.

Построение. Отложим на стороне $AC$ (или на ее продолжении) отрезок $AD = p$ и проведем прямую $DR \parallel AB$. Из произвольной точки $N_1$ прямой $AC$ восставим перпендикуляр $N_1T_1$, отложим на нем отрезок $T_1N_1$ произвольной длины и проведем прямую $T_1R \parallel AC$. Такой же длины отрезок, параллельный $AC$, отложим от произвольной точки $R_1$ прямой $DR$ и через его конец $R_2$ проведем прямую $R_2T$ параллельно $DR$. Точку $T$ пересечения прямых $TR_2$ и $T_1T$ соединим с $D$. $DT$ — указанное в анализе геометрическое место. Точка $L$ пересечения прямых $BC$ и $DT$ — одна из вершин искомого прямоугольника. Дальнейшее построение очевидно.

Доказательство.

$$\Delta TM_1D \sim \Delta LMD,$$

поэтому

$$\frac{TM_1}{LM} = \frac{TD}{LD};$$

$$\Delta TDR \sim \Delta LHD,$$

следовательно,

$$\frac{TR}{LH} = \frac{TD}{LD}.$$

Отсюда

$$LM = LH \text{ (ибо } TM_1 = TR)$$

и

$$KL + LM = KL + LH = p.$$

Доказательство, что $KLMN$ — прямоугольник, вписанный в данный треугольник, очевидно.

Исследование. Обозначим $KL = x$, $AC = a$ и $BC_1 = h$. Из подобия треугольников $ABC$ и $KBL$ находим

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h - (p - x)}$$

или

$$x = \frac{a(p - h)}{a - h}.$$

Принимая во внимание, что $0 < x < a$, получаем системы неравенств

$$\begin{cases} p > h; \\ a > h; \\ p < a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} p < h; \\ a < h; \\ p > a. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы в данный треугольник $ABC$ можно было вписать прямоугольник заданного периметра $2p$, одна из сторон которого параллельна $AC$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) каждый из углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ должен быть не больше 90°;

2) при $h < a$ $p$ должно удовлетворять неравенствам

$$h < p < a,$$

при $a < h$ — неравенствам

$$a < p < h,$$

при $h = a$ — равенствам

$$a = p = h.$$

При $h \neq a$ задача имеет единственное решение, при $h = a = p$ каждая точка прямой $BC$ может служить вершиной искомого прямоугольника ($BC$ — указанное выше геометрическое место), и, следовательно, решений будет бесконечное множество.

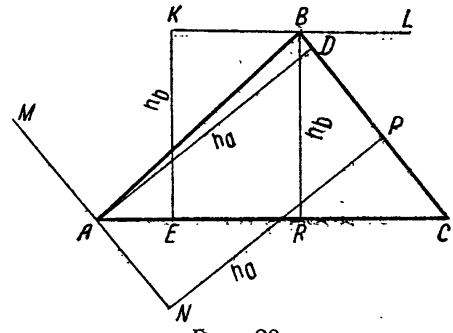


Рис. 28.

**644.** Анализ. Предположим, что треугольник $ABC$ (рис. 28) построен. $BR$, $AD$, $\angle BCA$ — данные высоты и угол.

Если из какой-либо точки $E$ стороны $AC$ восставим перпендикуляр и отложим на нем отрезок $EK$, равный $h_b$, то вершина $B$ треугольника $ABC$ является точкой пересечения стороны угла $ACB$ (стороны $BC$) с прямой $KL$, проведенной через точку $K$ параллельно $AC$.

Аналогично вершина $A$ служит точкой пересечения стороны $AC$ с прямой $NM$, проведенной параллельно $CB$ через конец отрезка перпендикуляра $NP$ (точку $N$), восставленного к $CB$ из произвольной ее точки $P$, причем длина отрезка $NP$ равна $h_a$.

Построение. Из произвольной точки $P$ стороны $BC$ и произвольной точки $E$ стороны $AC$ угла $BCA$ восставим перпендикуляры к этим сторонам, отложим на них отрезки, равные $h_a$ и $h_b$; через концы этих отрезков проведем прямые, параллельные сторонам угла, до пересечения с этими сторонами в точках $B$ и $A$. Треугольник $ABC$ и будет искомый.

**645.** Анализ. Предположим, что треугольник $ABC$ построен (рис. 29). Известно, что $BC + AC = s$, $AB = c$, $BD = h_b$.

Продолжим сторону $AC$ на отрезок $CK = BC$. Точка $C$ лежит на пересечении прямой $AK$ с перпендикуляром, проведенным через середину $BK$.

Построение. Отложим отрезок $AK$, равный $s$. Из произвольной точки $F$ прямой $KA$ восставим перпендикуляр и отложим на нем отрезок $FP = h_b$. Через точку $P$ проведем прямую $MN$ параллельно $KA$. Из точки $A$ радиусом, равным $c$, проведем дугу и найдем точку пересечения ее с прямой $MN$ (точка $B$). Разделим отре-

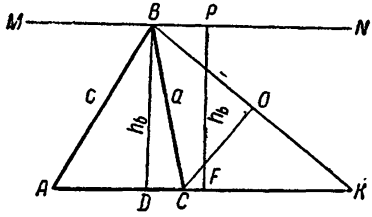



Рис. 29.

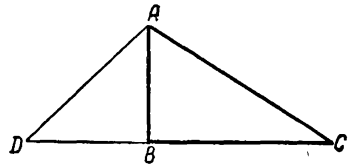



Рис. 30.

зок $BK$ пополам и из его середины (точки $O$) восставим перпендикуляр до пересечения в точке $C$ с прямой $BK$. Соединив точки $A$ с $B$ и $B$ с $C$, получим искомый треугольник $ABC$.

**646.** Анализ. Пусть $\triangle ABC$ искомый (рис. 30). Из условия задачи известны $\angle C$ и $AB + BC = s$. На продолжении катета $BC$ откладываем отрезок $BD$, равный по величине $AB$.

$\triangle DBA$ — равнобедренный, следовательно, $\angle BDA = \angle DAB = 45°$.

Построение. Откладываем отрезок $DC = s$. В точке $C$ строим угол $DCA$, равный данному, и в точке $D$ — угол $CDA = 45°$. Из точки пересечения $A$ сторон этих углов опустим на $DC$ перпендикуляр $AB$.

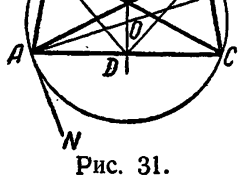



Рис. 31.

Треугольник $ABC$ искомый.

**647.** Анализ. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 31) искомый. Тогда отрезок $AC$ будет виден под данным углом $ABC$. По условию задачи нам также известна медиана $BD$. Таким образом, можно утверждать, что вершина $B$ лежит на пересечении двух геометрических мест точек, а именно: окружности с центром в точке $D$ и радиусом, равным длине медианы $BD$, и дуги сегмента, вмещающего данный угол $ABC$.

Построение. В точке $A$ строим $\angle CAN = \angle B$. Проводим $AO \perp AN$, а через середину $AC$ $DO \perp AC$. Точка $O$ пересечения $AO$ и $DO$ даст центр окружности, дуга $AB B_1 C$ которой является геометрическим местом точек, из которых $AC$ видно под углом B. Раство-

ром циркуля, равным длине медианы, из $D$ как центра находим точки пересечения с окружностью, которые дадут нам искомую вершину $B$.

Задача может иметь или два решения, или одно решение, или вовсе не иметь решений.

**648.** А н а л и з. Предположим, что $\triangle ABC$ (рис. 32) искомый. Продолжим медиану $BD$ на величину, равную $\frac{1}{3}$ ее длины. Рассмотрим $\triangle AOE$, где $O$ — точка пересечения медиан $\triangle ABC$:

$$AO = \frac{2}{3} m_a; \quad OE = \frac{2}{3} m_b; \quad \Delta ADE = \Delta ODC,$$

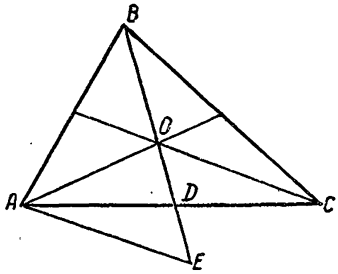


Рис. 32.

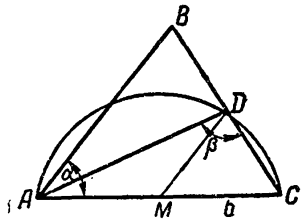


Рис. 33.

потому что $AD = DC$, $OD = DE$, $\angle ODC = \angle ADE$. Следовательно,

$$AE = OC = \frac{2}{3} m_c.$$

П о с т р о е н и е. Построим $\triangle AOE$ по данным трем сторонам, каждая из которых равна $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы искомого треугольника, проведем медиану $AD$ и продолжим ее на величину $DC = AD$. Сторону $OE$ продолжим на величину $OB = OE$. Полученную точку $B$ соединим с точками $A$ и $C$. Таким образом, $\triangle ABC$ искомый.

**649.** А н а л и з. Предположим, что $\triangle ABC$ (рис. 33) искомый. По условию задачи известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $AC = b$. На $AC$ можно построить сегмент, дуга которого является геометрическим местом точек, из которого $AC$ видно под углом $\beta$ (смотри задачу 647). Точка $D$ — середина стороны $BC$. Если из точки $D$ провести прямую $DM$ параллельно $AB$, то $M$ будет серединой стороны $AC$. $\angle DMC = \angle BAC = \alpha$.

П о с т р о е н и е. На $AC = b$ построим сегмент, который вмещает угол $\beta$.

Из середины отрезка $AC$ проведем под углом $\alpha$ прямую $MD$ до пересечения с дугой окружности в точке $D$. Соединим $C$ с $D$ и продолжим отрезок $CD$ на величину $BD = CD$. Соединим точку $B$ с точкой $A$.

$\triangle ABC$ — искомый.

**650.** Из точки $A$ конца основания данного $\triangle ABC$ восставим перпендикуляр $AE = h$ (рис. 34).

Через точку $E$ проведем прямую $EK \parallel AC$. Соединим точки $K$ и $C$ и через точку $B$ проведем $BD \parallel KC$. $\triangle AKD$ — искомый.

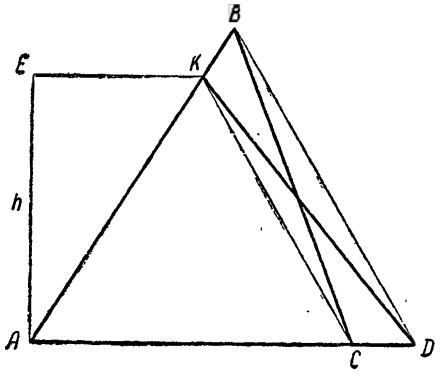



Рис. 34.

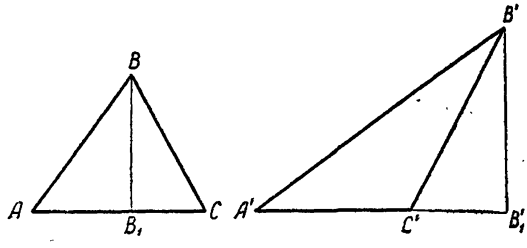



Рис. 35.

**651.** Пусть $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180°$, причем угол $BCA$ острый (рис. 35).

Из вершины рассматриваемых треугольников опустим на основания высоты $BB_1$ и $B'B_1'$.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{AC \cdot BB_1}{A'C' \cdot B'B_1'};$$

$$\triangle BB_1C \sim \triangle B'B_1'C'.$$

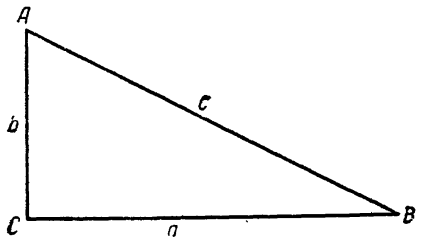



Рис. 36.

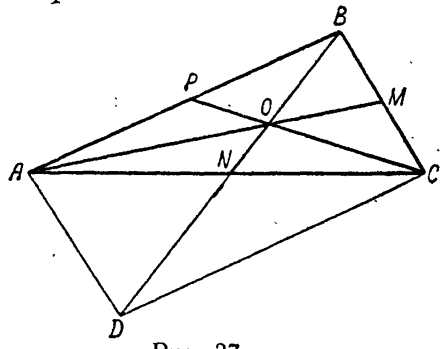



Рис. 37.

Из подобия вытекает, что $\frac{BB_1}{B'B_1'} = \frac{BC}{B'C'}$, откуда окончательно следует, что

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{AC \cdot BC}{A'C' \cdot B'C'}.$$

**652.** Имеем (рис. 36)

$$ca^2 > a^3; \quad cb^2 > b^3.$$

После сложения получим

$$ca^2 + cb^2 > a^3 + b^3,$$

или

$$c^3 > a^3 + b^3.$$

**653.** В $\triangle ABC$ проведем медианы $AM$, $CP$, $BN$ (рис. 37). $O$ — точка пересечения медиан. Продолжим медиану $BN$ на расстояние $ND = BN$, тогда образуется параллелограмм $ABCD$.

Из $\triangle ADB$ вытекает, что $2BN < AB + AD$, или

$$2BN < AB + BC,$$

аналогично $2CP < AC + BC$; $2AM < AB + AC$.

Сложив все неравенства, получим

$$2BN + 2CP + 2AM < AB + BC + AC + BC + AB + AC,$$

$$BN + CP + AM < AB + BC + AC,$$

$$BN + CP + AM < P_{\Delta ABC}.$$

Из $\triangle AOB$ имеем $AB < AO + BO$; из $\triangle BOC$ $BC < BO + OC$; из $\triangle AOC$ $AC < AO + OC$.

Следовательно,

$$AB + BC + AC < 2AO + 2BO + 2OC$$

или

$$P_{\Delta ABC} < 2(AO + BO + OC).$$

Так как каждый из отрезков $AO$, $BO$, $OC$ равен $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы, то

$$P_{\Delta ABC} < \frac{4}{3}(AM + CP + BN)$$

или

$$\frac{3}{4} P_{\Delta ABC} < AM + CP + BN.$$

**654.** По условию площади треугольников $AOB$, $AOC$ и $BOC$ равны.

Из точки $O$ (рис. 38) опустим перпендикуляры $OM$ и $ON$ соответственно на стороны $AC$ и $BC$. Имеем $CO^2 = OM^2 + ON^2$; $OA^2 = OM^2 + MA^2$; $OB^2 = ON^2 + NB^2$, откуда

$$OA^2 + OB^2 = OM^2 + ON^2 + MA^2 + NB^2. \qquad (1)$$

$S_{\Delta BOC}$ составляет $\frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$, следовательно, $ON = \frac{1}{3} AC$ и $MA = AC - CM = 3ON - ON = 2ON$; аналогично доказывается, что $NB = 2MO$. Таким образом, равенство (1) можно преобразовать к виду

$$OA^2 + OB^2 = 5(OM^2 + ON^2) = 5OC^2.$$

**655.** Касательные, проведенные из одной точки к одной и той же окружности, равны между собой (рис. 39). Следовательно, $AC = AD + CE$; $BC = CE + BD$.

По условию задачи

$$AC \cdot BC = 2AD \cdot DB. \tag{1}$$

Подставим вместо $AC$ и $BC$ их значения:

$$(AD + CE)(CE + BD) = 2AD \cdot DB;$$

$$CE^2 + (AD + BD)CE + AD \cdot DB - 2AD \cdot DB = 0;$$

$$CE^2 + AB \cdot CE - AD \cdot DB = 0.$$

Так как последнее выражение представляет собой квадратное уравнение относительно $CE$, то

$$CE = \frac{-AB \pm \sqrt{AB^2 + 4AD \cdot DB}}{2}$$

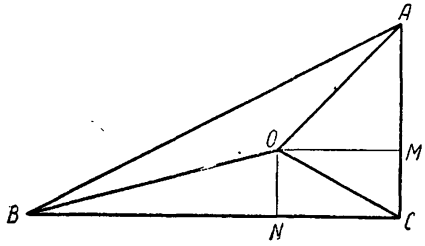



Рис. 38.

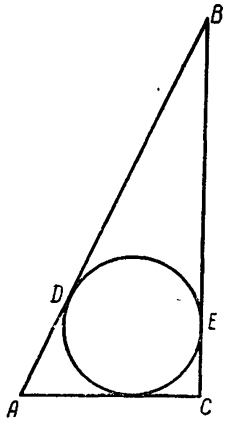



Рис. 39.

(минус перед корнем отбрасываем, потому что длина отрезка не может быть отрицательной).

Из условия задачи (1) следует, что

$$CE = \frac{-AB + \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC}}{2}. \tag{2}$$

Периметр $\Delta ABC$

$$AB + BC + AC = 2AB + 2CE. \tag{3}$$

Подставив в (2) вместо $CE$ его значение из (3), получим

$$AB + BC + AC = 2AB - AB + \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC},$$

или

$$BC + AC = \sqrt{AB^2 + 2AC \cdot BC}.$$

Возведем в квадрат последнее равенство:

$$BC^2 + 2BC \cdot AC + AC^2 = AB^2 + 2AC \cdot BC;$$

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Следовательно, треугольник $ABC$ будет прямоугольный.

Примечание. Можно показать, что если треугольник $ABC$ прямоугольный, то справедливо равенство

$$AC \cdot BC = 2AD \cdot DB.$$

Действительно, принимая во внимание, что $r = \frac{AC + BC - AB}{2}$, где $r$ — радиус круга, вписанного в треугольник, получим

$$AC \cdot BC = (AD + r)(BD + r) = AD \cdot BD + (AD + BD)r + r^2 =$$

$$= AD \cdot BD + (AB + r)r = AD \cdot BD + \frac{AC + BC + AB}{2} \cdot \frac{AC + BC - AB}{2} =$$

$$= AD \cdot BD + \frac{AC^2 + 2AC \cdot BC + BC^2 - AB^2}{4} = AD \cdot BD + \frac{AC \cdot BC}{2}.$$

Отсюда

$$AC \cdot BC = 2AD \cdot BD.$$

Таким образом, чтобы треугольник $ABC$ был прямоугольный, необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$AC \cdot BC = 2AD \cdot BD.$$

**656.** По условию задачи в $\triangle ABC$ (рис. 40) известны высоты $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ и ортоцентр $H$. Прямоугольные треугольники $AHB_1$ и $BHA_1$, $BHC_1$ и $CHB_1$ будут подобны, поскольку они имеют равные острые углы.

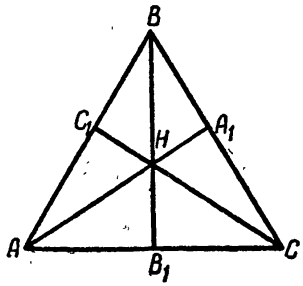



Рис. 40.

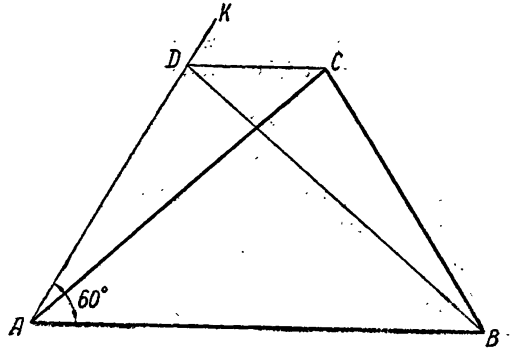



Рис. 41.

Следовательно, $AH : BH = HB_1 : HA_1$; $BH : CH = HC_1 : HB_1$, откуда, $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

**657.** Через точку $A$ (рис. 41) проведем прямую $AK$ под углом в 60° к стороне $AB$ и через точку $C$ прямую $CD \parallel AB$.

Треугольники $ADB$ и $ACB$ равновелики. Превращаем $\triangle ADB$ в равновеликий ему равносторонний.

Обозначим высоту искомого равностороннего треугольника через $x$. Тогда его площадь будет равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Поэтому

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ah_a}{2},$$

или

$$x = \sqrt{\frac{2}{3} a \sqrt{3} h_a},$$

где $a$ — основание ($DB$), а $h$ — высота треугольника $ADB$ (опущенная из вершины $A$ на сторону $BD$).

Сначала строим отрезок $y = \frac{2}{3} a \sqrt{3}$ как сторону правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $\frac{2}{3} a$, а затем отрезок $x = \sqrt{h_a y}$ как среднюю пропорциональную между отрезками $h_a$ и $y$ (см. решение задачи 703).

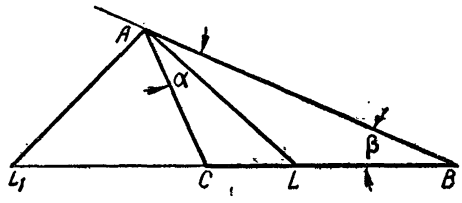


Рис. 42.

**658.** Пусть угол $CAB = \alpha$, угол $ABC = \beta$ (рис. 42), $AL$ — биссектриса внутреннего угла, а $AL_1$ — биссектриса внешнего угла при вершине $A$.

$\angle ALC = \beta + \frac{\alpha}{2}$ (как внешний угол треугольника $ALB$); с другой стороны,

$$\angle ALC = 180° - \left(\angle ACB + \frac{\alpha}{2}\right) = 180° -$$

$$- \left(90° + \beta + \frac{\alpha}{2}\right) = 90° - \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Это возможно только в том случае, если $\angle ALC = 45°$.

Так как биссектрисы $AL$ и $AL_1$ взаимно перпендикулярны, то треугольник $L_1AL$ прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AL_1 = AL$.

**659.** Пусть $d$ — разность арифметической прогрессии ($d > 0$). Тогда

$$b = a + d; \quad c = a + 2d;$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3}{2}(a + d) = \frac{3}{2} b,$$

где $p$ — полупериметр.

Как известно, $r = \frac{S}{p}$ и $R = \frac{abc}{4S}$, где $S$ — площадь треугольника.

Следовательно,

$$6rR = \frac{6abc}{4p} = \frac{3abc}{2 \cdot \frac{3}{2} b} = ac.$$

**660.** $ABC$ — данный треугольник (рис. 43). $AL$ и $BK$ — его высоты, $O$ — центр описанной окружности, $H$ — ортоцентр, $\triangle BKC \sim \triangle ALC$. Поэтому $\angle KBC = \angle LAC$, и, следовательно, $\smile DC = \smile FC$, где $F$ и $D$ — точки пересечения продолжений $AL$ и $BK$ с окружностью. $\angle CBF = \angle CBD$, как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги.

В $\triangle HBF$ линия $BL$ является биссектрисой и высотой. Поэтому $BL$ есть также и медиана, откуда следует, что $HL = LF$.

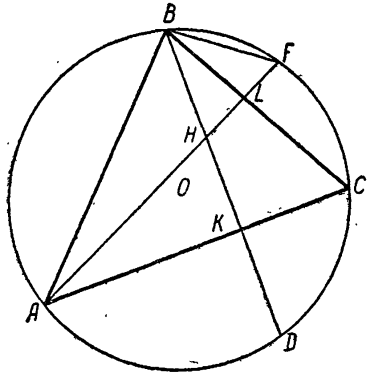



Рис. 43.

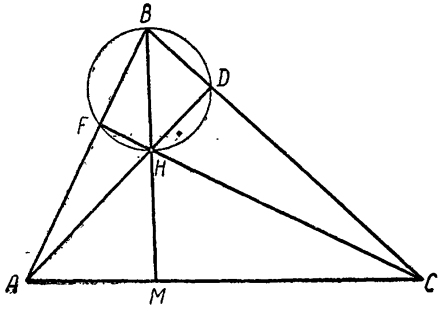



Рис. 44.

Точка $F$, симметричная с $H$ относительно стороны $BC$, не может не лежать на окружности с центром $O$, ибо тогда $\angle DBC \neq \angle CBF$, так как $\angle DBC$ и $\angle CBF$ опирались бы на неравные дуги.

Доказательство аналогично и для других высот треугольника.

**661.** $ABC$ — данный остроугольный треугольник. $H$ — ортоцентр. $M$, $D$ и $F$ — основание высот треугольника $BM$, $AD$ и $CF$ (рис. 44):

$$\Delta BMC \sim \Delta HDB.$$

Отсюда

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BD}{BH},$$

или

$$BM \cdot BH = BC \cdot BD. \qquad (1)$$

Около четырехугольника $HFBD$ опишем окружность, что всегда возможно, так как $\angle FBD + \angle FHD = \angle HFB + \angle HDB = 2d$. Исходя из свойства секущих, проведенных из одной точки к окружности, имеем:

$$FC \cdot HC = BC \cdot DC. \qquad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2):

$$BM \cdot BH + FC \cdot HC = BC \cdot BD + BC \cdot DC = BC^2.$$

Обозначив длины сторон треугольника через $a$, $b$, $c$, его высоты — через $h_a$, $h_b$, $h_c$, а расстояния от ортоцентра до вершин — соответственно через $r_a$, $r_b$ и $r_c$, предыдущее равенство перепишем в виде

$$h_b r_b + h_c r_c = a^2.$$

Аналогично можно составить еще два равенства:

$$h_a r_a + h_c r_c = b^2;$$

$$h_a r_a + h_b r_b = c^2.$$

Сложив последние три равенства, получим

$$h_a r_a + h_b r_b + h_c r_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

**662.** Анализ. Предположим, что параллелограмм $ABCD$ (рис. 45) искомый, у которого $BE$ — высота. Отрезки $BE$ и $BD$ прямоугольного $\triangle BED$ известны.

Построение. Строим прямоугольный треугольник $BED$ по катету $BE$ и гипотенузе $BD$. Для этого строим прямой угол $BED$. На одной стороне угла откладываем отрезок $BE$,

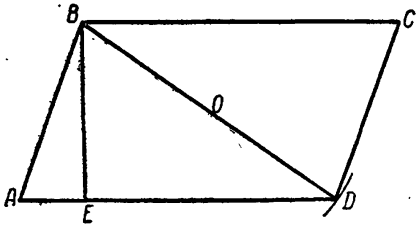



Рис. 45.

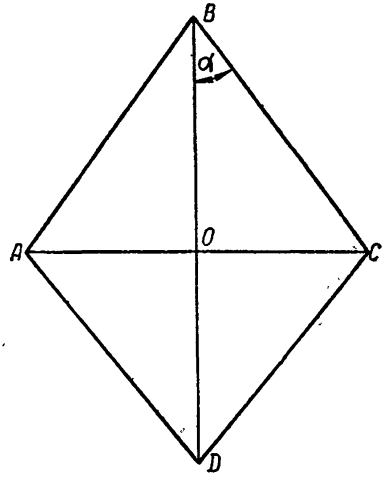



Рис. 46.

равный по величине высоте параллелограмма, затем из точки $B$ радиусом, равным диагонали, проводим дугу окружности и находим точку пересечения ее со стороной $ED$; соединив точки $D$ и $B$, получим $\triangle BED$.

Продолжим катет $DE$ так, чтобы $DA$ равнялась основанию.

Соединяем $A$ с $B$. Из точек $B$ и $D$ проведем прямые, соответственно параллельные сторонам $AD$ и $AB$. Точка их пересечения и даст точку $C$.

$ABCD$ — искомый параллелограмм.

**663.** Анализ. Пусть ромб $ABCD$ (рис. 46) искомый. Известно, что $\angle CBD = \alpha$, $BD + AC = s$. Из свойства диагоналей ромба следует, что $BO + OC = \frac{s}{2}$; $\triangle BOC$ прямоугольный.

Построение. Строим $\triangle BOC$ (задача 646). Продолжим отрезок $OC$ на расстояние $AO = OC$ и отрезок $OB$ — на расстояние $OD = OB$. Получим соответственно точки $A$ и $D$. Соединяем точки. Ромб $ABCD$ искомый.

**664.** Известно, что $a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, где $R$—радиус описанной окружности, а $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Следовательно, $a_5 = 2R \sin 36° = 4R \sin 18° \cos 18°$, находим $\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

$$a_5 = 4R\,\frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{4}R(\sqrt{5}-1)\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}.$$

Рассмотрим отдельно

$$a_5^2 = \sqrt{5}\,\frac{1}{16}R^2(5-1)\cdot 2(\sqrt{5}-1) = \frac{\sqrt{5}R^2}{2}(\sqrt{5}-1);$$

$$a_{10}^2 + R^2 = R^2 + R^2\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \frac{10R^2 - 2R^2\sqrt{5}}{4} = \frac{R^2}{2}(5-\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}R^2(\sqrt{5}-1).$$

Замечание. Исходя из формулы удвоения числа сторон правильного многоугольника, получим:

$$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_5^2}{4}}};$$

$$\frac{R^2}{2}(3-\sqrt{5}) = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_5^2}{4}};$$

$$4\sqrt{R^2 - \frac{a_5^2}{4}} = R(1+\sqrt{5});$$

$$16R^2 - 4a_5^2 = R^2(6+2\sqrt{5});$$

$$a_5^2 = \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4} = \left[\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right]^2 + R^2 = a_{10}^2 + R^2.$$

**665.** Пусть сторона $BC = a$; $AA_1 = h$; $MN = x$; $\triangle AML \sim \triangle ABC$ (рис. 47)

$$LM : a = (h-x) : h,$$

откуда

$$LM = \frac{a(h-x)}{h}.$$

Площадь прямоугольника

$$S_{KLMN} = \frac{ax(h-x)}{h}.$$

Имеем

$$x(h-x) = hx^2 - x^2 = -(x^2 - hx) = -$$

$$-\left[\left(x^2 - hx + \frac{h^2}{4}\right) - \frac{h^2}{4}\right] = -\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Наибольшее значение будет при $x = \frac{h}{2}$, что и требовалось доказать.

На рис. 47 $K_1L_1M_1N_1$ — прямоугольник наибольшей площади, вписанной в треугольник.

**666.** Пусть $AB = DE$; $AB \parallel DE$ (рис. 48). Соединим $A$ с $E$ и $B$ с $D$. В четырехугольнике $ABDE$ стороны

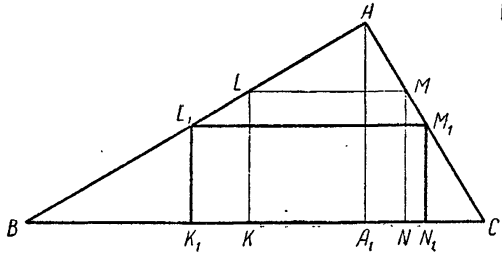



Рис. 47.

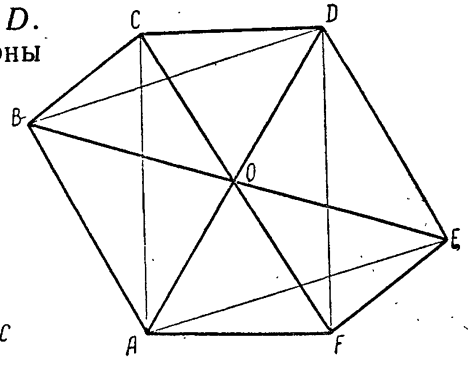



Рис. 48.

$AB$ и $DE$ равны и параллельны, следовательно, он параллелограмм. Диагонали $AD$ и $BE$ параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. В четырехугольнике $AFDC$ диагональ $CF$ разделится в точке $O$ пополам.

Таким образом, $AD$, $BE$ и $CF$ проходят через точку $O$.

**667.** Пусть $H$ — неподвижная шестеренка (рис. 49), $H_1$ — бегающая шестеренка. Обозначим их радиусы соответственно через $R$ и $r$, причем $R = 2r$ ($OO_1$ — кривошип).

Не нарушая общности, можно рассмотреть траекторию одной точки $M$ подвижной шестеренки. Все остальные точки ее окружности будут двигаться по аналогичным траекториям.

Когда кривошип $OO'$ повернется на угол $O_1OO' = \alpha$ (против движения стрелки часов), то внутренняя шестеренка повернется около своего центра на угол $\beta$, причем дуга $NM_1$ равна дуге $NM$. Но $\smile NM = R\alpha$; $\smile NM_1 = r\beta$ (здесь имеется в виду радианное измерение углов). Поэтому

$$R\alpha = r\beta,$$

или

$$2r\alpha = r\beta,$$

или

$$\beta = 2\alpha.$$

$\angle NO_1M_1$ есть внешний угол равнобедренного треугольника $OO_1M_1$.

Следовательно, $\angle O_1OM_1 = \alpha$ и точка $M_1$ совпадет с $M_2$. Таким образом, точка $M$ движется по диаметру $ML$ неподвижной шестеренки, совершая возвратно-поступательное движение.

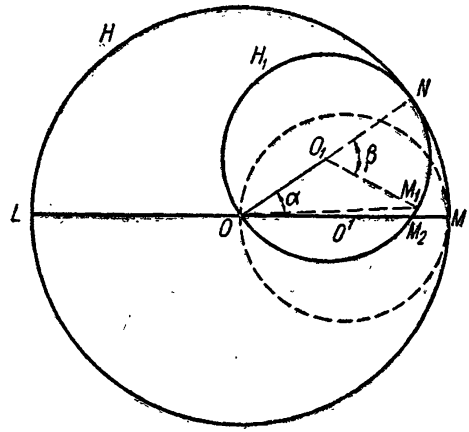



Рис. 49.

**668.** Докажем предварительно следующее: сумма расстояний от какой-нибудь точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон есть величина постоянная, равная боковой высоте треугольника.

Пусть расстояния от произвольно выбранной точки $M$ (рис. 50) основания равнобедренного треугольника $OAB$ до его боковых сторон $OB$ и $OA$ будут $MK$ и $MN$, а $AL$ — его боковая высота. Проведем через точку $A$ линию $AK_1 \parallel OB$ до пересечения в точке $K_1$ с продолжением $MK$. $\triangle AK_1M = \triangle ANM$, ибо $\angle MAK_1 = \angle MBK = \angle MAN$, $\angle MNA = \angle MK_1A = 90°$, $AM$ — общая сторона. Отсюда следует, что

$$MK + MN = MK + MK_1 = AL.$$

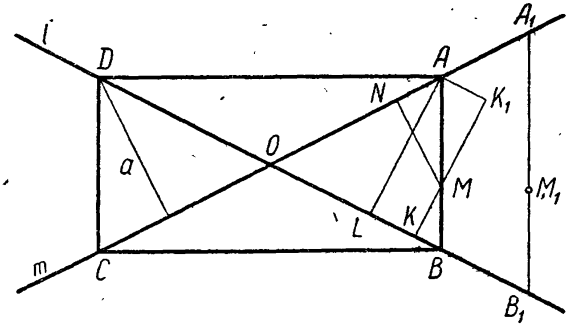



Рис. 50.

На основании доказанного справедливо утверждение: геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух пересекающихся прямых равна данной величине $a$, есть стороны прямоугольника с диагоналями, совпадающими с данными прямыми, и вершинами, отстоящими от одной из этих прямых, не проходящих через соответствующую вершину, на расстоянии $a$.

Действительно, для всякой точки $M$ стороны прямоугольника $ABCD$ сумма расстояний до данных прямых $OA$ и $OB$ будет равна $a$

как сумма расстояний от точки основания равнобедренного треугольника $ABO$ с боковой высотой, равной $a$, до его боковых сторон.

Для всякой другой точки $M_1$, лежащей не на стороне прямоугольника $ABCD$, сумма расстояний до прямых $OA$ и $OB$ будет отлична от $a$, в чем легко убедиться, проведя через $M_1$ прямую, параллельную $AB$, и рассматривая равнобедренный треугольник $A_1B_1O$, боковая высота которого не равна $a$.

Нахождение указанного в условии геометрического места в случае параллельных прямых представляем читателю.

**669.** Соединим точку $M$ с вершинами данного треугольника. Величину площадей полученных при этом трех внутренних треугольников обозначим соответственно через $S_1$, $S_2$ и $S_3$, а стороны оснований данного треугольника — через $a_1$, $a_2$ и $a_3$. Получим следующие равенства:

$$a_1d_1 = 2S_1;$$
$$a_2d_2 = 2S_2;$$
$$a_3d_3 = 2S_3.$$

Пусть величина площади данного треугольника будет $S$. Тогда

$$a_1h_1 = 2S;$$
$$a_2h_2 = 2S;$$
$$a_3h_3 = 2S.$$

Из полученных выше соотношений следует, что

$$\frac{d_1}{h_1} = \frac{S_1}{S};$$
$$\frac{d_2}{h_2} = \frac{S_2}{S};$$
$$\frac{d_3}{h_3} = \frac{S_3}{S}.$$

Сложив последние три равенства, будем иметь

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = 1.$$

**670.** 1-й способ решения. Из $\triangle ABD$ имеем (рис. 51)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE,$$

а из $\triangle ADC$ следует, что

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DK.$$

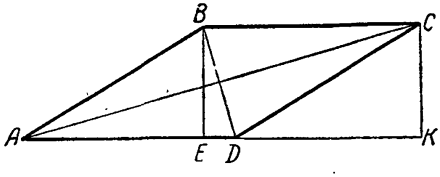


Рис. 51.

Пусть сторона ромба равна $a$, а $BD = d_1$, $AC = d_2$.

В $\triangle BEA$ угол $A = 30°$, откуда

$$AE = DK = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$d_1^2 = 2a^2 - 2a\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2a^2 - \sqrt{3}\,a^2;$$

$$d_2^2 = 2a^2 + \sqrt{3}\,a^2.$$

Имеем

$$d_1^2 d_2^2 = (2a^2 - a^2\sqrt{3})(2a^2 + a^2\sqrt{3}) = 4a^4 - 3a^4 = a^4,$$

или

$$a^2 = d_1 d_2.$$

2-й способ решения. Площадь ромба равна $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$; с другой стороны, та же площадь вычисляется по формуле

$$S_{ABCD} = AD \cdot BE.$$

Следовательно,

$$AD \cdot BE = \frac{AC \cdot BD}{2}. \qquad (1)$$

Но $BE = \frac{AB}{2}$ (что следует из прямоугольного треугольника $ABE$), или $BE = \frac{AD}{2}$.

Подставляя в (1), получим:

$$AD^2 = AC \cdot BD, \text{ или } a^2 = d_1 d_2.$$

**671.** Имеем $BE = BK$; $EC = CL$; $LD = FD$; $AF = AK$ (рис. 52) (как касательные к окружности, исходящие из одной точки).

Отсюда

$$AB + CD = AD + BC,$$

или

$$AB = \frac{AD + BC}{2}; \quad AM = \frac{AD - BC}{2}.$$

Высота трапеции служит диаметром вписанной окружности:

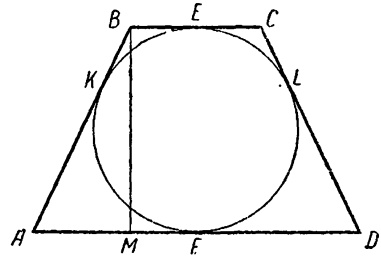


Рис. 52.

$$D^2 = \frac{(AD + CB)^2}{4} - \frac{(AD - BC)^2}{4} =$$

$$= \frac{AD^2 + 2AD \cdot CB + CB^2 - AD^2 + 2AD \cdot BC - BC^2}{4} = AD \cdot BC.$$

Итак, $D = \sqrt{AD \cdot BC}$.

**672.** Проведем $DN$ и продолжим на величину $NE = DN$. Соединим точку $E$ с $A$. Получим $\triangle ADE$, причем $MN$ — средняя линия $\triangle ADE$ и равна $\frac{AE}{2}$ (рис. 53).

Соединив $E$ с $B$, получим: $\triangle NBE = \triangle CND$, так как $\angle DNC = \angle BNE$; $DN = NE$; $CN = NB$, откуда

$$BE = CD.$$

Следовательно, $MN = \frac{AB + BE}{2}$; сравнивая последнее равенство с равенством $MN = \frac{AE}{2}$, имеем, что $AE = AB + BE$, но это возможно только в том случае, если $AB$ и $BE$ лежат на одной прямой. Так как $BE \parallel CD$ ($\angle DCB = \angle EBC$), то теорема доказана.

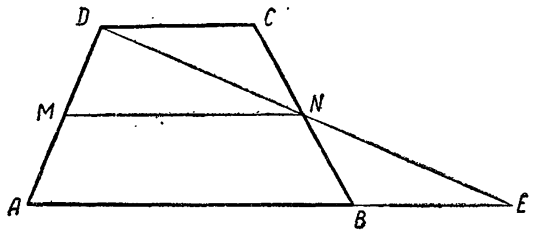



Рис. 53.

**673.** Допустим, что выпуклый четырехугольник с неравными углами не имеет тупых углов, тогда все внешние углы его тупые и сумма их больше 360°, что противоречит теореме о сумме углов выпуклого многоугольника, а это доказывает наше предположение.

**674.** Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$

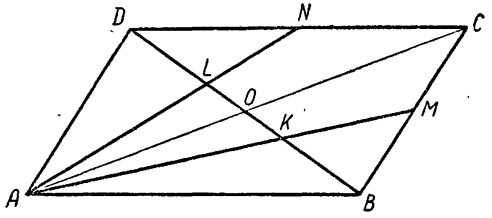



Рис. 54.

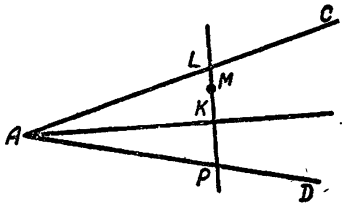



Рис. 55.

(рис. 54). Тогда в $\triangle ABC$ медиана $BO$ делится в точке пересечения $K$ медианой $AM$ в отношении 2 : 1, считая от вершины $A$.

Аналогично $AN$ делит $OD$ в отношении 2 : 1, считая от $D$; отсюда

$$DL = LK = KB.$$

2-й способ. $\triangle DLN \sim \triangle ALB$.
Поэтому $BL = 2\,DL$, $\triangle DKA \sim \triangle BKM$.
Следовательно, $DK = 2BK$. Отсюда

$$\begin{cases} BK + KL = 2DL, \\ DL + KL = 2BK. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$BK - DL = 2DL - 2BK$, или $BK = DL$ и $KB = LK$.

**675.** Анализ. Предположим, что через данную точку $M$ проведена прямая $LP$ (рис. 55), отсекающая на сторонах данного

угла $CAD$ равные отрезки, т. е. $AL = AP$. Треугольник $APL$ является, таким образом, равнобедренным с основанием $LP$.

Так как биссектриса угла при вершине в равнобедренном треугольнике является также и высотой, то биссектриса $AK$ угла $CAD$ перпендикулярна $LP$. Отсюда следует такое построение.

Построение. Строим биссектрису $AK$ угла $CAD$. Из точки $M$ опускаем перпендикуляр на $AK$. Этот перпендикуляр и будет искомой прямой.

Доказательство. Так как $AK$ есть биссектриса угла $CAD$, то перпендикуляр $MK$, опущенный из точки $M$ на $AK$, пересекаясь со сторонами данного угла в точках $L$ и $P$, образует $\triangle ALP$, состоящий из равных треугольников $LKA$ и $PKA$.

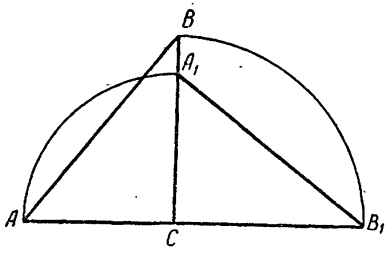


Рис. 56.

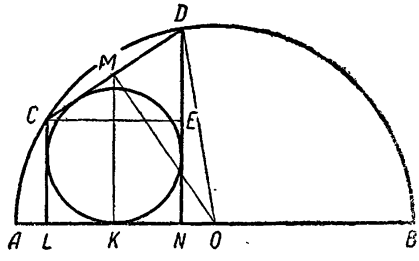


Рис. 57.

Действительно, $\angle AKL = \angle AKP = 90°$, сторона $AK$ — общая и $\angle LAK = \angle PAK$, следовательно, треугольники $AKL$ и $AKP$ равны. Отсюда $AL = AP$.

Исследование. Очевидно, что условия задачи всегда допускают единственное решение.

**676.** Пусть $A_1B_1C$ — новое положение треугольника $ABC$ (рис. 56), катет $CA$ описал сектор с радиусом $CA$ и центральным углом 90°; площадь этого сектора равна $\frac{\pi CA^2}{4}$, а площадь сектора, описанного катетом $CB$, будет $\frac{\pi CB^2}{4}$; сумма площадей описанных секторов

$$\frac{\pi CA^2}{4} + \frac{\pi CB^2}{4} = \frac{\pi AB^2}{4},$$

что и требовалось доказать.

**677.** Рассмотрим два этапа этой задачи:

1. Построение вписанной в данную полуокружность прямоугольной трапеции с боковой стороной — хордой, равной данному отрезку $2a$, так, чтобы суммы ее противоположных сторон были равны.

2. Вписывание в построенную трапецию окружности.

Пусть вписанная в данную полуокружность с диаметром $AB = 2R$ трапеция $LCDN$ (рис. 57), в которой $CL \perp AB$; $DN \perp AB$; $CD = 2a$, удовлетворяет требованию

$$CL + DN = CD + LN. \qquad (1)$$

Соединяем центр $O$ — полуокружности с серединой $M$ хорды $CD$; $OM \perp CD$, строим $MK \perp AB$.

$MK$ — средняя линия трапеции и равенство (1) имеют вид

$$2MK = CD + LN. \tag{2}$$

Проведем $EC \perp DN$ и радиус полуокружности $OD$.

Обозначим $\angle MOA$ через $\alpha$, тогда $\angle CDN = \alpha$.

Имеем: $OM = \sqrt{R^2 - a^2}$; $MK = OM \sin\alpha = \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \sin\alpha$;

$2MK = 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot \sin\alpha$;

$$CD + LN = CD + EC = 2a + 2a\sin\alpha,$$

следовательно,

$$2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot \sin\alpha = 2a(1 + \sin\alpha),$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2} - a} \text{ или } \alpha = \arcsin\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2} - a},$$

так как $\alpha \leqslant 90°$, то $\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2} - a} \leqslant 1$, откуда

$$a \leqslant \frac{R}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

Соотношение (3) выражает необходимое условие существования решения.

Из проведенного анализа вытекает, что построение вписанной трапеции осуществляется по следующим этапам:

1. По данным проверяется выполнение условия (3).
2. Строится угол $\alpha = \arcsin\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2} - a}$.
3. Строится угол $AOM$, равный $\alpha$.
4. На луче $OM$ откладывается отрезок $OM = \sqrt{R^2 - a^2}$.
5. Через точку $M$ проводится хорда $CD$, перпендикулярная к $OM$.
6. Строятся $CL$ и $DN$ — перпендикуляры к $AB$.

Построение вписанной в полученную трапецию окружности тривиально.

При $a < \frac{R}{\sqrt{5}}$ задача имеет два решения, так как

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2} - a} \text{ и } \alpha_2 = \pi - \arcsin\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2} - a}.$$

При $a = \frac{R}{\sqrt{5}}$ задача имеет одно решение — трапеция преобразуется в квадрат со стороной $2a = \frac{2R}{\sqrt{5}}$.

**678.** Пусть $AB_k$ (рис. 58) пересекает луч $OA_i$ в точке $M$ и луч $OB_i$ в точке $N$.

Обозначим угол $BAB_k$ через $\alpha$ и угол $B_iAB_k$ через $\beta$.

Имеем

$$\frac{A_iM}{MO} = \frac{A_iM}{AA_i} \cdot \frac{AA_i}{AO} \cdot \frac{AO}{MO} = \frac{\sin\alpha}{\sin M} \cdot \frac{2AA_i \sin 45^\circ}{AB} \cdot \frac{\sin M}{\sin(45^\circ - \alpha)} =$$

$$= \frac{2AA_i}{AB} \sin\alpha \frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{2AA_i}{AB} \cdot \frac{BB_k}{AB_k} \cdot \frac{AB_k}{B_kC} =$$

$$= \frac{2AA_i \cdot BB_k}{AB \cdot B_kC} = \frac{2ik}{m(m-k)}.$$

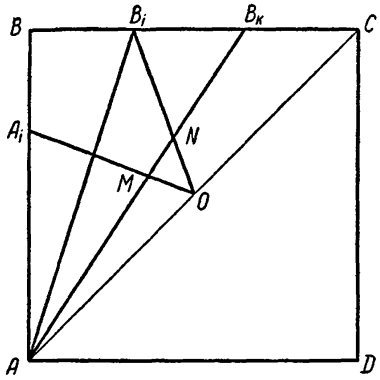



Рис. 58.

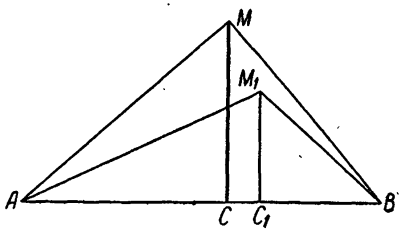



Рис. 59.

Так же:

$$\frac{B_iN}{NO} = \frac{B_iN}{AB_i} \cdot \frac{AB_i}{AO} \cdot \frac{AO}{NO} = \frac{\sin\beta}{\sin N} \cdot \frac{2AB_i}{AC} \cdot \frac{\sin N}{\sin(45^\circ - \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin\beta}{\sin B_k} \cdot \frac{\sin B_k}{\sin(45^\circ - \alpha)} \cdot \frac{2AB_i}{AC} = \frac{B_iB_k}{AB_i} \cdot \frac{AC}{B_kC} \cdot \frac{2AB_i}{AC} =$$

$$= \frac{2B_iB_k}{B_kC} = \frac{2(k-i)}{m-k}.$$

**679.** Пусть $A$ и $B$ — данные точки, $M$ и $M_1$ — точки, принадлежащие искомому геометрическому месту (рис. 59).

Согласно условию

$$AM^2 - MB^2 = d^2;$$

$$AM_1^2 - M_1B^2 = d^2,$$

где $d$ — данная постоянная.

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$AM^2 - MB^2 = AM_1^2 - M_1B^2.$$

Из точек $M$ и $M_1$ опустим перпендикуляры $MC$ и $M_1C_1$ на $AB$.

Последнее равенство перепишем в виде

$$(AM^2 - MC^2) - (MB^2 - MC^2) = (AM_1^2 - M_1C_1^2) - (M_1B^2 - M_1C_1^2),$$

что равносильно

$$AC^2 - BC^2 = A_1C_1^2 - BC_1^2,$$

или

$$(AC + CB)(AC - CB) = (AC_1 + C_1B)(AC_1 - C_1B),$$

или

$$AC - CB = AC_1 - C_1B.$$

Но $AC + CB = AC_1 + C_1B = AB$, поэтому получим следующую систему:

$$\begin{cases} AC + CB = AC_1 + C_1B; \\ AC - CB = AC_1 - C_1B. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$AC = AC_1;$$

$$CB = C_1B,$$

т. е. точки $C$ и $C_1$ совпадают. Это означает, что $M$ и $M_1$ лежат на одной прямой, перпендикулярной к отрезку $AB$. Докажем теперь обратное, а именно: разность квадратов расстояний от точек, лежащих на перпендикуляре к отрезку, до концов этого отрезка есть величина постоянная.

Проведем к отрезку $AB$ перпендикуляр $MC$, тогда

$$AM^2 = MC^2 + AC^2;$$

$$BM^2 = MC^2 + BC^2.$$

Отсюда

$$AM^2 - BM^2 = AC^2 - BC^2 = d^2.$$

Таким образом доказано, что геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, их соединяющему. Чтобы построить указанное геометрическое место, нужно найти положение точки $C$ на отрезке.

Как видно из изложенного,

$$AC^2 - CB^2 = d^2,$$

или

$$(AC + CB)(AC - CB) = d^2,$$

или

$$AB(AC - CB) = d^2,$$

или, наконец,

$$AC - CB = \frac{d^2}{AB}.$$

Но $AC + CB = AB$, поэтому

$$AC = \frac{AB + \frac{d^2}{AB}}{2},$$

или

$$2AC \cdot AB = AB^2 + d^2.$$

Для построения отрезка $AC$, нужно построить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $AB$ и $d$, затем найти $AC$ как отрезок гипотенузы прямоугольного треугольника, делящейся высотой, равной построенной гипотенузе, на части, одна из которых равна $2AB$.

Можно построить и другим образом:

найти отрезок $y = \frac{d^2}{AB}$, сложить с отрезком $AB$ и полученную сумму отрезков разделить пополам.

**680.** Пусть $K_1$ и $K_2$ — данные концентрические окружности с центрами в точке $O$. Искомая окружность может касаться окружности $K_1$ лишь внутренним образом. Геометрические места центров окружностей, касающихся двух данных, есть две окружности, концентрические данным, радиусов $\frac{R_1 + R_2}{2}$ и $\frac{R_1 - R_2}{2}$, где $R_1$ и $R_2$ — соответственно радиусы окружностей $K_1$ и $K_2$.

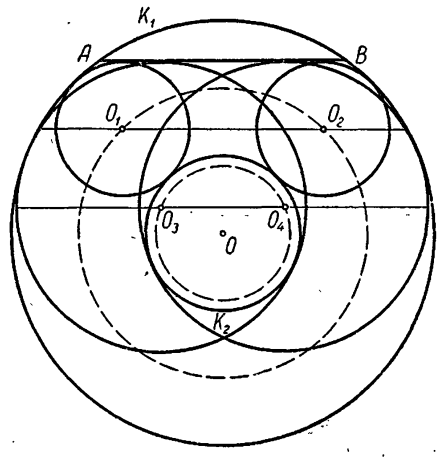


Рис. 60.

Геометрические места точек, отстоящих от данной прямой на расстояниях $\frac{R_1 + R_2}{2}$ и $\frac{R_1 - R_2}{2}$, есть прямые, параллельные данной прямой.

Центры искомых окружностей принадлежат одновременно двум геометрическим местам: указанным окружностям и прямым, отстоящим от данной прямой на расстояниях, равных $\frac{R_1 + R_2}{2}$ и $\frac{R_1 - R_2}{2}$, совпадают с точками пересечения тех прямых и окружностей, радиусы которых и расстояния от прямой не совпадают. При внешнем касании окружности $K_1$ радиус искомой окружности равен $\frac{R_1 - R_2}{2}$, при внутреннем — $\frac{R_1 + R_2}{2}$.

На рис. 60 $AB$ — данная прямая; $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$ — центры построенных окружностей.

**681.** Если данные прямые пересекаются, то к ним одинаково наклонены биссектрисы двух пар вертикальных углов между ними и все параллельные этим биссектрисам прямые. Каждой биссектрисе параллельны две касательные данного круга.

Таким образом, задача имеет четыре решения, а если данные прямые параллельны, то все прямые и, в частности, касательные данного круга одинаково наклонены к ним. В этом случае задача имеет бесчисленное множество решений.

**682.** Как легко доказать, отношения расстояний от точек прямой, проходящей через вершину угла до его сторон, есть величина постоянная для данного угла. Справедливо и обратное утверждение: если отношения расстояний от сторон угла до двух точек равны, то эти точки принадлежат прямой, проходящей через вершину угла.

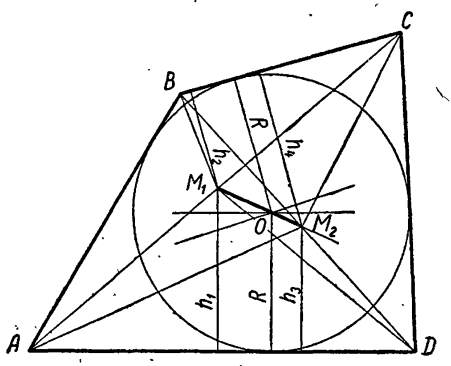


Рис. 61.

У параллельных прямых аналогичным геометрическим местом будет прямая, параллельная данным прямым.

Пусть $ABCD$ — четырехугольник, описанный около круга с центром в точке $O$. $AC$ и $BD$ — его диагонали, $M_1$ и $M_2$ — середины этих диагоналей (рис. 61).

Для описанного около четырехугольника круга должно быть выполнено условие $AB + CD = BC + AD$;

$$S_{AM_1D} = \frac{1}{2} S_{ACD};$$

$$S_{BM_1C} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Следовательно,

$$S_{AM_1D} + S_{BM_1C} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Аналогично:

$$S_{AM_2D} + S_{BM_2C} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Обозначая через $R$ радиус данного круга, получим:

$$S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} AD \cdot R + \frac{1}{2} BC \cdot R = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} R = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

(здесь $P$ — периметр четырехугольника; $AO$, $BO$, $CO$ и $DO$ на рисунке не проведены).

Таким образом,

$$S_{AM_1D} + S_{BM_1C} = S_{AM_2D} + S_{BM_2C} = S_{AOD} + S_{BOC}.$$

Но

$$S_{AM_1D} = \frac{1}{2} AD \cdot h_1; \quad S_{BM_1C} = \frac{1}{2} BC \cdot h_2;$$

$$S_{AM_2D} = \frac{1}{2} AD \cdot h_3; \quad S_{BM_2C} = \frac{1}{2} BC \cdot h_4;$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} AD \cdot R; \quad S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot R.$$

$h_1$, $h_2$, $h_3$ и $h_4$ — расстояния от точек $M_1$, $M_2$ до сторон $AD$ и $BC$. Поэтому

$$ADh_1 + BC \cdot h_2 = AD \cdot h_3 + BC \cdot h_4 = AD \cdot R + BC \cdot R,$$

или

$$\frac{h_1 - R}{R - h_2} = \frac{R - h_3}{h_4 - R} = \frac{BC}{AD}.$$

Если теперь провести через точку $O$ две прямые, параллельные сторонам $AB$ и $CD$, то отношения расстояний от точек $M_1$ и $M_2$ до сторон образовавшегося угла с вершиной в точке $O$ будут равны, и, следовательно, в силу сказанного выше, эти точки должны лежать на прямой, проходящей через вершину угла, т. е. через точку $O$.

В случае параллельности прямых $AB$ и $CD$, $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$ — точки $M_1$, $M_2$ и $O$ лежат на одной прямой, параллельной $AB$ и $CD$. В ромбе точки $M_1$, $M_2$ и $O$ сливаются в одну.

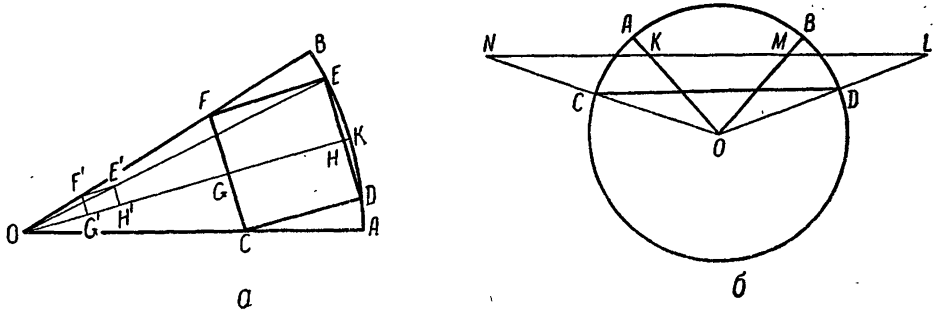



Рис. 62.

683. Пусть $OAB$ — данный сектор (рис. 62, *а*). Докажем, что искомый квадрат $CDEF$ должен быть симметричен относительно биссектрисы угла $AOB$.

Перпендикуляр $OH$ к хорде $DE$ делит ее пополам, поэтому он также перпендикулярен к стороне $FC$ и делит ее пополам. Следовательно, $OH$ разбивает квадрат $CDEF$ на два симметричных прямоугольника $GHDC$ и $GHEF$ относительно $OH$.

Остается доказать, что $OH$ есть биссектриса угла $AOB$. Это видно из того, что в треугольнике $OCF$ линия $OG$ есть одновременно

медиана и высота, следовательно, треугольник равнобедренный и $OG$ — также биссектриса.

Теперь впишем в сектор $BOK$ прямоугольник $GHEF$ с отношением сторон $GH$: $GF = 2$ так, чтобы сторона $GH$ лежала на радиусе $OK$, вершина $F$ — на радиусе $OB$ и вершина $E$ — на дуге $AB$. Для этого строим какой-нибудь прямоугольник $G'H'E'F'$, который удовлетворяет всем этим условиям, кроме последнего; затем проводим $OE'$ до пересечения с дугой $KB$ в точке $E$ и строим прямоугольник $GHEF$. Следовательно, найдя точку $E$, можно сразу построить квадрат $CDEF$.

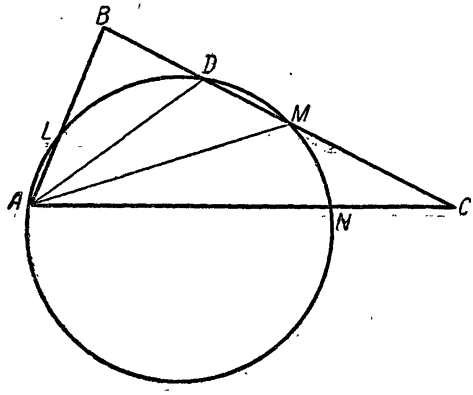


Рис. 63.

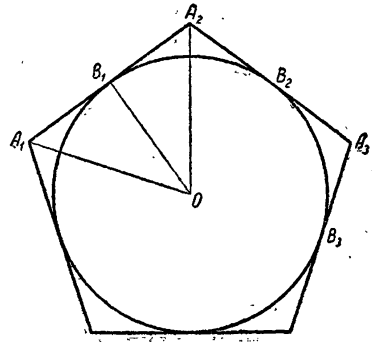


Рис. 64.

Решение задачи — единственное.

**684.** На радиусах $OA$ и $OB$ взять точки так, чтобы $OK = OM$; на продолжениях $KM$ откладываем $NK = KM = ML$ и проводим отрезки $OCN$ и $ODL$ (рис. 62,*б*).

Хорда $CD$ — искомая.

**685.** Исходя из свойства секущей, имеем:

$$AB \cdot BL = BM \cdot BD;$$

$$AC \cdot CN = CD \cdot CM \text{ (рис. 63)},$$

но так как $CM = BM$; $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, то после деления первого равенства на второе получим:

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{BL}{CN} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{BM}{CM},$$

или

$$\frac{BL}{CN} = 1; \qquad BL = CN.$$

**686.** На примере ромба видно, что не всегда описанный равносторонний многоугольник будет правильным. Но при нечетном числе сторон он будет правильным. Докажем это.

Пусть вершины многоугольника, имеющего $(2n + 1)$ сторону, будут обозначены $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$, а точки касания сторон с окружностью через $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$ (рис. 64).

Очевидно $A_2B_1 = A_2B_2$. Используя равенство сторон, получим

$$A_1B_{2n+1} = A_1B_1 = A_3B_2 = A_3B_3 = \ldots = A_{2n+1}B_{2n} = A_{2n+1}B_{2n+1},$$

т. е. отрезки двух смежных сторон многоугольника, сходящихся в вершине $A_1$, считая от вершины до точек касания, равны таким же отрезкам сторон, сходящихся в вершине $A_3$.

Итак, отрезки сторон, примыкающих к вершинам $A_1$ и $A_{2n+1}$, равны, т. е. $A_1B_{2n+1} = A_{2n+1}B_{2n+1}$. Следовательно, $A_1A_{2n+1}$ делится

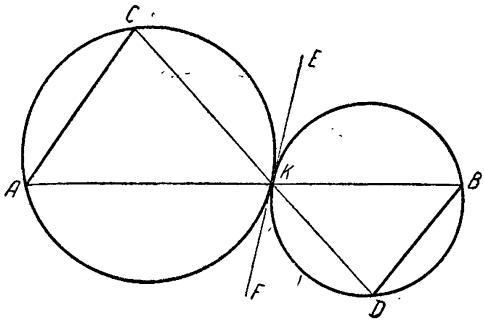
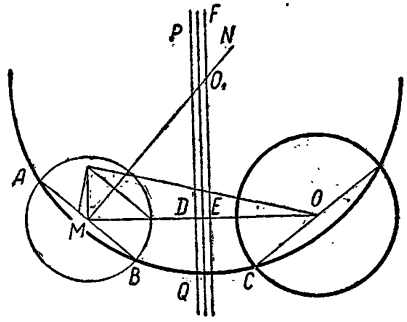



Рис. 65.




Ри. 66.

точкой касания пополам, но тогда убедимся в том, что все стороны многоугольника имеют точки касания в серединах.

Соединим точки $A_1$, $B_1$ и $A_2$ с центром $O$. Треугольник $OA_1B_1$ равен треугольнику $OB_1A_2$; угол $OA_1A_2$ равен углу $OA_2B_1$; $OA_1$ и $OA_2$ — биссектрисы углов $A_1$ и $A_2$, отсюда $\angle A_1 = \angle A_2$, а это значит, что и при всех вершинах углы равны между собой.

Таким образом, равносторонний и равноугольный многоугольник будет правильным.

**687.** Проведем через точку $K$ общую касательную $EF$, тогда $\angle CKE = \angle FKD$, как вертикальные, но $\angle A = \angle CKE$, так как оба измеряются половиной дуги $CK$; аналогично $\angle B = \angle FKD$, поэтому $\angle A = \angle B$, т. е. накрест лежащие углы при прямых $AC$ и $BD$ и секущей $AB$ равны, откуда хорды $AC$ и $BD$ параллельны (рис. 65).

**688.** Пусть даны окружность с центром $O$ и фиксированные точки $A$ и $B$. Центр искомой окружности в точке $O_1$ (рис. 66).

Центр $O_1$ должен принадлежать серединному перпендикуляру к отрезку $AB$.

Построим на $AB$, как на диаметре, вспомогательную окружность с центром в точке $M$. Обозначим радиус данной окружности через $R$, искомой — через $R_1$, а вспомогательной — через $r$:

$$O_1M^2 = O_1B^2 - MB^2;$$

$$O_1O^2 = O_1C^2 - CO^2$$

(на рисунке линии $O_1B$ и $O_1C$ не проведены).

Отсюда

$$O_1M^2 - O_1O^2 = OC^2 - MB^2 = R^2 - r^2,$$

так как

$$O_1B = O_1C = R_1.$$

Следовательно, центр искомой окружности есть точка пересечения двух геометрических мест:

1) серединного перпендикуляра к $AB$ и

2) геометрического места точек, разность расстояний которых от двух данных точек $A$ и $B$ равна $R^2 - r^2$.

Построение:

1) проводим перпендикуляр к отрезку $AB$ через его середину (точку $M$);

2) проводим вспомогательную окружность с центром в точке $M$;

3) строим геометрическое место $EF$, удовлетворяющее требованию $O_1M^2 - O_1O^2 = R^2 - r$ (см. задачу 679);

4) пересечение построенных геометрических мест $O_1$ — центр искомой окружности, радиус которой равен $R_1 = O_1A = O_1B$.

Для читателей, знакомых с радикальной осью, предлагается второй способ решения.

2-й способ решения. Пусть даны точки $A$ и $B$; окружность $O$ — геометрическое место центров окружностей, проходящих через точки $A$ и $B$, и серединный перпендикуляр $MN$ к отрезку $AB$ (рис. 66).

Построим на $AB$, как на диаметре, окружность $M$.

Геометрическое место окружностей, пересекающих окружности $O$ и $M$ в точках, являющихся концами их диаметров, есть прямая $EF$, параллельная радикальной оси $PQ$ этих окружностей и симметричная ей относительно серединного перпендикуляра к линии центров $OM$ ($PQ$ пересекает $OM$ в точке $D$; $ME = OD$; $EF \perp OM$).

Точка $O_1$ пересечения $MN$ и $EF$ — центр искомой окружности; $O_1A$ — ее радиус.

Таким образом: 1) задача имеет единственное решение, если $FE$ и $MN$ пересекаются; 2) задача имеет бесчисленное множество решений, если $FE$ и $MN$ совпадают; 3) задача не имеет решения, если $FE$ и $MN$ параллельны.

**689.** Пусть $ACB$ — прямоугольный треугольник; $CD$ — его высота, опущенная на гипотенузу $AB$ и равная $h_c$; $O$ — центр вписанной в треугольник окружности; $OL = OM = r$ — ее радиусы (рис. 67).

Проведем $OF \perp CD$. Так как $CO \geqslant CF$, а $OL = r = FD$, то $CO + OL \geqslant CF + FD$, или $r\sqrt{2} + r \geqslant h_c$ (равенство справедливо в случае равнобедренного прямоугольного треугольника, $CO = r\sqrt{2}$). Отсюда

$$r \geqslant \frac{h_c}{1+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)h_c}{1} > 0{,}4h_c.$$

Для всякого треугольника, в том числе для прямоугольного, справедливы формулы

$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \text{ и } S = \frac{ch_c}{2},$$

поэтому

$$(a+b+c)r = ch_c,$$

но

$$a+b>c; \quad a+b+c>2c; \quad 2cr<ch_c.$$

Следовательно,

$$r < \frac{h_c}{2}.$$

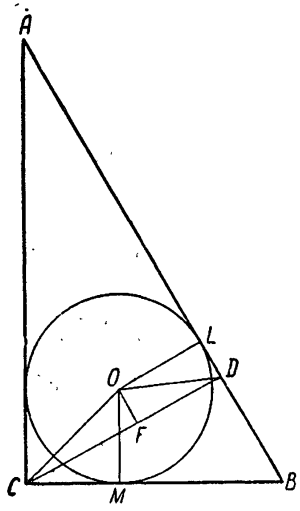



Рис. 67.

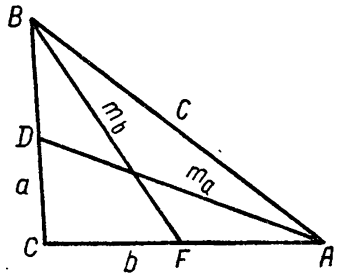



Рис. 68.

Этим и исчерпывается доказательство указанных в условии неравенств.

**690.** Известно, что медианы треугольника через его стороны выражаются такими формулами

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}.$$

По условию задачи

$$\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}} = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника $BCA$ (рис. 68) имеем

$$a = c\sin\alpha; \quad b = \cos\alpha,$$

где $\alpha = \angle BAC$.

Следовательно, подставляя эти значения в (1) и возведя выражение в квадрат, получаем

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{2c^2\cos^2\alpha + 2c^2 - c^2\sin^2\alpha}{2c^2\sin^2\alpha + 2c^2 - c^2\cos^2\alpha};$$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{2\cos^2\alpha + 2 - \sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha + 2 - \cos^2\alpha} = \frac{1+3\cos^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}.$$

По свойству пропорций имеем:

$$\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{2+3\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}=\frac{5}{3\cos 2\alpha},$$

отсюда

$$\cos 2\alpha=\frac{5}{3}\cdot\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};\quad \alpha=\frac{1}{2}\arccos\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right].$$

Примечание. Можно было не пользоваться общими формулами для медиан треугольника, а найти их непосредственно из прямоугольного треугольника:

$$m_a^2=b^2+\frac{a^2}{4};$$

$$m_b^2=a^2+\frac{b^2}{4}.$$

Разделив одно равенство на второе и заменив $a=b\operatorname{tg}\alpha$ получили бы значение $\operatorname{tg}\alpha$.

**691.** Опишем вокруг данного треугольника $ABC$ окружность и продолжим до пересечения с ней медиану $BO$, высоту $BN$ и биссектрису $BM$, которые выходят из одной вершины.

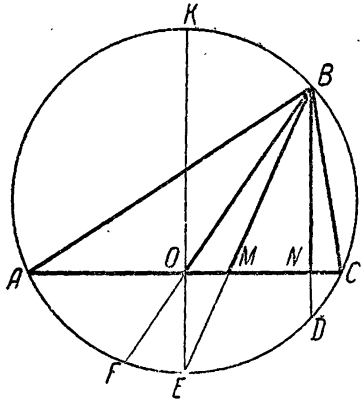


Рис. 69.

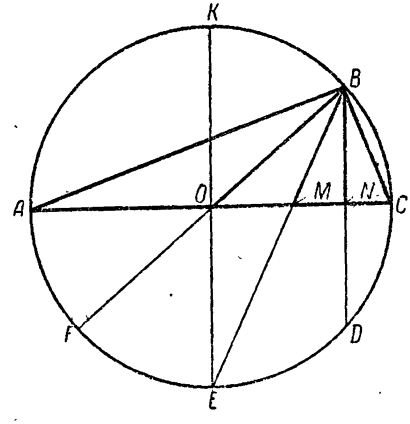


Рис. 70.

По условию задачи известно, что $\smile AF=\smile FE=\smile ED=\smile DC$ (рис. 69 и 70).

Обозначим $\angle ABF=\angle FBE=\angle EBD=\angle DBC=\alpha$. Из $\triangle BNC$ имеем, что $\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\alpha$, следовательно, $\smile AKB=\pi-2\alpha$ и, кроме того, $\smile AF=2\alpha$. Поэтому $\smile BAF=\smile BKA+\smile AF=\pi-2\alpha+2\alpha=\pi$, а это значит, что $BF$ — диаметр описанной окружности, причем точка $O$ делит $AC$ пополам (поскольку $BO$ — медиана к стороне $AC$):

$$\smile AE=\smile EC;\quad AO=OC;$$

$EOK$ — диаметр, перпендикулярный к хорде $AC$. Точка $O$ — центр описанной окружности; отсюда выходит, что $AC$ — также диаметр.

Таким образом, $\angle B = \frac{\pi}{2}$; $\angle C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$; $\angle A = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{8}$. Следовательно, рис. 69 — неверный, правильный рис. 70.

Примечание. Так как продолжение биссектрисы $BM$ делит дугу $AEC$ в точке $E$ на две равные части, то перпендикуляр, опущенный из точки $E$ на хорду $AC$, должен пройти через середину $O$ хорды и центр круга, т. е. $EK$ — диаметр круга.

Действительно, если бы перпендикуляр, опущенный из точки $E$ на хорду $AC$, не проходил бы через середину этой хорды и центр круга, то диаметр, перпендикулярный хорде и делящей ее и стягивающую ею дугу пополам, имея конец в точке $E$, был бы другим перпендикуляром, опущенным из $E$ на прямую $AC$, что невозможно. Так как $\angle OEM = \angle MBN$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых $OE$ и $BN$ и секущей $BE$), а $\angle MBN = \angle OBM$, то $\angle OEM = \angle OBM$, треугольник $BOE$ — равнобедренный и $OB = OE$. Поэтому прямая, перпендикулярная $BE$ и проходящая через ее середину, т. е. диаметр круга, должна пройти через точку $O$, точку, лежащую на другом диаметре $KE$ круга, и следовательно, $O$ — центр круга, как точка пересечения двух диаметров. $AC$ — диаметр, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$.

**692.** Из рис. 71 очевидно, что $\angle CAD = \angle C_1DD_1 = C_2D_1D_2 = \ldots$ и $\angle DCC_1 = \angle D_1C_1C_2 = D_2C_2C_3 = \ldots$, но $\angle CAD = \angle DCC_1$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому все рассматриваемые углы равны $\alpha$.

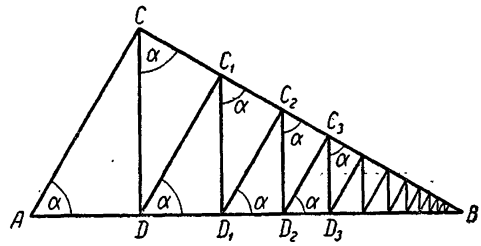


Рис. 71.

Из треугольников $ADC$, $DCC_1$, $C_1DD_1$, $D_1C_1C_2$, ... имеем

$$CD = b\sin\alpha;$$

$$C_1D = CD\sin\alpha = b\sin^2\alpha;$$

$$C_1D_1 = C_1D\sin\alpha = b\sin^3\alpha;$$

$$D_1C_2 = C_1D_1\sin\alpha = b\sin^4\alpha;$$

. . . . . .

Итак, искомая сумма равна

$$CD + C_1D + C_1D_1 + C_2D_1 + \ldots = b\sin\alpha + b\sin^2\alpha + b\sin^3\alpha + b\sin^4\alpha + \ldots = b(\sin\alpha + \sin^2\alpha + \sin^3\alpha + \sin^4\alpha + \ldots).$$

В скобках последнего равенства имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, так как знаменатель ее $\sin\alpha$ является правильной дробью.

Первый член ее равен $\sin\alpha$, а сумма ее членов будет

$$S=\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)},$$

а искомый предел суммы отрезков, следовательно, будет

$$\frac{b\sin\alpha}{2\sin^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

**693.** Диаметр $2R$ описанной окружности вокруг прямоугольного треугольника $ABC$ (рис. 72) равен его гипотенузе.

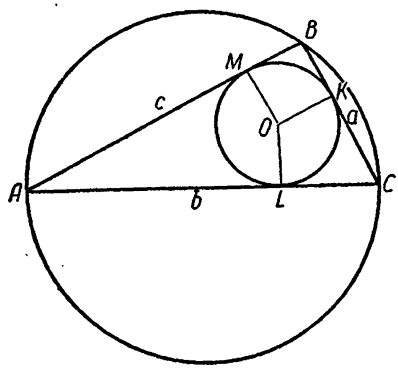



Рис. 72.

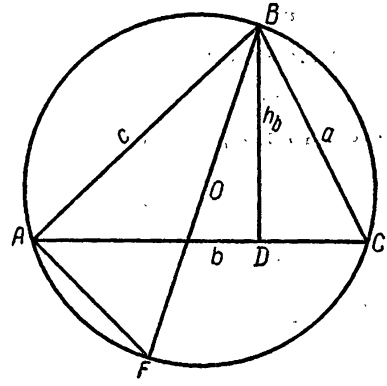



Рис. 73.

Диаметр вписанной окружности равен $MB+BK$.

Следовательно, сумма катетов равна сумме диаметров, поскольку $AB+BC=MB+BK+AM+KC=(MB+BK)+(AL+LC)=2r+2R$.

Известно, что $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$; $r=\frac{2}{5}R$.

$$c+a=2\left(R+\frac{2}{5}R\right)=\frac{14}{5}R=\frac{7}{5}b,$$

поскольку $b=2R$.

По теореме Пифагора известно, что $a^2+c^2=b^2$.

Следовательно, $c^2+2ac+a^2=\frac{49}{25}b^2$, или $b^2+2ac=\frac{49}{25}b^2$, следовательно, $ac=\frac{12}{25}b^2$.

Для того чтобы найти $a$ и $c$, необходимо составить по теореме Виета квадратное уравнение

$$z^2-\frac{7}{5}bz+\frac{12}{25}b^2=0,$$

отсюда

$$z=\frac{7}{10}b\pm\frac{b}{10}.$$

Следовательно, получаем:

$$a_1 = \frac{4}{5}b; \quad c_1 = \frac{3}{5}b;$$

$$a_2 = \frac{3}{5}b; \quad c_2 = \frac{4}{5}b.$$

Отсюда имеем:

$$\sin A_1 = \frac{4}{5}; \quad \sin C_1 = \frac{3}{5};$$

$$\sin A_2 = \frac{3}{5}; \quad \sin C_2 = \frac{4}{5}.$$

Примечание. Между тем, решая эту задачу, получаем формулу для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, $r = \frac{a+c-b}{2}$, где $a$ и $c$ — катеты, $b$ — гипотенуза.

**694.** Воспользуемся формулой

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где $R$ — радиус описанной окружности вокруг треугольника;
$a$, $b$, $c$ — стороны треугольника;
$S$ — площадь этого треугольника.

С другой стороны, $S = \frac{bh_b}{2}$.

Следовательно, $R = \frac{abc}{4\frac{bh_b}{2}}$, т. е. $ac = 2Rh_b$ (рис. 73).

Примечание. Эту теорему можно доказать, не пользуясь формулой для радиуса описанной окружности, а, наоборот, из этой теоремы вывести последнюю.

Пусть $ABC$ — данный треугольник, $BD$ — его высота, $BF$ — диаметр круга, описанного около треугольника, $O$ — центр этого круга. $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $BD = h_b$. Соединим точки $A$ и $F$.

Треугольники $ABF$ и $BDC$ (рис. 73) подобны, ибо $\angle BAF = \angle BDC = 90°$, $\angle BFA = \angle BCA$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $AB$.

Следовательно, $\frac{AB}{BF} = \frac{BD}{BC}$, или $\frac{c}{2R} = \frac{h_b}{a}$, или

$$ac = 2Rh_b. \qquad (1)$$

Умножив левую и правую части равенства (1) на $b$, получим

$$abc = 2Rh_b b.$$

Отсюда

$$R = \frac{abc}{2bh_b} = \frac{abc}{4S}.$$

**695.** А н а л и з. Предположим, что задача решена.

Рассматривая рис. 74,*а*, замечаем, что так как радиус $R$ данной окружности и отрезок $d$ касательной по условию данной задачи имеют вполне определенную длину, то длина отрезка $OM$ также постоянна ($OM^2 = R^2 + d^2$).

Любая точка окружности радиуса $OM$, концентрической данной, обладает тем свойством, что длины касательных, проведенных из этой точки к данной окружности, равны $d$. Отсюда вытекает следующее построение.

П о с т р о е н и е. Из произвольной точки $P$ (рис. 74,*б*) данной окружности проводим к ней касательную. От точки касания $P$

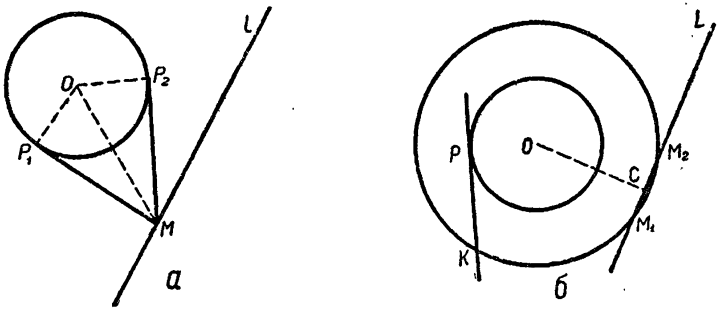



Рис. 74.

по касательной откладываем отрезок $PK$, длина которого равна $d$.

Строим окружность радиуса $OK$, концентрическую данной. Точки $M_1$ и $M_2$ пересечения этой окружности с данной прямой $l$ и есть искомые точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки $M_1$ и $M_2$ прямой $l$ принадлежат окружности радиуса $OK$ с центром $O$. Из анализа следует, что касательная, проведенная к данной окружности из любой точки концентрической ей окружности радиуса $OK$, по длине равна $d$.

И с с л е д о в а н и е. Искомые точки могут быть найдены, если существуют общие точки данной прямой $l$ и окружности, проведенной из точки $O$ радиусом $OK$. Если обозначить расстояние от центра данной окружности до данной прямой через $m$, то условие существования таких точек получит вид

$$m \leqslant \sqrt{r^2 + d^2},$$

где $r$ — длина радиуса данной окружности, а $m = OC$.

Если $m < \sqrt{r^2 + d^2}$, то задача имеет два решения; если $m = \sqrt{r^2 + d^2}$, то задача имеет одно решение; если $m > \sqrt{r^2 + d^2}$, то задача не имеет ни одного решения.

**696.** Пусть угол $B$ равен $\alpha$, тогда угол $A$ равен $2\alpha$ (рис. 75).

По теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin \alpha},$$

где $a = BC$.

Отсюда

$$a = 2b \cos \alpha. \tag{1}$$

По теореме косинусов имеем

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha. \tag{2}$$

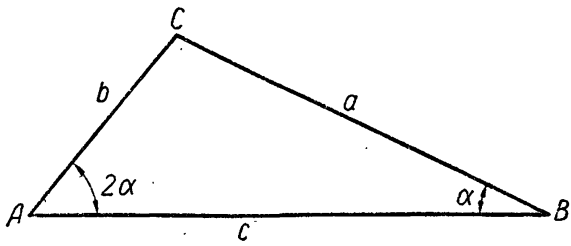



Рис. 75.

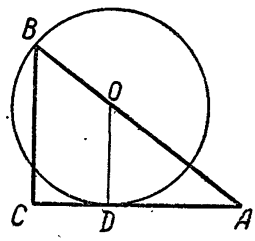



Рис. 76.

Из равенства (1) находим $\cos \alpha = \frac{a}{2b}$ и, подставляя его в равенство (2), получим

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2 c}{b},$$

или

$$b^3 = a^2 b + bc^2 - a^2 c,$$

откуда

$$a = \sqrt{b(b + c)}.$$

**697.** Обозначим искомый радиус через $r$. Пусть точка $D$ — точка касания (рис. 76).

Рассмотрим $\triangle OAD$. $\triangle OAD \sim \triangle BAC$. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{OD}{OA} = \frac{BC}{BA},$$

или

$$\frac{r}{5 - r} = \frac{3}{5},$$

так как $AB = 5$ *см*,

откуда $r = \frac{15}{8}$ *см*.

**698.** Обозначая $AD$ через $x$, получим (рис. 77),

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}; \quad CD = \sqrt{x(25-x)}$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0,$$

откуда $x = 9$, т. е. $AD = 9$ *см*; $DB = 16$ *см*; $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 15$ *см*; $CB = 20$ *см*.

По теореме о свойстве касательной и секущей, имеем

$$AD^2 = AC \cdot AE, \text{ откуда } AE = \frac{81}{15} = 5{,}4 \text{ см},$$

$$EC = 15 - 5{,}4 = 9{,}6 \text{ см}.$$

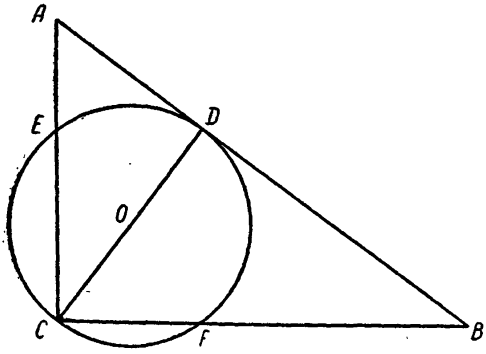



Рис. 77.

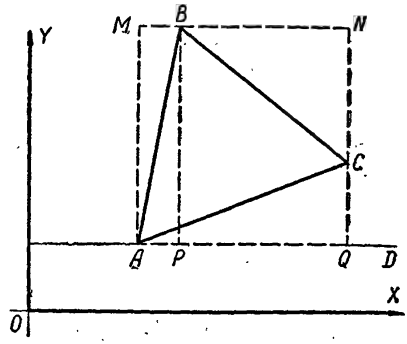



Рис. 78.

$$BD^2 = BC \cdot BF, \text{ откуда } BF = \frac{256}{20} = 12{,}8 \text{ см}.$$

$$CF = 7{,}2 \text{ см}.$$

Примечание. Из рассмотренного квадратного уравнения получаем также $x_2 = 16$, т. е. $AD = 16$.

Тогда $AE = 12{,}8$ *см*; $EC = 7{,}2$ *см*;

$BF = 5{,}4$ *см* и $FC = 9{,}6$ *см*,

т. е. получаем те же числовые результаты для искомых отрезков катетов, только поменявшихся местами, что было очевидно, и по сути оба найденные значения $x$ дают один и тот же ответ на поставленный в задаче вопрос.

**699.** Дополним данный правильный треугольник $ABC$ до прямоугольника, как указано на рис. 78. $Ox$ и $Oy$ данные взаимно перпендикулярные прямые. Длины сторон $AM$, $MN$, $NQ$ и $AQ$, а также их отрезки $MB$, $BN$, $NC$, $QC$, $QP$ и $PA$ выражаются рациональными числами, как разности одноименных координат соответствующих точек. Поэтому величины площадей прямоугольника $AMNQ$ и соответствующих прямоугольных треугольников $AMB$, $BNC$ и $CAQ$ есть также рациональные числа.

Так как

$$S_{ABC} = S_{AMNQ} - (S_{AMB} + S_{BNC} + S_{CAQ}),$$

то $S_{ABC}$ есть также рациональное число. С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $a$ — длина стороны треугольника. Но $a^2$, как величина квадрата гипотенузы, например, $\triangle AMB$ — число рациональное, поэтому $S_{ABC}$ должно быть иррациональным числом.

Доказанное противоречие свидетельствует о том, что расстояния от вершин правильного треугольника до двух взаимно перпендикулярных прямых не может быть выражено рациональными числами.

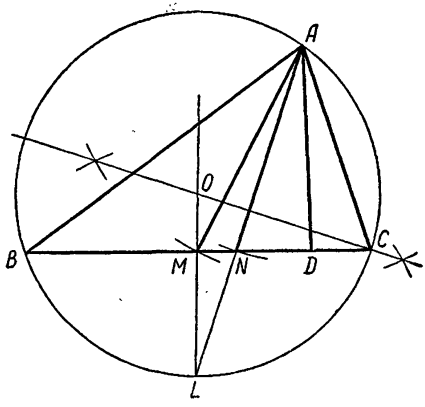



Рис. 79.

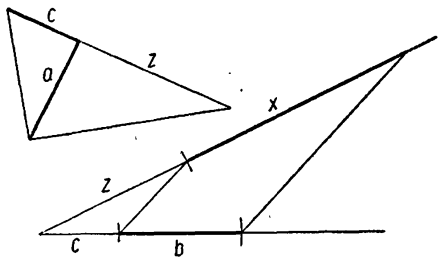



Рис. 80.

**700.** Построение. Из произвольной точки $D$ прямой (рис. 79) восставляем к ней перпендикуляр $DA$ и откладываем на нем отрезок $DA$, равный высоте треугольника. Из точки $A$, как центра, описываем дуги окружностей радиусами, равными соответственно данным медиане и биссектрисе, и фиксируем точки пересечения $M$ и $N$ с прямой. Затем из точки $M$ восставляем к прямой $MD$ перпендикуляр и отмечаем точку $L$ его пересечения с продолжением биссектрисы $AN$. Через середину $AL$ проводим к $AL$ перпендикуляр и из точки пересечения $O$ его с прямой $OL$ радиусом, равным $OL$, описываем окружность. Точки встречи $A$ и $B$ последней с прямой $MD$ соединяем с $A$. Полученный треугольник $ABC$ — искомый.

Доказательство и исследование решения предоставляем сделать читателям.

**701.** Сначала построим отрезок $z = \frac{a^2}{c}$ (рис. 80), где $a$ — среднее пропорциональное между отрезками $c$ и $z$. Поэтому $z$ находим как один из отрезков гипотенузы, на которые делит ее высота, равная $a$ и опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу.

Теперь построим отрезок $x = \frac{bz}{c}$ как четвертый пропорциональный.

**702.** Сначала нужно построить отрезок $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 81,*а*); отрезок $z$ представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого будут отрезки $a$ и $b$.

Далее строим отрезок $t = \sqrt{z^2 - c^2}$ (рис. 81,*б*). Отрезок $t$ будет катетом прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза $z$, а другой катет $c$.

После всех преобразований получаем выражение $x = \frac{t^2}{abc}$.

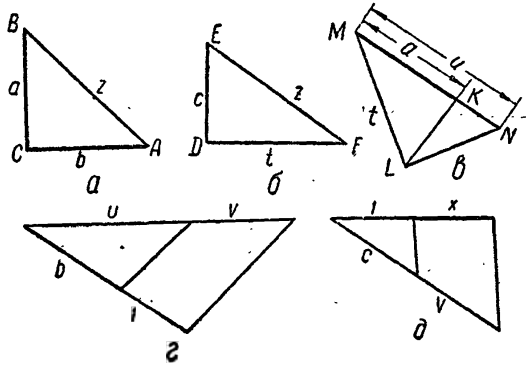



Рис. 81.

Сначала построим отрезок $u = \frac{t^2}{a}$. Отрезок $u$ можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника, катетом которого будет $t$, а $a$ — один из отрезков гипотенузы, на которые делит ее высота, опущенная из вершины прямого угла, причем отрезок $a$ прилегает к катету $t$ (рис. 81,*в*).

Рассмотрим выражение $x = \frac{u}{bc}$ (рис. 81,*г*). Строим отрезок $v = \frac{u \cdot 1}{b}$ как четвертый пропорциональный, аналогично строится $x = \frac{v \cdot 1}{c}$ (рис. 81,*д*).

Примечание. Если данные длины отрезков выражены в одних и тех же единицах измерения (единицах масштаба), то длина отрезка $x$ не имеет размерности длины, ибо размерность правой части (примем, например, единицу масштаба — 1 *см*) равна $\frac{см^2}{см^3} = \frac{1}{см}$. Поэтому, чтобы размерность правой части равнялась *см*, нужно числитель дроби умножить на $1\ см^2 = 1\ см \cdot 1\ см$, что и сделано при решении задачи.

**703.** Перепишем выражение в таком виде:

$$x = \sqrt{a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{3}}.$$

$y = a\sqrt{2}$ — стороны квадрата, вписанного в круг радиуса $a$ (рис. 82); $z = b\sqrt{3}$ — сторона правильного треугольника, вписан-

ного в круг радиуса $b$; $x = \sqrt{yz}$ — катет прямоугольного треугольника, где гипотенузой будет отрезок $y$, а отрезок ее, который прилегает к катету $x$, будет $z$ ($y > z$).

Примечание. При решении задачи число 6 принято за отвлеченное число.

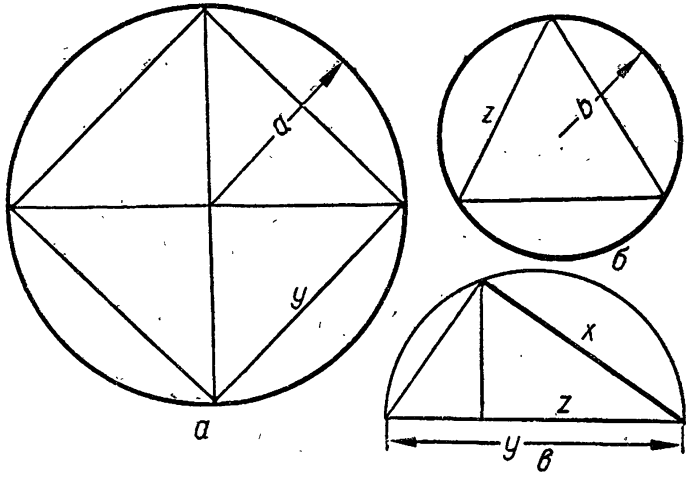



Рис. 82.

Если же 6 принять за длину отрезка, то размерность правой части будет $см^{\frac{5}{4}}$ (при выбранной единице масштаба — 1 *см*).

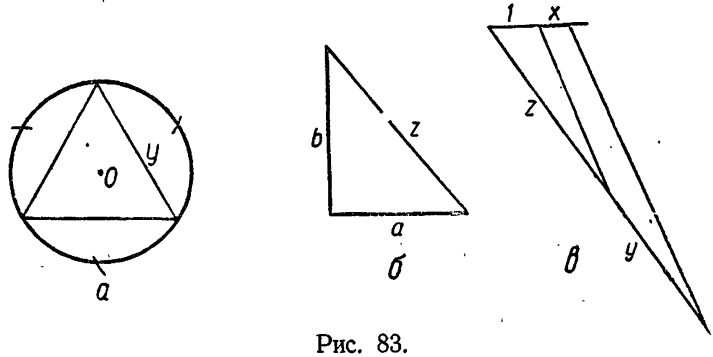



Рис. 83.

Чтобы размерность правой части была *см* нужно ее поделить на $\sqrt[4]{1}\ см^{\frac{1}{4}}$ или под радикалом поделить $\sqrt{1}\ см^{\frac{1}{2}}$.

Возможны и другие способы решения.

**704.** Указание. Представим выражение в таком виде: $x = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$. Строим отрезки (см. задачу 703):

$$y = \sqrt{ab}; \quad z = \sqrt{cd}; \quad x = \sqrt{yz}.$$

**705.** Отрезок $y = R\sqrt{3}$ (рис. 83,*а*) представляет собой сторону вписанного в окружность правильного треугольника; отрезок $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ — гипотенуза прямоугольного треугольника (рис. 83,*б*).

Отрезок $x = \frac{y \cdot 1}{z}$ находим как четвертый пропорциональный (рис. 83,*в*).

Примечание. Если 3 принять за отвлеченное число, то правая часть равенства (см. условие) также отвлеченное число. Чтобы $x$ имел размерность линейной единицы, правую часть нужно умножить на единицу масштаба, что и сделано при решении задачи.

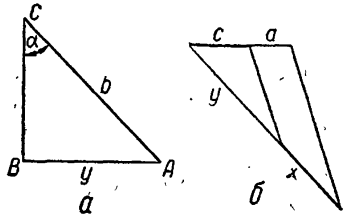



Рис. 84.

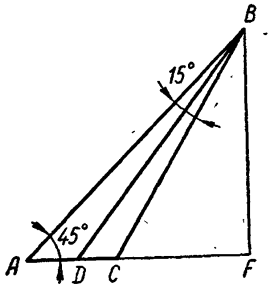



Рис. 85.

**706.** Строим отрезок $y = b\sin\alpha$ (рис. 84,*а*), где $b$ — гипотенуза, $\alpha$ — угол прямоугольного треугольника, лежащего против катета $y$, $x = \frac{ay}{c}$ находится как четвертый пропорциональный отрезок (рис. 84,*б*).

**707.** 1-й способ. $ABC$ — данный треугольник. $\angle BAC = 45°$, $\angle ABC = 15°$; $BD$ — медиана, проведенная к стороне $AC$; $BF$ — высота треугольника; $BD = m_b = 6$ *см* (рис. 85). Вычислить $S_{ABC}$.

Обозначим $BF = x$. $\angle BCF = 60°$. Тогда $CF = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

$$AF = BF = x; \quad AC = AF - CF = x - \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})x}{3}.$$

$$DF = AF - \frac{AC}{2} = x - \frac{(3-\sqrt{3})x}{6} = \frac{(3+\sqrt{3})x}{6}.$$

Из прямоугольного треугольника $DBF$ найдем:

$$DF^2 + BF^2 = DB^2,$$

или

$$\frac{(3+\sqrt{3})^2 x^2}{36} + x^2 = m_b^2.$$

Отсюда $x^2=\frac{6m_b^2}{8+\sqrt{3}}$.

$$S_{\Delta ACB}=\frac{AC\cdot BF}{2}=\frac{(3-\sqrt{3})x^2}{6}=\frac{m_b^2(3-\sqrt{3})}{8+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{m_b^2(3-\sqrt{3})(8-\sqrt{3})}{61}=\frac{36(27-11\sqrt{3})}{61}=4{,}9\ см^2.$$

Примечание 1. Как полезное упражнение по алгебре и тригонометрии рекомендуем второй способ решения задачи.

2-й способ. По теореме синусов из треугольника $ABD$, отмечая $\angle ABD=\alpha$, находим $\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\sin A}$. Аналогично из треугольника $BDC$ имеем $(\angle DBC=\beta)\ \frac{DC}{\sin\beta}=\frac{DB}{\sin C}$.

Принимая во внимание, что $AD=DC$, получаем

$$\frac{BD\sin\alpha}{\sin A}=\frac{BD\sin\beta}{\sin C},\ \text{или}\ \frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ}=\frac{\sin\beta}{\sin 120^\circ}.$$

но $\alpha+\beta=15^\circ$, поэтому

$$\frac{\sin(15^\circ-\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ},$$

или

$$\frac{\sin 15^\circ\cos\beta-\cos 15^\circ\sin\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ};$$

$$\sin 15^\circ\operatorname{ctg}\beta-\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{ctg}\beta=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\cos 15^\circ\right)\frac{1}{\sin 15^\circ}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{12+5\sqrt{3}}{3}.$$

Зная $\operatorname{ctg}\beta$, вычислим $\sin\beta$

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{12+5\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{19+10\sqrt{3}}}.$$

Теперь вычислим $DC$:

$$DC=\frac{DB\cdot\sin\beta}{\sin C}=\frac{m_c\cdot\sin\beta}{\sin C}.$$

Площадь треугольника найдем по формуле

$$S = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \sin B};$$

$$S_{ABC} = \frac{AC^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \cdot 6^2 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin C \cdot 2\sqrt{2}}{2 \cdot 4 (19 + 10\sqrt{3}) \sin^2 C (\sqrt{3} - 1)} =$$

$$= \frac{36 \cdot 3 \cdot 2(\sqrt{3}+1)}{(19+10\sqrt{3}) 2\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{19+10\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{36\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(19-10\sqrt{3})}{61} = \frac{36(27-11\sqrt{3})}{61} \approx 4{,}9 \text{ см}^2.$$

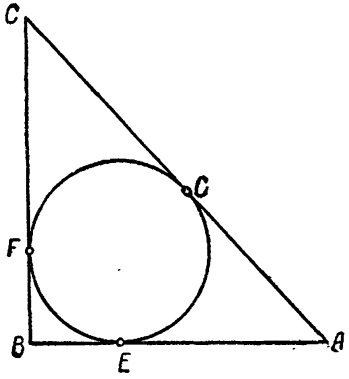



Рис. 86.

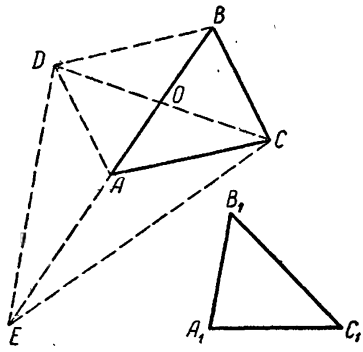



Рис. 87.

Примечание 2.

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4-2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1).$$

Аналогично

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1).$$

**708.** Обозначим отрезок $AG$ (рис. 86) через $a$, отрезок $GC$ через $b$. Известно, что касательные, выходящие из одной точки окружности, равны между собой.

Обозначим отрезок $BE = BF = z$, тогда

$$AB = a + z; \quad BC = b + z; \quad AC = a + b.$$

По теореме Пифагора

$$(a+z)^2 + (b+z)^2 = (a+b)^2,$$

отсюда

$$z^2 + (a + b)z - ab = 0,$$

или

$$z^2 + (a + b)z = ab.$$

Таким образом,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(a+z)(b+z)}{2} = \frac{z^2 + (a+b)z + ab}{2},$$

заменяя $z^2 + (a + b)z$ через $ab$, находим $S = ab$.

**709.** Пусть стороны $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 87) соответственно равны медианам $\triangle ABC$. Перенеся параллельно сторону $AC$ данного треугольника $ABC$ в положение $BD$ и отложив на продолжении $AB$ за точку $A$ отрезок $AE = AB$, получим $\triangle CDE$, стороны которого равны удвоенным медианам треугольника $ABC$, следовательно, и удвоенным сторонам $\triangle A_1B_1C_1$. Тогда треугольники $A_1B_1C_1$ и $CDE$ подобны и площади их относятся, как 1 : 4.

Но площадь $\triangle CDE$ в три раза больше площади $\triangle ABC$. Таким образом, площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $ABC$ относятся, как 3 : 4.

Примечание. Полученный четырехугольник $ADBC$ — параллелограмм, поэтому $S_{ADC} = S_{ABC}$. Согласно построению $AE = AB$, откуда следует, что $AO = \frac{1}{3}EO$. Вычисляя площади треугольников $DEC$ и $DAC$, замечаем, что у них общее основание $DC$, а высота одного треугольника, проведенная на это основание (на рис. не указана), в три раза больше соответствующей высоты другого. Следовательно, площадь треугольника $CDE$ в три раза больше площади треугольника $DAC$ и в три раза больше площади равновеликого $DAC$ треугольника $ABC$.

**710.** Так как данный вписанный в окружность треугольник равносторонний, то его стороны отсекают сегменты, равные по площади. Поэтому для определения площади любого из них достаточно разность площадей круга и треугольника разделить на три равные части (рис. 88).

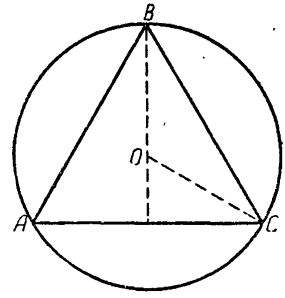


Рис. 88.

Указание. Для вычисления радиуса круга $r$ можно воспользоваться формулой $a = r\sqrt{3}$.

**711.** По условию $AC = 5a$, $BC = 3a$, $AB = 4a$, где $a$ — действительное число, большее нуля (рис. 72).

Обозначим радиус вписанной окружности через $r$, а описанной — через $R$. Найдем выражения $r$ и $R$ через стороны данного треугольника.

Принимая во внимание, что данный треугольник прямоугольный (сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей), найдем,

что площадь данного треугольника равна $\frac{AB \cdot BC}{2} = 6a^2$, с другой стороны, ее можно вычислить по формуле $S_\Delta = pr$, где $p$ — полупериметр, а $r$ — радиус вписанной окружности; тогда получим

$$pr = 6a^2; \quad r = a,$$

и площадь круга, вписанного в данный треугольник, будет равна

$$S_1 = \pi a^2.$$

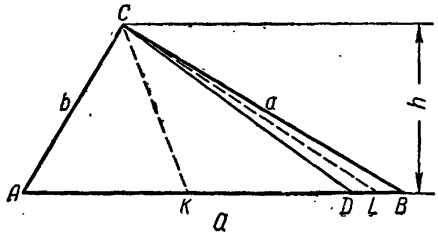



Рис. 89.

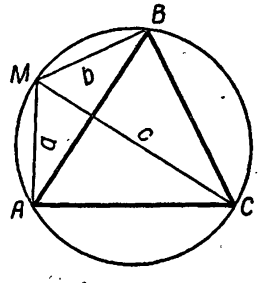



Рис. 90.

Площадь круга с радиусом $R$, центр которого находится на середине гипотенузы данного треугольника, определяется по формуле

$$S_2 = \pi R^2 = \pi \frac{25a^2}{4}$$

(так как $AB = 2R = 5a$).

Таким образом,

$$S_1 : S_2 = \pi a^2 : \frac{25\pi a^2}{4} = 4 : 25.$$

Примечание. Радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, определяется формулой $r = \frac{a+b-c}{2}$, где $a$, $b$ — катеты, $c$ — гипотенуза треугольника. Радиус же описанного около треугольника круга равен $R = \frac{c}{2}$, поэтому $S_1 : S_2 = r^2 : R^2$, или

$$S_1 : S_2 = \left(\frac{3+4-5}{2}\right)^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 : 25.$$

712. Пусть дан прямоугольный треугольник $ABC$ (рис. 89), $D$ — произвольная точка гипотенузы, $CK$ и $CL$ — медианы треугольников $ACD$ и $DCB$. Тогда очевидно, что площадь $\triangle ACK$ равна площади $\triangle KCD$, так как оба треугольника имеют равные основания (по построению) и общую высоту. Из тех же соображений заключаем, что площадь $\triangle DCL$ равна площади $\triangle LCB$.

Тогда очевидно, что площадь $\triangle KCL$ равна половине площади $\triangle ACB$, т. е. площадь $\triangle KCL = \frac{ab}{4}$.

Замечание. К этому выводу можно прийти и другим путем, если принять во внимание, что основание треугольника $KCL$, отрезок $KL$, равен половине $AB$, а высота этого треугольника равна высоте треугольника $ACB$, проведенной из точки $C$.

**713.** Пусть $M$ (рис. 90) — произвольная точка на окружности; правильный треугольник $ABC$ — вписанный в окружность; $AM$, $MB$ и $MC$ — расстояния от вершин треугольника до точки $M$. Нужно доказать, что $AM^2 + MB^2 + MC^2 = \text{const}$. Обозначим длины сторон треугольника через $d$, $AM = a$, $BM = b$ и $MC = c$.

По теореме косинусов находим:

1) $d^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60° =$

$= a^2 + c^2 - ac$ (из $\triangle AMC$);

2) $d^2 = c^2 + b^2 - bc$ (из $\triangle MBC$);

3) $d^2 = a^2 + b^2 + ab$ (из $\triangle AMB$).

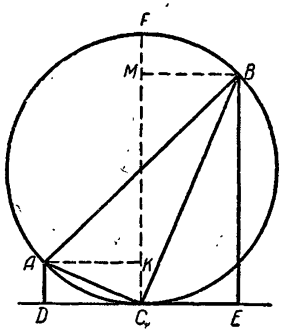


Рис. 91.

Вычитаем (2) из (3):

$$a^2 - c^2 + ab + bc = 0,$$

или

$$(a - c)(a + c) + b(a + c) = 0;$$

$$(a + c)(a - c + b) = 0,$$

но $a + b \neq 0$, поэтому $c = a + b$ (4). Сложим теперь все три равенства почленно и, принимая во внимание, что из (4) $a + b = c$ и $ab = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}$, получим

$$3d^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab - c(a + b) = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 +$$

$$+ \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2} - c^2 = \frac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + c^2 - a^2 - b^2 - 2c^2}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

откуда

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2d^2.$$

**714.** Искомая площадь треугольника $ABC$ (рис. 91) равна площади трапеции $EDAB$ без суммы площадей треугольников $ACD$ и $CBE$.

Площадь трапеции $EDAB$, в которой будем считать $BE = q$ нижним основанием и $DA = p$ — верхним основанием, определится по формуле

$$S = \frac{BE + DA}{2} DE = \frac{p + q}{2} DE.$$

Проведем диаметр $CF$ через вершину $C$ треугольника $ABC$. Так как радиус в точке касания перпендикулярен касательной, то прямая $CF$ параллельна прямым $AD$ и $BE$.

Обозначим длину отрезка $DC$ через $x$, а $CE$ через $y$; опустим из точек $A$ и $B$ перпендикуляры $AK$ и $BM$ на диаметр; очевидно, что $AK = x$, $BM = y$. Так как эти отрезки являются средними пропорциональными между отрезками диаметра, на которые они его делят, то будут справедливы равенства

$$CK \cdot KF = x^2; \quad CM \cdot MF = y^2.$$

Следовательно,

$$p(2R - p) = x^2; \quad q(2R - q) = y^2,$$

откуда

$$x = \sqrt{p(2R - p)};$$

$$y = \sqrt{q(2R - q)}.$$

Принимая во внимание, что $DE = x + y$, можем записать площадь трапеции $EDAB$ в таком виде:

$$S = \frac{(p + q)(x + y)}{2} = \frac{px + qx + py + qy}{2}.$$

Площадь треугольника $DAC$ равна $S_1 = \frac{px}{2}$.

Площадь треугольника $CBE$ равна $S_2 = \frac{qy}{2}$.

И, наконец, искомая площадь треугольника $ABC$

$$S_{ABC} = S - (S_1 + S_2) = \frac{px + qx + py + qy - px - qy}{2} = \frac{qx + py}{2}.$$

Представляя найденные значения $x$ и $y$, получим:

$$S_{ABC} = \frac{p\sqrt{q(2R - q)} + q\sqrt{p(2R - p)}}{2}.$$

**715.** Строим треугольник $MOB$, стороны которого равны $MB = \frac{2}{3}m_b$, $MO = \frac{1}{6}AB$ и $OB = \frac{1}{2}AB$, где $m_b$ и $AB$ — данные медианы и гипотенуза. Построим затем окружность на $AB$, как на диаметре, продолжив предварительно $OB$ на расстояние $OA = OB$. Продолжая $OM$ до пересечения в точке $C$ с окружностью и соединив точки $C$ с $A$ и $C$ с $B$, получим искомый треугольник $ACB$ (рис. 92).

Доказательство. Очевидно построенный треугольник — прямоугольный, имеющий данную гипотенузу.

Медиана $OC$ равна половине гипотенузы, $MO = \frac{1}{3}OC$. Основываясь на том, что прямая, проведенная из вершины угла треугольника и отсекающая от другой медианы $\frac{1}{3}$ ее часть, считая от соот-

ветствующего основания, является также медианой треугольника, заключаем, что $BD$ будет медианой, проведенной к катету. Так как точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины, то длина медианы $BD$ — данная.

**716.** $ABCD$ — данный параллелограмм. $AF$, $AK$, $DL$, $DK$, $CE$, $CL$, $BE$, $BF$ — прямые соединяющие вершины параллелограмма с серединами противоположных сторон. $MPQRSTHN$ — восьмиугольник, образованный указанными прямыми (рис. 93).

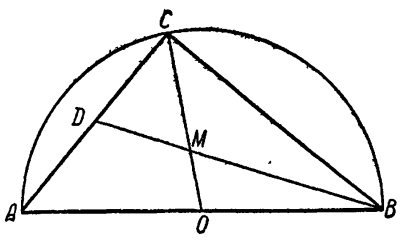



Рис. 92.

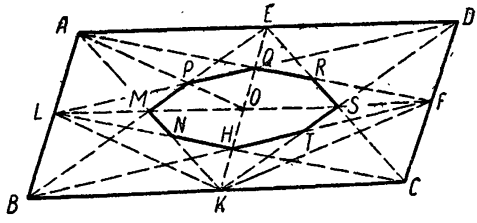



Рис. 93.

Проведем прямые, соединяющие вершину параллелограмма с его центром симметрии ($AO$) и середины его сторон ($EK$ и $LF$). Докажем, что прямые $BE$, $LD$ и $AO$ пересекаются в одной точке $P$.

$\triangle ALP \sim \triangle QOP$, причем $QO = \frac{AL}{2}$ $\left(QO = \frac{EO}{2} = \frac{AL}{2}\right.$, что видно из параллелограмма $ALOE$). Поэтому

$$\frac{AL}{QO} = \frac{AP}{PO}; \quad AP = 2PO, \text{ или } OP = \frac{1}{3}AO.$$

Это также видно из $\triangle ALF$, для которого $LQ$ и $AO$ являются медианами. Рассмотренный в тексте вывод может служить одним из доказательств теоремы о свойстве точки пересечения медиан треугольника.

Но $AO$ и $EM$ — медианы $\triangle AEK$, точка их пересечения также от $AO$ отсекает третью часть, считая от соответствующей стороны. Следовательно, $BE$, $AO$ и $LD$ пересекаются в одной точке $P$.

Рассмотрим $\triangle POQ$. Его высота равна $\frac{1}{3}$ части высоты треугольника $AKE$ (высота на рисунке не проведена), а основание $QO = \frac{1}{4}KE$ — основания $\triangle AKE$, поэтому

$$S_{POQ} = \frac{1}{12}S_{AKE} = \frac{1}{48}S_{ABCD}.$$

Полученный в результате построения восьмиугольник состоит из 8 треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{48}$ части

площади данного параллелограмма, это доказывается совершенно аналогично предыдущему.

Отсюда

$$S_{MPQRSTHN} = \frac{8}{48} S_{ABCD} = \frac{1}{6} S_{ABCD}.$$

**717.** Нужно выразить разность квадратов диагоналей $AC = p$; $BD = q$ через стороны $AB = CD = m$; $AD = CB = n$ и площадь $S$ (рис. 94).

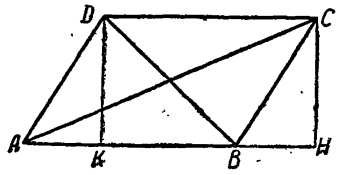



Рис. 94.

Проведем в параллелограмме высоты $CH$, $DK$ и введем следующие обозначения: $CH = DK = h$; $BH = AK = k$.

Из треугольников $ABC$ и $ABD$ имеем

$$p^2 = m^2 + n^2 + 2mk;$$
$$q^2 = m^2 + n^2 - 2mk,$$

или

$$p^2 - q^2 = 4mk.$$

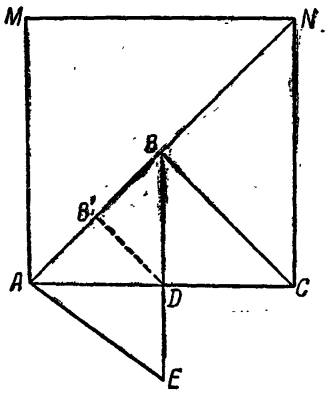



Рис. 95.

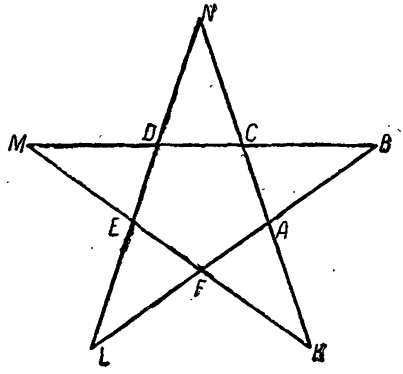



Рис. 96.

Из треугольников $CBH$ или $ADK$ имеем

$$k = \sqrt{n^2 - h^2}.$$

Следовательно,

$$p^2 - q^2 = 4m\sqrt{n^2 - h^2} = 4\sqrt{m^2n^2 - m^2h^2},$$

но

$$S = mh,$$

откуда

$$p^2 - q^2 = 4\sqrt{m^2n^2 - S^2}.$$

**718.** Пусть $AMNC$ — данный квадрат (рис. 95). Обозначим его площадь через $k^2$. Проведем диагональ $AN$ и разделим ее в точке $B$ пополам. Имеем $2AB^2 = AC^2 = k^2$.

Следовательно, $AB^2 = \frac{k^2}{2}$.

Возьмем точку $B'$ на середине отрезка $AB$, проведем $BD$ перпендикулярно $AC$, тогда отметим, что $2B'A^2 = AD^2 = \frac{k^2}{4}$, или $B'A^2 = \frac{k^2}{8}$.

Возьмем на продолжении $BD$ отрезок $DE = B'D = AB'$, получим

$$EA^2 = DE^2 + AD^2 = \frac{k^2}{8} + \frac{k^2}{4} = \frac{3}{8}k^2.$$

Следовательно, $AE$ — сторона искомого квадрата.

**719.** Сумма внутренних углов пятиугольника $ACDEF$ (рис. 96) $2d\,(5 - 2) = 6d$, вместе с вертикальными углами это будет равно $12d$.

Сумма углов при основаниях треугольников $ABC$; $CND$; $DME$; $ELF$; $FKA$ равна $20d - 12d = 8d$.

Сумма внутренних углов этих треугольников будет $10d$.

Следовательно,

$$\angle B + \angle N + \angle M + \angle L + \angle K = 2d.$$

Примечание. Так как вокруг пятиугольной звезды, если она имеет правильную форму, можно описать окружность, то каждый из острых внутренних углов этой звезды при ее вершине является вписанным в окружность и, следовательно, равным $\frac{4d}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}d$, а сумма всех рассматриваемых углов $\frac{2}{5}d \cdot 5 = 2d$.

**720.** Пусть $\angle BAD = 2\alpha$, тогда $\angle CAD = \alpha$ (рис. 97).

Проведем $CF \parallel BD$. Трапеция $ABCD$ — равнобочная, отсюда $\triangle ACF$ также равнобедренный, поскольку $\angle CAF = \angle CFA = \alpha$.

$$\angle CDF = 180° - 2\alpha,$$

откуда

$$\angle DCF = \alpha,$$

следовательно, $CD = DF$, так как треугольник $CDF$ равнобедренный.

Имеем $AB = CD = BC$; $AD = 2BC$; $BC = DF$, следовательно, $AF = 3BC$, а отсюда $KD = \frac{BC}{2} = \frac{CD}{2}$.

$$h = CK = \sqrt{CD^2 - \frac{DK^2}{4}} = \sqrt{BC^2 - \frac{BC^2}{4}} = \frac{BC\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\text{трап. } ABCD} = \frac{AD + BC}{2}h, \text{ или } S_{ABCD} = \frac{3}{2}BC\,\frac{BC\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{3}{4}BC^2\sqrt{3} = 27\sqrt{3},$$

откуда

$$BC = 6\ см; \quad AD = 12\ см.$$

**721.** Проведем высоту $EF$ трапеции $ABCD$ через точку пересечения диагоналей $O$; точки $E$ и $F$ будут серединами оснований трапеции (рис. 98).

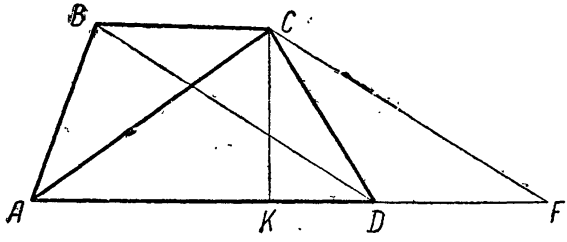



Рис. 97.

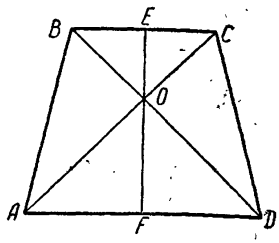



Рис. 98.

Рассмотрим $\triangle FOD$ и $\triangle OEC$. Эти треугольники прямоугольные и равнобедренные, поэтому

$$EF = EO + OF = EC + FD = \frac{AD + BC}{2} = m.$$

Отсюда площадь трапеции будет $m^2$.

**722.** Если две окружности пересекаются под прямым углом, то это означает, что касательные к этим окружностям в точках их пересечения образуют прямые углы, или радиусы двух окружностей, проведенные в точки пересечения, взаимно перпендикулярны.

Площадь общей части двух равных кругов состоит из площадей

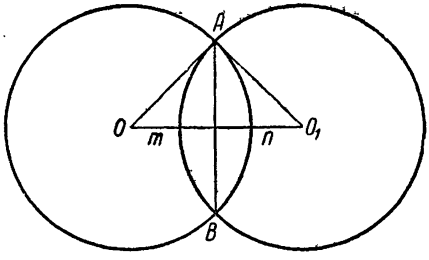



Рис. 99.

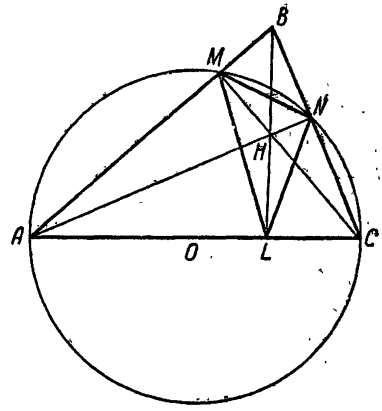



Рис. 100.

двух одинаковых сегментов (рис. 99) $OAnB$ и $O_1BmA$. Для решения задачи нужно найти удвоенную площадь одного из сегментов.

$$2S_{OAnB} = 2(S_{\text{сект. } OAnB} - S_{\Delta\ OAB}) = 2\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)r^2,$$

где $r$ — радиус круга.

Искомое отношение будет равно

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)r^2 : \pi r^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 0{,}18.$$

723. $ABC$ — данный треугольник; $BL$, $CM$ и $AN$ — его высоты; $H$ — ортоцентр (рис. 100).

Так как $\angle AMC = \angle ANC = 90°$, то описанная на $AC$, как на диаметре, окружность пройдет через точки $A, M, N, C$.

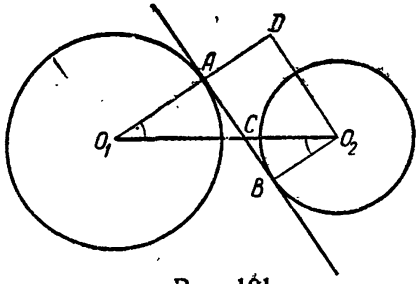



Рис. 101.

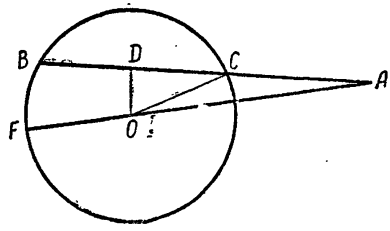



Рис. 102.

$\angle CMN = \angle NAC$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Но

$\angle NAC + \angle NCA = 90°$ (как сумма острых углов $\triangle NAC$)

и

$$\angle CMN + \angle NMB = 90°,$$

поэтому

$$\angle NMB = \angle NCA.$$

Значит, $\triangle NMB \sim \triangle ABC$, ибо, кроме того, они имеют общий угол $B$.

Аналогично доказывается, что $\triangle MAL \sim \triangle ABC$ и $\triangle NLC \sim \sim \triangle ABC$.

Следовательно, образовавшиеся при вершинах $A$, $B$ и $C$ треугольники подобны между собой.

Из подобия треугольников $BMN$ и $MAL$ следует, что $\angle BMN = \angle AML$, откуда $\angle HML = \angle HMN$ (как дополняющие каждый из углов $BMN$ и $AML$ до 90°) и $MC$ является биссектрисой угла $NML$. Точно так доказывается, что $AN$ — биссектриса угла $MNL$, $BL$ — биссектриса угла $MLN$.

724. Искомые углы $AO_1C = \alpha_1$ (рис. 101) и $BO_2C = \alpha_2$ равны между собой как внутренние накрест лежащие при параллельных $O_1A$ и $O_2B$ и секущей $O_1O_2$.

Проведем из точки $O_2$ прямую $O_2D \parallel BA$ до пересечения в точке $D$ с продолжением радиуса $O_1A$. Тогда, очевидно, $AD = r_2$ и $O_1D = r_1 + r_2$. Так как $O_1O_2 = f$, то из прямоугольного треугольника $O_1O_2D$ находим

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{r_1 + r_2}{f}.$$

Очевидно, что задача имеет решение только тогда, когда $r_1 + r_2 \leqslant f$.

**725.** Опустив на хорду $BC = a$ перпендикуляр $OD$ (рис. 102), получим

$$OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Обозначив искомый угол $CAO$ через $\alpha$, найдем

$$\sin\alpha = \frac{OD}{OA} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2\alpha}.$$

**726.** По условию задачи должно выполняться такое равенство:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$ (рис. 103).

Действительно, если через точку $O$ — середину стороны $CB$ — проведем прямую $KL$, параллельную $AD$, то получим параллело-

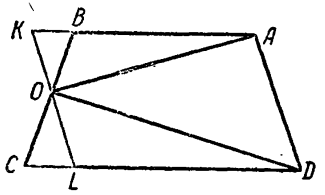



Рис. 103.

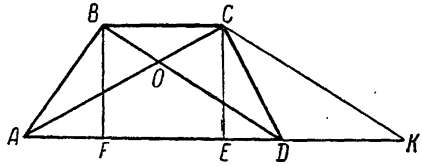



Рис. 104.

грамм, равновеликий нашей трапеции $ABCD$, но площадь $\triangle AOD$ равна половине площади параллелограмма $ADLK$.

**727.** Пусть $AD = a$; $BC = b$; $BD = c$; $AC = d$ (рис. 104). Проводим $CK \parallel BD$, поэтому $CK = c$, а $DK = b$.

$$S_{\Delta ACK} = S_{\text{трап. } ABCD}.$$

Площадь треугольника $ACK$ вычислим по формуле Герона, поскольку все его стороны известны:

$$AK = a + b; \quad AC = d; \quad CK = c.$$

$$S_{ABCD} = S_{ACK} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c+d}{2} \cdot \frac{a+b-c+d}{2} \cdot \frac{a+b-d+c}{2} \cdot \frac{d+c-a-b}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c+d)(a+b-d+c)(d+c-a-b)}.$$

Треугольники $BOC$ и $ACK$ подобны, так как углы этих треугольников равны, а площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон. Поэтому $\frac{S_{BOC}}{S_{ACK}} = \frac{b^2}{(a+b)^2}$, отсюда

$$S_{BOC} = \frac{b^2}{4(a+b)^2}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b+d-c)(a+b-d+c)(d+c-a-b)}.$$

Аналогично вычисляется площадь треугольника $AOD$:

$$S_{AOD} = \frac{a^2}{4(a+b)^2}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c+d)(a+b-d+c)(a+c-a-b)}.$$

**728.** Обозначим сторону $DE$ (рис. 105) треугольника $DEL$ через $a$, сторону $FH$ треугольника $FEH$ — через $b$, сторону $EG$ треугольника $EMG$ — через $c$, а площади этих треугольников — соответственно через $S_1$, $S_2$, $S_3$. Тогда сторона $AC$ данного треугольника $ABC$ будет равна $AC = a + b + c$.

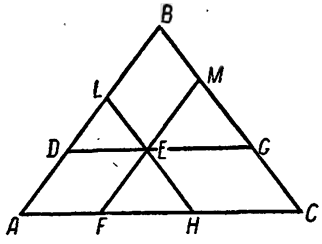


Рис. 105.

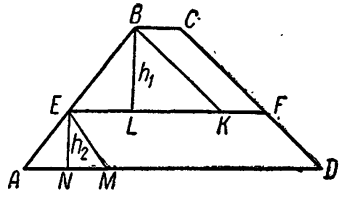


Рис. 106.

Треугольники $ABC$; $DEL$; $FEH$ и $MEG$ подобны.

Поэтому:

$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}; \quad \frac{S_2}{S_{ABC}} = \frac{b^2}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{S_3}{S_{ABC}} = \frac{c^2}{(a+b+c)^2},$$

отсюда

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}} = 1;$$

$$S_{ABC} = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$$

**729.** По условию задачи известно, что $BC = 1$ *см*; $AD = 7$ *см* (рис. 106). Проведем $BK$ параллельно $CF$; $EM$ параллельно $FD$. Обозначим $BL$ через $h_1$; $EN$ — через $h_2$, а $EF$ — через $x$. Согласно условию задачи имеем

$$\frac{x+1}{2}h_1 = \frac{x+7}{2}h_2; \tag{1}$$

$\triangle EBK \sim \triangle AEM$. Из подобия вытекает, что

$$\frac{x-1}{h_1} = \frac{7-x}{h_2}. \tag{2}$$

Перемножив (1) и (2), получим

$$\frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{(x+7)(7-x)}{2},$$

отсюда $x = 5$ *см*.

730. Площадь трапеции будет

$$S = \frac{a+b}{2}h,$$

откуда

$$h = \frac{2S}{a+b}.$$

Отрезок $AE = FD = \frac{b-a}{2}$ (рис. 107). Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\widehat{BAE}) = \frac{BE}{AE} = \frac{\frac{2S}{b+a}}{\frac{b-a}{2}} = \frac{4S}{b^2-a^2};$$

$$\angle BAE = \operatorname{arctg}\frac{4S}{b^2-a^2}.$$

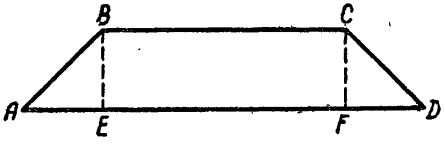



Рис. 107.

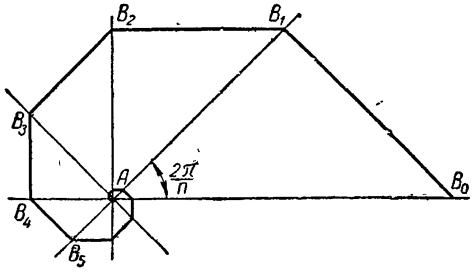



Рис. 108.

731. В обозначениях, принятых на рис. 108, имеем

$$AB_1 = AB_0\cos\frac{2\pi}{n};$$

$$AB_2 = AB_1\cos\frac{2\pi}{n} = AB_0\cos^2\frac{2\pi}{n};$$

. . . . . .

. . . . . .

$$AB_k = AB_{k-1}\cos\frac{2\pi}{n} = AB_0\cos^k\frac{2\pi}{n};$$

. . . . . .

. . . . . .

Поэтому отрезки ломаной $B_kB_{k-1} = AB_{k-1}\sin\frac{2\pi}{n} =$ $= AB_0\cos^{k-1}\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}$.

Следовательно,

$$l = d\sin\frac{2\pi}{n} + d\cos\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} + \ldots =$$

$$= d\sin\frac{2\pi}{n}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \ldots\right).$$

В скобках имеем сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\left(\left|\cos\frac{2\pi}{n}\right|<1\right).$$

Итак,

$$l=\frac{d\sin\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}=\frac{2d\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{n}}=d\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

при фиксированном целом положительном $n$.
С возрастанием $n$ величина $l$ возрастает и при $n\to\infty$ также $l\to\infty$, так как при $\alpha\to 0$ функция $\operatorname{ctg}\alpha$ неограниченно возрастает.

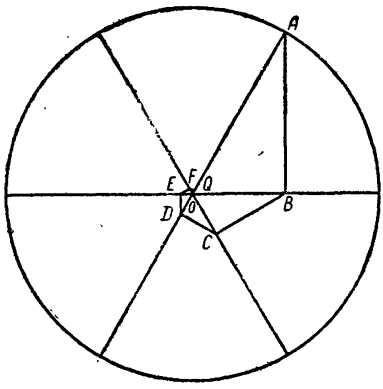



Рис. 109.

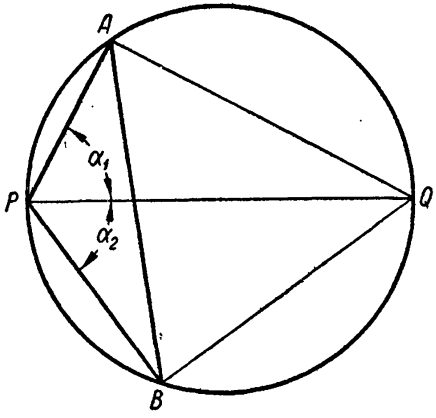



Рис. 110.

**732.** Поскольку окружность (рис. 109) разделена на шесть равных частей, то $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle FOA=60°$ (см. задачу 731).

Отрезок $OB$ есть проекция радиуса $OA=R$ на радиус $OM$, следовательно, $OB=R\cos 60°$.

В свою очередь, проекция

$OC=OB\cos 60°=R\cos^2 60°$; $OD=OC\cos 60°=R\cos^3 60°$;

. . . . . .

. . . . . .

Итак, первый радиус и последовательные его проекции представляют геометрическую прогрессию, первый член которой $R=64$ и знаменатель которой $\cos 60°=\frac{1}{2}$. Поэтому, искомая проекция

$$OQ=a_7=a_1q^{7-1}=64\left(\frac{1}{2}\right)^6=1\ см.$$

**733.** Не нарушая общности, можно две данные хорды расположить по обе стороны диаметра окружности так, как указано на рис. 110.

Обозначим данные хорды $PA = a$, $PB = b$, $\angle APQ = \alpha_1$ и $\angle QPB = \alpha_2$. $AB = x$ — искомая хорда; $PQ = 2R$ — диаметр круга.

Из треугольника $APB$ по теореме косинусов находим

$$AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2AP \cdot PB \cos \angle APB,$$

или

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_1 + \alpha_2),$$

или

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2).$$

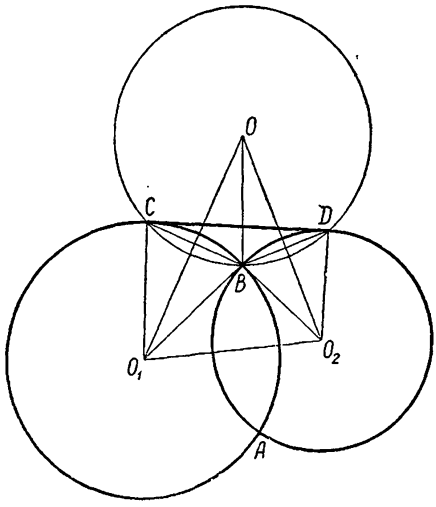


Рис. 111.

Но

$$\cos \alpha_1 = \frac{a}{2R}; \quad \sin \alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}};$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{b}{2R}; \quad \sin \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}}.$$

Поэтому

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \left( \frac{ab}{4R^2} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} \right),$$

или

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{b^2}{4R^2}\right) + 2ab \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + b^2 \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right),$$

или

$$x^2 = \left( a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} \right)^2.$$

Отсюда

$$x = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

Для читателей, знакомых с теоремой Птоломея, решение задачи значительно упрощается. По теореме Птоломея имеем

$$2Rx = a \sqrt{4R^2 - b^2} + b \sqrt{4R^2 - a^2},$$

откуда

$$x = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

**734.** Пусть $O_1$ — центр окружности $ABC$; $O_2$ — центр окружности $ABD$ и $O$ — центр окружности $DBC$ (рис. 111).

$$\angle BO_1O = \angle BCD = \angle BOO_2;$$
$$\angle BO_2O = \angle BDC = \angle BOO_1,$$

следовательно,

$$\triangle BOO_1 \sim \triangle BOO_2.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{r_1}{R} = \frac{R}{r_2};$$

$$R^2 = r_1 r_2;$$

$$D^2 = D_1 D_2.$$

Примечание. $\angle BO_1O = \angle BCD$ как угол центральный и угол, составленный касательной и хордой окружности $O_1$, измеряющиеся $\frac{1}{2}$ дуги $CB$.

$\angle BCD = \angle BOO_2$ как углы вписанный и центральный окружности $O$, измеряющиеся $\frac{1}{2}$ дуги $BD$.

$r_1$, $r_2$, $r$; $D_1$, $D_2$ и $D$ — соответственно радиусы и диаметры окружностей с центрами в точках $O_1$, $O_2$ и $O$.

## Стереометрия

**735.** Пусть через диагональ $AC$ параллелограмма $ABCD$ проведена плоскость $P$. Опустим из точек $B$ и $D$ перпендикуляры $BB_1$ и $DD_1$ на плоскость $P$, соединим точку $D_1$ с точкой $B_1$ и сравним прямоугольные треугольники $OBB_1$ и $ODD_1$ (рис. 112).

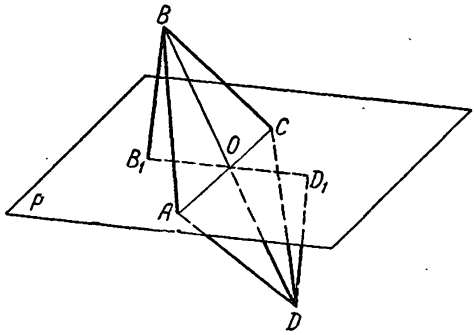



Рис. 112.

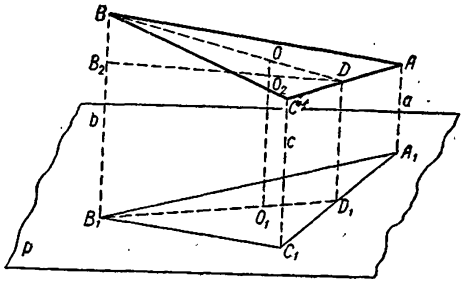



Рис. 113.

$\triangle OBB_1 = \triangle ODD_1$, так как $\angle BOB_1 = \angle DOD_1$, $OB = OD$. Отсюда вытекает, что

$$BB_1 = DD_1.$$

**736.** В $\triangle ABC$ проведем медиану $BD$ и спроектируем ее на плоскость $P$ (рис. 113). $O$ — центр тяжести треугольника $ABC$ (центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан), $OD = \frac{1}{3} BD$, $DD_1$ — расстояние от точки $D$ до плоскости $P$. Прямые

$AA_1$, $CC_1$, $BB_1$ и $OO_1$ параллельны между собой, $ACC_1A_1$ — трапеция, $DD_1$ — ее средняя линия, следовательно,

$$DD_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{a+c}{2}.$$

В трапеции $BDD_1B_1$ проведем прямую $DB_2 \parallel D_1B_1$. $O_2$ — точка пересечения прямых $OO_1$ и $DB_2$. Из подобия треугольников $BB_2D$ и $OO_2D$ находим

$$\frac{BB_2}{OO_2} = \frac{BD}{OD} = 3.$$

Но $BB_2 = BB_1 - B_2B_1 = b - \frac{a+c}{2} = \frac{2b-a-c}{2}$, следовательно,

$$OO_2 = \frac{2b-a-c}{6}.$$

$$O_1O = O_1O_2 + O_2O = \frac{a+c}{2} + \frac{2b-a-c}{6} = \frac{a+b+c}{3}.$$

**737.** Даны $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами (рис. 114).

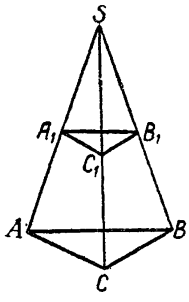


Рис. 114.

Проведем плоскость через параллельные прямые $A_1B_1$ и $AB$, что всегда возможно.

Продолжим $AA_1$ и $BB_1$ до пересечения в точке $S$, тогда

$$\frac{AS}{A_1S} = \frac{BS}{B_1S} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Аналогично проведем плоскость через прямые $BC$ и $B_1C_1$ и пусть продолжения $BB_1$ и $CC_1$ пересекутся в точке $S_1$, тогда

$$\frac{BS_1}{B_1S_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

но $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$, следовательно,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

поэтому

$$\frac{BS}{B_1S} = \frac{BS_1}{B_1S_1}.$$

Применяя производную пропорцию, получим

$$\frac{BB_1}{B_1S} = \frac{BB_1}{B_1S_1},$$

откуда

$$B_1S = B_1S_1,$$

т. е. $S_1$ совпадает с $S$.

**738.** $AB$ — заданный отрезок (рис. 115,*а*).

Пусть $C$ — точка искомого геометрического места, $\triangle ABC$ — прямоугольный. Медиана $CD = \frac{1}{2}AB$, следовательно, точка $D$ равноудалена от точек искомого геометрического места, и проекция расстояний от этих точек до точки $D$ на плоскость есть величина постоянная.

Таким образом, искомое геометрическое место точек есть окружность, радиус которой

$$CO = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - DO^2},$$

где $DO$ — перпендикуляр к плоскости окружности.

**739.** Пусть $SABC$ будет трехгранный угол (рис. 115,*б*).

Всякая точка, отстоящая одинаково от $SA$, $SB$ и $SC$ находится: 1) в плоскости, перпендикулярной к грани $ASB$ и проведенной через

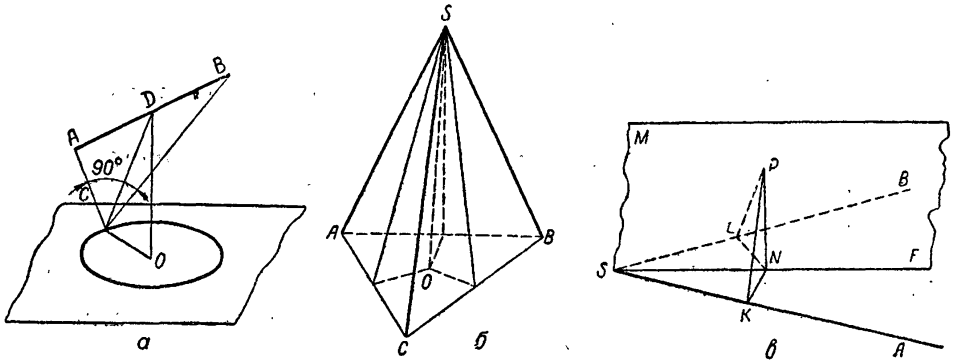



Рис. 115.

биссектрису угла $ASB$; 2) в плоскости, перпендикулярной к грани $ASC$ и проведенной через биссектрису $\angle ASC$, следовательно, она находится на пересечении $SO$ этих обеих плоскостей. Так как каждая точка на $SO$ равноотстоит от ребер $SC$ и $SB$, то $SO$ находится в плоскости, перпендикулярной к грани $BSC$, проведенной через биссектрису $\angle BSC$.

Отсюда все плоскости, проведенные перпендикулярно к граням трехгранного угла через все три биссектрисы плоских углов, пересекаются по той же прямой $SO$, которая и будет искомым геометрическим местом точек.

Примечание. Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла в пространство, есть плоскость, перпендикулярная к плоскости угла и проходящая через его биссектрису.

Действительно, пусть $ASB$ — данный угол, $SF$ — его биссектриса, плоскость $M$ перпендикулярна к пл. $BSA$ и проходит через биссектрису $SF$ этого угла (рис. 115,*в*). Опустим из произвольной точки $P$ плоскости $M$ перпендикуляр $PN$ на плоскость $BSA$, который должен лежать в плоскости $M$ (теорема

о прямой, перпендикулярной к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющей общую точку с другой). Проведем $NK \perp SA$, $NL \perp SB$ и соединим точку $P$ с $K$ и с $L$. $PK$ и $PL$ — расстояние от точки $P$ до прямых $SA$ и $SB$ (теорема о трех перпендикулярах). $\triangle PKN = \triangle PLN$ ($PN$ — общий катет, $LN = NK$, ибо $SN$ — биссектриса $\angle BSA$). Отсюда $LP = KP$. Этим мы доказали, что если точка лежит в плоскости $MSF$, то она равноудалена от сторон угла. Аналогичным образом доказывается и обратная теорема, т. е. если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости данного угла и проходящей через его биссектрису. Таким образом, доказаны необходимые и достаточные условия теоремы.

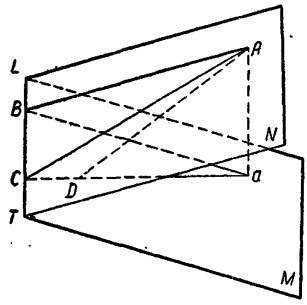



Рис. 116.

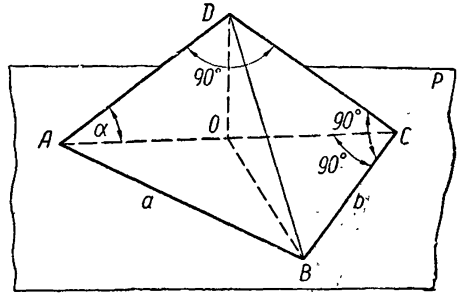



Рис. 117.

**740.** Искомая прямая будет $AB$, проведенная из точки $A$ перпендикулярно $LT$ — линии пересечения обеих плоскостей, и $\angle ABa > \angle ACa$ (рис. 116).

Пусть $AC$ — произвольная наклонная к $LT$ и $a$ проекция точки $A$ на плоскость $M$, проекциями линий $AB$ и $AC$ на плоскость $M$ будут линии $aB$ и $aC$, образующие с этой плоскостью $\angle ABa$ и $\angle ACa$. Но $AC > AB$, поэтому $aC > aB$.

Если отложить на $aC$ длину $aD = aB$ и провести $AD$, то оба прямоугольных треугольника $AaD$ и $AaB$ будут равны, откуда $\angle ADa = \angle ABa$, но $\angle ADa > \angle ACa$, значит,

$$\angle ABa > \angle ACa.$$

Примечание. Если плоскость $LM$ горизонтальна, то прямая $AB$ носит название линии наибольшего наклона плоскости $LN$.

**741.** $AB = a$ — данный отрезок; $AD$ — наклонная; $BC = b$ — расстояние точки $B$ от $AC$; $BD \perp AD$ (рис. 117). Соединим точки $D$ и $C$. $BC \perp AC$ по построению и, следовательно, $BC \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах, так что $BC$ — перпендикуляр к плоскости $ADC$.

Отсюда $AD \perp DB$ и (по построению) $AD \perp BC$; следовательно, $AD$ — перпендикуляр к плоскости $BDC$ и угол $ADC$ — прямой.

Далее $AC = \sqrt{a^2 - b^2}$ (из $\triangle ABC$); $DC = \sqrt{a^2 - b^2}\sin\alpha$ ($\triangle ADC$), и из треугольника $BCD$ находим

$$BD^2 = (a^2 - b^2)\sin^2\alpha + b^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha,$$

откуда

$$BD = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

**742.** Плоскости $P_1$ и $P_2$, перпендикулярные к прямым $AB$ и $AC$, пересекутся по некоторой прямой $KL$. Так как прямые $AB$ и $AC$ соответственно перпендикулярны к плоскостям $P_1$ и $P_2$, то и плоскость $Q$, проходящая через прямые $AB$ и $AC$, будет перпендикулярна к линии их пересечения, т. е. плоскость $Q \perp KL$.

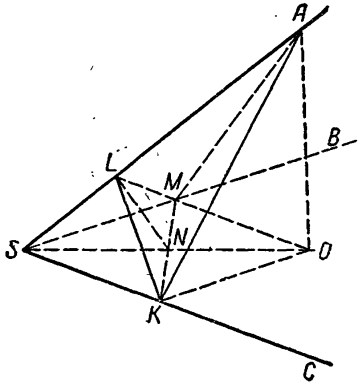



Рис. 118.

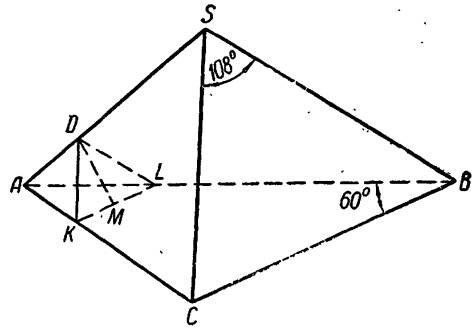



Рис. 119.

Прямая $AD$ не может быть перпендикулярна к прямой $KL$, потому что в этом случае она находилась бы в одной плоскости $Q$ с прямыми $AB$ и $AC$, что противоречило бы условию. А если прямая $AD$ не перпендикулярна к прямой $KL$, то значит, плоскость $P_3$, перпендикулярная к прямой $AD$, не параллельна $KL$ и непременно пересечет линию $KL$ в некоторой точке, которая и окажется точкой пересечения трех плоскостей.

**743.** $SABC$ — трехгранный угол, $\angle BSC = 90°$, $AO \perp BSC$, $OK \perp SC$, $OM \perp SB$, следовательно, $AK \perp SC$, $AM \perp SB$ (теорема о трех перпендикулярах) и $\angle AKO = \angle AMO = 45°$ (рис. 118).

Примем $AO = a$, тогда $SK = SM = OK = OM = a$. Пусть $OS$ и $MK$ пересекаются в $N$, $NL \perp AS$, тогда $\angle KLM$ — линейный угол искомого двугранного угла ($MK \perp$ пл. $ASO$, поэтому $AS \perp MK$, $AS \perp NL$ и $AS \perp$ пл. $KLM$). Находим

$$LK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad NL = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно,

$$\angle LKM = 30°, \text{ а } \angle KLM = 120°.$$

**744.** Отложим от вершины $S$ на ребрах такие отрезки: $SA = SB = SC$ (рис. 119).

$\triangle ABC$ — равносторонний: $AB = BC = AC$, $\angle BAC = 60°$, $\angle SAC = \angle SAB = \angle SCA = 36°$.

Отложим от точки $A$ произвольный отрезок $AD = a$. Через точку $D$ проведем плоскость, перпендикулярную к ребру $AD$, тогда $DK = DL$ и $\triangle DKL$ — равнобедренный.

$\triangle ADK = \triangle ADL$ — прямоугольные, откуда $AK = AL = KL$, $AK = \frac{a}{\cos 36°}$, или $DK = a \operatorname{tg} 36°$. Из $\triangle DKM$ $\angle KDL = x$ — линейный угол искомого двугранного угла;

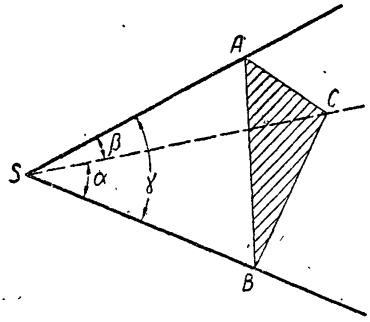



Рис. 120.

$$KM = \frac{KL}{2} = DK \sin \frac{x}{2};$$

$$\frac{a}{2 \cos 36°} = a \operatorname{tg} 36° \sin \frac{x}{2} \ (DM \perp KL),$$

$$\text{или } \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \sin 36°}, \text{ откуда}$$

$$x = 116°36'.$$

**745.** Найдем двугранный угол, противолежащий плоскому углу $\alpha$.

Отложим на ребре $SA$ отрезки $SA = 1$ и проведем плоскость $ABC$ через точку $A$ перпендикулярно к $SA$ (рис. 120).

$$\angle ASB = \gamma; \quad \angle ASC = \beta; \quad \angle BSC = \alpha.$$

Линейный угол искомого двугранного будет

$$\angle BAC = x.$$

$\triangle ASB$ и $\triangle ASC$ — прямоугольные: $AB = \operatorname{tg}\gamma$; $SB = \sec\gamma$; $AC = \operatorname{tg}\beta$; $SC = \sec\beta$. Из $\triangle ABC$ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos x$; из $\triangle SBC$ $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cos\alpha$.

Приравняв правые части полученных равенств и подставив найденные значения, получим

$$\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\beta - 2 \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\beta \cos x = \sec^2\gamma + \sec^2\beta - 2 \sec\gamma \sec\beta \cos\alpha;$$

$$-2 \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\beta \cos x = \sec^2\gamma - \operatorname{tg}^2\gamma + \sec^2\beta - \operatorname{tg}^2\beta - 2 \sec\gamma \sec\beta \cos\alpha,$$

или

$$-2 \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\beta \cos x = 1 + 1 - 2 \sec\gamma \sec\beta \cos\alpha,$$

откуда

$$\cos x = \frac{\cos\alpha - \cos\gamma \cos\beta}{\sin\gamma \sin\beta}.$$

Приведем к виду, удобному для логарифмирования, следующее:

$$1 - \cos x = 1 - \frac{\cos\alpha - \cos\gamma \cos\beta}{\sin\gamma \sin\beta},$$

или

$$2\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\gamma\sin\beta},$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\sin\gamma}}.$$

**746.** $\beta AD\gamma$ — прямой двугранный угол. $CD\perp AD$, $BD\perp AD$, $\triangle BAC$ — данное сечение; искомый угол $\angle BAC=x$ (рис. 121).

$DE\perp AB$, тогда $CE\perp AB$, $\angle CED$ — линейный угол двугранного угла и равен $\alpha$.

$\angle BAC=\angle CNF$ — как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Плоскость $CDE\perp AB$, тогда плоскость $CDE$ перпендикулярна к плоскости $BAC$.

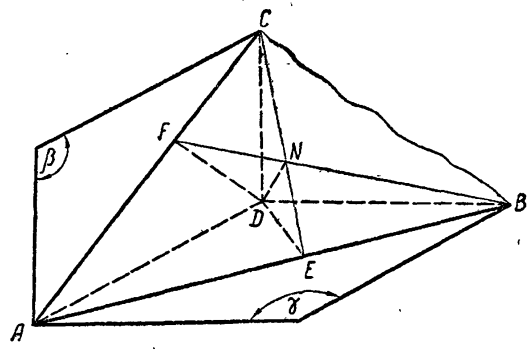



Рис. 121.

$DF\perp AC$, тогда $BF\perp AC$, $\angle DFB=\alpha$ — линейный угол.

Плоскость $DFB\perp BAC$, тогда $DN\perp BAC$ как линия пересечения двух перпендикулярных плоскостей.

$$DN=a,\quad FN=a\operatorname{ctg}\alpha\ (\text{из }\triangle NDF),$$

$$NC=a\operatorname{tg}\alpha\ (\text{из }\triangle CND),\ \angle CNF=\angle BAC=x,$$

$$\cos x=NF:CN=a\operatorname{ctg}\alpha:a\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

откуда

$$\cos x=\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

**747.** Имеем

$$BE=\sqrt{PE^2+PB^2}=h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}.$$

Угол между прямыми $AB$ и $PQ$ равен углу между $AB$ и прямой $AE$, параллельной $PQ$ (рис. 122). Обозначим его через $\gamma$, имеем

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{BE}{AE}=\frac{h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}{h},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}.$$

**748.** Проведем дополнительные построения: $MK\parallel NB$ в плоскости $MKNB$ строим $BK\parallel MN$ (рис. 123).

Так как $MK \parallel NB$, то $\angle AMK = 60°$, $\triangle AMK$ — равносторонний, так как $AM = MK = a$ и $\angle AMK = 60°$, откуда $AK = a$.

Прямая $BK$ перпендикулярна к плоскости $\triangle AMK$, так как $BK \perp MK$, $BK \perp AM$, поэтому $\angle AKB = 90°$ и $\triangle AKB$ — прямоугольный. Этот треугольник равнобедренный, так как $AK = KB = a$.

В равнобедренном прямоугольном $\triangle AKB$ острые углы равны 45°, следовательно,

$$\angle ABK = (\widehat{AB, MN}) = 45°.$$

Рассмотрим случай, когда точка $A$ расположена по другую сторону от $M$. Обозначим ее через $A_1$.

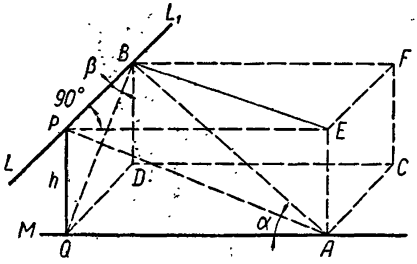



Рис. 122.

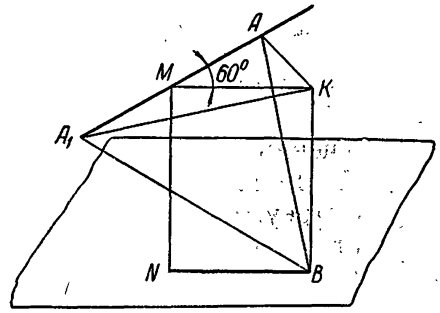



Рис. 123.

Из $\triangle A_1MK$ находим ($MA_1 = a$, $\angle KMA_1 = 120°$)

$$A_1K^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos 120° = 3a^2;$$

$$A_1K = a\sqrt{3}.$$

Из $\triangle A_1KB$ находим

$$\operatorname{tg} \widehat{A_1BK} = \operatorname{tg} (\widehat{A_1B, MN}) = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3},$$

$$(\widehat{A_1B, MN}) = 60°.$$

Другие положения точки $B$ не дают новых результатов.

**749.** В сечении имеем пятиугольник. Объем призмы равен

$$V = Sh,$$

где $S$ — площадь основания, а $h$ — высота призмы.

Следовательно,

$$S = \frac{V}{h} = 20 \text{ см}^2.$$

$\triangle AKL \sim \triangle ABD$ (рис. 124). Поэтому $\frac{S_{AKL}}{S_{ABD}} = \frac{1}{4}$ ($KL$ — средняя линия треугольника $ABD$; площади подобных треугольни-

ков относятся, как квадраты сходственных сторон). Отсюда

$$S_{AKL} = \frac{S_{ABD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{8} = \frac{20}{8} = 2{,}5\ см^2 \left(S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}\right).$$

а площадь фигуры $KLDCB = 20 - 2{,}5 = 17{,}5\ см^2$.

Воспользуемся известной зависимостью между площадью плоской фигуры и площадью ее проекции:

$$S_{пр} = S_{фиг} \cos \alpha,$$

где $S_{пр}$ — площадь проекции фигуры, $S_{фиг}$ — площадь фигуры, а $\alpha$ — угол между плоскостью фигуры и плоскостью ее проекции.

Поскольку фигура $KLDCB$ является проекцией данного сечения, имеем:

$$S_{KMC_1NL} = \frac{17{,}5}{\cos \alpha} см^2.$$

В сечении может быть также $\triangle A_1KL$. Если угол между плоскостью треугольника $A_1KL$ и плоскостью основания обозначить через $\beta$, то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AA_1}{AO}.$$

Из $\triangle C_1OC$ находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CC_1}{OC},$$

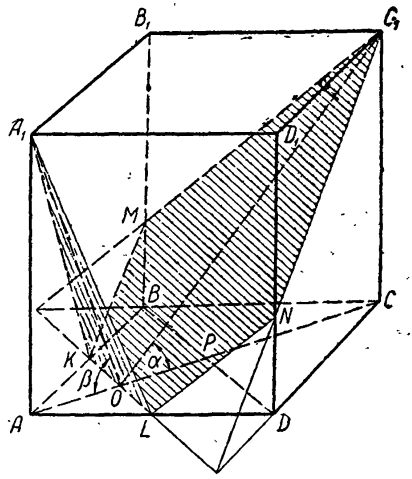


Рис. 124.

но $CC_1 = AA_1$, а $OC = 3AO$, потому $\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$, а

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9\operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

$$S_{\Delta A_1KL} = \frac{S_{AKL}}{\cos \beta} = 2{,}5 \sqrt{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \alpha}\ см^2.$$

Если через $\alpha$ обозначить $\angle AOL$, то решение соответствующим образом меняется. Построение сечения указано на рис. 124.

**750.** Если бы была известна площадь $\triangle ABC$ (рис. 125), то можно было бы определить искомую площадь сечения по формуле

$$S_{CEB} = \frac{S_{CAB}}{\cos \alpha}.$$

Найдем с помощью указанных в задаче данных $S_{ABC}$. Обозначим

$AB = BC = AC = x$, тогда $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Высота пирамиды $EABC$

$$EA = AD \operatorname{tg}\alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha,$$

из которого находим неизвестное

$$x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

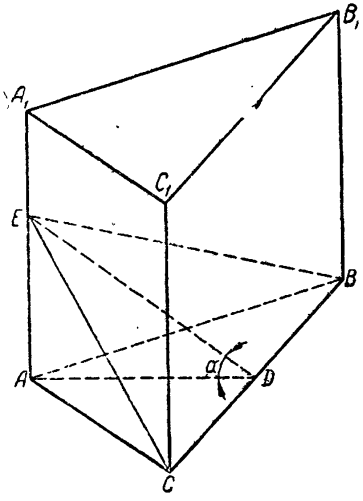



Рис. 125.

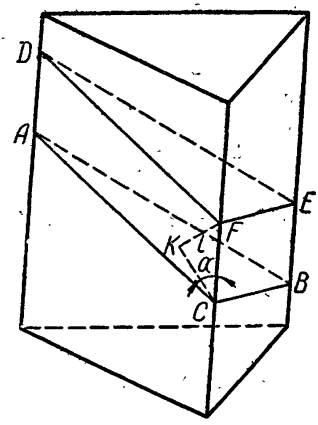



Рис. 126.

Таким образом,

$$S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \left(2\sqrt[3]{\frac{V}{\operatorname{tg}\alpha}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt[3]{\frac{V^2\sqrt{27}}{\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

и, наконец,

$$S_{CEB} = \sqrt[3]{\frac{V^2\sqrt{27}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}} \text{ кв. ед.}$$

**751.** Призма $ABCDEF$ (рис. 126) является наклонной, боковая поверхность ее равна произведению периметра перпендикулярного сечения на ребро $FC$, т. е. $S = 2p\,FC$. Если $FK$ — перпендикуляр, опущенный из точки $F$ на плоскость нижнего сечения, то из $\triangle CKF$ имеем $FC = \frac{l}{\sin\alpha}$, так как по условию $FK = l$, а $\angle FCK = \alpha$.

Следовательно,

$$S = \frac{2pl}{\sin\alpha} \text{ кв. ед.}$$

752. Обозначим длину ребра куба через $a$. $S_{\triangle DC_1B} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} < a^2$, так как сторона равностороннего $\triangle DC_1B$ равна $a\sqrt{2}$ (рис. 127).

$S_{DC_1B_1A} = a^2\sqrt{2} > a^2$, отсюда сечение искомое существует и занимает промежуточное положение; пусть будет сечение $DC_1NM$.

$MN \parallel C_1D$ и потому $NM \parallel AB_1$, для его проведения достаточно найти отрезок $EK$, который и обозначим через $x$, причем $x < BE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ($NC_1 = MD$, что видно из равенства треугольников $B_1C_1N$ и $ADM$; сечение — равнобедренная трапеция).

По условию задачи имеем

$$\frac{MN + DC_1}{2} KF = a^2, \qquad (1)$$

$$BE = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$KB = \frac{a\sqrt{2}}{2} - x, \quad MN = 2KB = a\sqrt{2} - 2x,$$

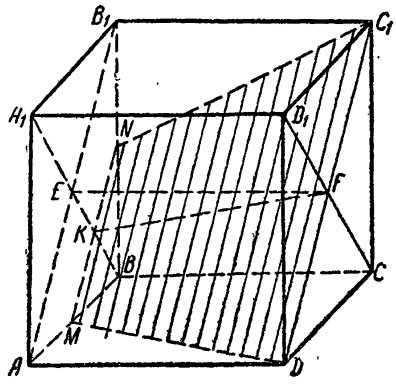


Рис. 127.

$KF = \sqrt{a^2 + x^2}$ из $\triangle KEF$ ($KF$ — высота сечения как отрезок, соединяющий середины оснований равнобедренной трапеции).

Подставляя в уравнение (1), получим

$$\frac{a\sqrt{2} - 2x + a\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + x^2} = a^2,$$

или $(a\sqrt{2} - x)\sqrt{a^2 + x^2} = a^2$.

Освободив уравнение от радикала и упростив, будем иметь

$$x^4 - 2\sqrt{2}ax^3 + 3a^2x^2 - 2\sqrt{2}a^3x + a^4 = 0,$$

или

$$\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 - 2\sqrt{2}a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + a^2 = 0,$$

откуда

$$x + \frac{a^2}{x} = a(\sqrt{2} \pm 1).$$

Уравнение

$$x + \frac{a^2}{x} = a(\sqrt{2} - 1)$$

не имеет действительных корней.

Уравнение

$$x + \frac{a^2}{x} = a(\sqrt{2} + 1)$$

имеет корни

$$x = \frac{a(\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1})}{2},$$

из которых условию $x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет только один корень

$$x = \frac{a(\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1})}{2}.$$

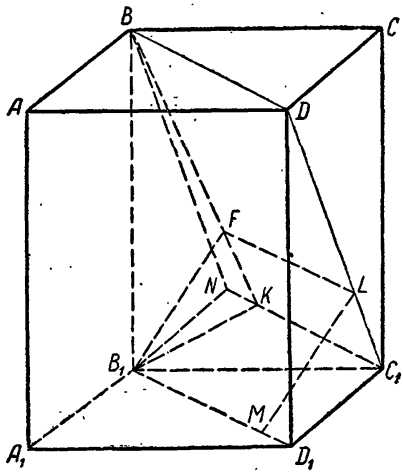


Рис. 128.

Приняв ребро куба за единицу длины, построение отрезка $x$ можно выполнить следующим образом:

$$x = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{z^2-1}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1-\sqrt{t^2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1-t)$$

(сначала строим отрезок $z$, затем— $t$).

Дальнейшее построение ясно.

Задача имеет два решения — два сечения, симметричные относительно диагонального сечения, равновеликие грани куба.

753. $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ — данная правильная четырехугольная призма. $B_1D_1$ и $DC_1$ — непересекающиеся диагонали ее основания и боковой грани. $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = a$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = b$ (рис. 128).

В плоскости нижнего основания призмы проведем $C_1N \parallel B_1D_1$ и через пересекающиеся прямые $DC_1$ и $C_1N$ — плоскость $DC_1NB$, которая пересечет продолжение грани $ABB_1A_1$ по прямой $BN \parallel DC_1$, а верхнее основание призмы — по прямой $BD \parallel C_1N$ (линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей параллельны между собой). Фигура $BDC_1N$ — параллелограмм. Из точки $B$ опустим на $NC_1$ перпендикуляр $BK$ и точку $K$ соединим с точкой $B_1$. $NC_1 \perp BK$ (теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах), $NC_1 \perp$ пл. $BB_1K$ (теорема о двух перпендикулярах), плоскость $BNC_1D \perp$ пл. $BB_1K$, поэтому и $B_1D_1 \perp$ пл. $BB_1K$. В плоскости $BB_1K$ опустим из точки $B_1$ перпендикуляр на $BK$, $B_1F \perp BK$, $B_1F$ будет, очевидно, перпендикулярен и к плоскости $BDC_1N$.

В плоскости $BDC_1N$ проведем $FL \parallel NC_1$ до пересечения в точке $L$ с прямой $DC_1$, а затем, построив предварительно плоскость $B_1FLM$, проведем $ML \parallel B_1F$. $ML$ — кратчайшее расстояние между $DC_1$ и $B_1D_1$. Действительно, во-первых, $ML$ пересекает эти прямые, во-вторых, отрезок $ML$, будучи параллельным $B_1F$, будет перпендикулярен к $DC_1$ (определение перпендикуляра к плоскости) и к $B_1D_1$.

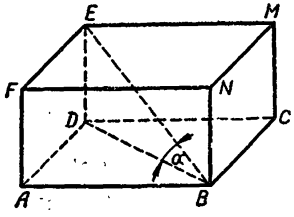


Рис. 129.

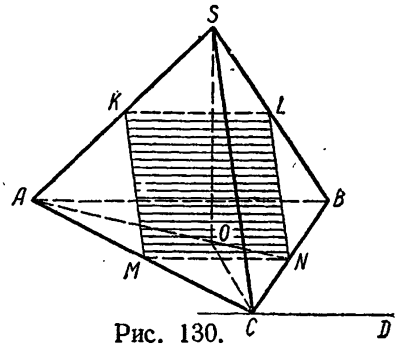


Рис. 130.

Чтобы определить длину $ML$, нужно вычислить длину $B_1F$ ($ML = B_1F$), т. е. высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу.

Из $\triangle BB_1K$ находим

$$BK = \sqrt{BB_1^2 + B_1K^2},$$

но $B_1K = B_1N \sin 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ($\angle B_1NK = \angle A_1B_1D_1 = 45°$, а $B_1N = D_1C_1 = a$). Поэтому

$$BK = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

$$ML = B_1F = \frac{BB_1 \cdot B_1K}{BK} = \frac{ab\sqrt{2}}{2\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{ab}{\sqrt{2b^2 + a^2}}.$$

В случае куба $a = b$;

$$B_1F = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

т. е. кратчайшее расстояние $B_1F$ равно $\frac{1}{3}$ диагонали куба.

**754.** Боковая поверхность параллелепипеда равна $S_{бок} = pH$. Имеем $p = 2a + 2b = 2(a + b)$.

Из рис. 129 видно, что $DB = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $DE = DB \operatorname{tg}\alpha$, но $DE = H$, следовательно, находим $H = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом,

$$S_{бок} = 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

755. Пусть $SABC$ (рис. 130) — правильный тетраэдр. Соединим середины $K$, $L$, $N$ и $M$ ребер тетраэдра $AS$, $SB$, $BC$ и $AC$ прямыми. Сечение $KLNM$ — квадрат.

Действительно, $KL \parallel AB$ и $KL = \frac{1}{2}AB$; $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$. Поэтому $KL = MN = \frac{1}{2}AB$ и $KL \parallel MN$. Аналогично $KM = LN = \frac{1}{2}SC$; $KM \parallel LN$. Следовательно, $KM = MN = NL = KL$.

Проведем прямую $CD \parallel MN$; $CD \perp OC$ ($SO$ — высота тетраэдра), поэтому $CD \perp SC$ (теорема о трех перпендикулярах). $\angle KMN = \angle SCD = 90°$.

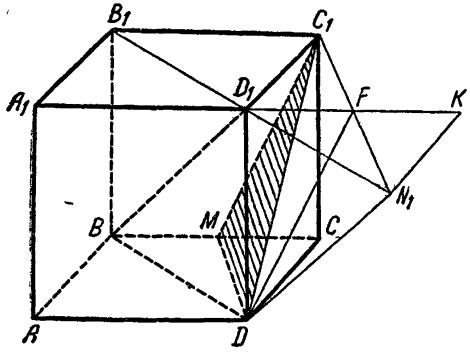



Рис. 131.

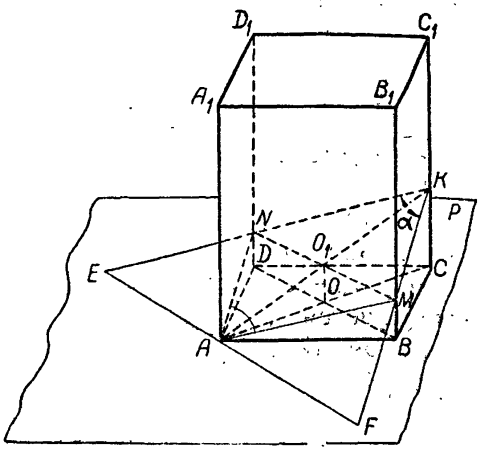



Рис. 132.

Таким образом, доказано, что в построенном сечении противоположные стороны параллельны, все стороны его равны, а угол между смежными сторонами прямой. Построенное сечение — квадрат. Таких сечений можно провести не одно. Сколько?

756. Построение сечения. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 131) данный куб. $BD_1$ и $C_1D$ — скрещивающиеся прямые: диагональ куба и диагональ его грани. Продолжим $B_1D_1$ на расстояние $D_1N_1$, причем $B_1D_1 = D_1N_1 = BD$. Соединим точки $D$ и $N_1$. Через $C_1D$ и $DN_1$ проведем плоскость $C_1DN_1$ и найдем линию пересечения ее с верхним основанием куба — прямую $C_1N_1$. Через точку $D$ в плоскости нижнего основания куба проводим $DM \parallel C_1N_1$. Соединим точки $C_1$ и $M$. $C_1MD$ — искомое сечение (доказать!). Если продолжить $A_1D_1$ и провести $N_1K \parallel D_1C_1$ до взаимного пересечения в точке $K$, то получившийся при этом $\triangle D_1KN_1$ будет прямоугольный равнобедренный. $D_1N_1 = a\sqrt{2}$, $N_1K = a = D_1C_1$, $D_1F = \frac{a}{2}$, $C_1F = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ($F$ — точка пересечения прямых $C_1N_1$ и

$D_1K$). Но $C_1F = MD$, поэтому $MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Треугольник $MC_1D$ — равнобедренный, $MC_1 = MD$ (что видно из равенства треугольников $CMD$ и $MC_1C$). Следовательно,

$$P_{MC_1D} = 2\frac{a\sqrt{5}}{2} + a\sqrt{2} = a(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \text{ лин. ед.}$$

Площадь треугольника $C_1MD$ найдем по формуле Герона:

$$S_{\Delta MC_1D} = \sqrt{\frac{a(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{a^2(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{2^2} \cdot \frac{a(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{6} \text{ кв. ед.}$$

**757.** Четырехугольник $AMKN$ (рис. 132) является параллелограммом (доказать!). Чтобы он был ромбом, должно быть $AM = AN$.

$\triangle ADN = \triangle ABM$, значит, $AN = AM$.

Прямая $MN$ параллельна прямой $BD$, а значит, и плоскости $ABCD$. Следовательно, прямая $EF$, по которой плоскость $AMKN$ пересекается с плоскостью $ABCD$, параллельна диагонали $MN$ (и диагонали $BD$), а значит, перпендикулярна к другой диагонали ромба $AK$ (и диагонали $AC$). Отсюда следует, что $\varphi = \angle CAK$ — линейный угол искомого двугранного угла. Прямая $OO_1$, соединяю-

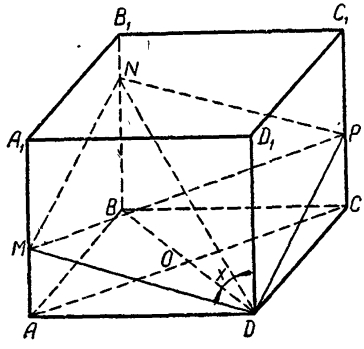



Рис. 133.

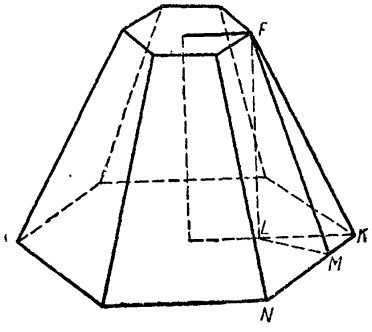



Рис. 134.

щая центр ромба $O_1$ с центром основания призмы, перпендикулярна к основанию. Из $\triangle AOO_1$ находим

$$\cos\varphi = \frac{AO}{AO_1} = \frac{OB}{AO_1} = \frac{O_1M}{AO_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\varphi = \arccos\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

**758.** Обозначим искомый угол $BDN$ через $x$ (рис. 133). Тогда $\frac{BD}{ND} = \cos x$; $BD = 2OD$; $OD = OA \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, $BD = 2AO \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $ND = 2AO$ (так как по условию $MP = ND$).

Следовательно,

$$\cos x = \frac{2AO \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2AO} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

отсюда $x = \arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

**759.** Проведем из точки $F$ прямую $FM$, параллельную апофеме боковой грани пирамиды (рис. 134) и из этой же точки опустим перпендикуляр $FL$ на основание, который, очевидно, равен высоте пирамиды $h$. Прямая $LM$ перпендикулярна к $NK$ согласно обратной теореме о трех перпендикулярах. Обозначим $FM = x$, а $KL = y$.

Так как по условию задачи пирамида правильная, то в прямоугольном треугольнике $KML$ угол $LKM$ равен 60°, угол $KLM$ равен 30° и, следовательно,

$$KM = \frac{KL}{2} = \frac{y}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника $KFL$ находим, что $y = \sqrt{a^2 - h^2}$, а из прямоугольного треугольника $KFM$ получаем, что

$$x = \sqrt{a^2 - KM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - h^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + h^2}.$$

Принимая во внимание, что по условию $h = 2$ *см*, $a = 8$ *см*, найдем, что $x = 7$ *см*.

**760.** Обозначим плоский угол при вершине через $\varphi$ (рис. 135). Тогда искомая поверхность

$$Q = \frac{1}{2} AS^2 \sin\varphi + AS \cdot SM \sin\varphi + \frac{1}{2} SM^2 \sin\varphi.$$

Находим

$$AS \cdot SM \cdot \sin\varphi = \sqrt{AS^2 \cdot \sin\varphi \cdot SM^2 \cdot \sin\varphi} = 2\sqrt{S \cdot S_1},$$

где $2S = AS^2 \cdot \sin\varphi$ — площадь грани $ASB$, умноженная на 2;

$2S_1 = SM^2 \cdot \sin\varphi$ — двойная площадь грани $MSN$.

Боковая поверхность всей пирамиды 100 *см*$^2$, а площадь каждой боковой грани равна $100 : 4 = 25$ *см*$^2$.

Следовательно, площадь грани $ASB$ — $S = 25$, а площадь грани $MSN$ — $S_1 = 16$.

Имеем

$$Q_{\text{бок. пов}} = S + 2\sqrt{SS_1} + S_1 =$$

$$= (\sqrt{S} + \sqrt{S_1})^2 = (5 + 4)^2 = 81 \text{ см}^2.$$

Примечание. Можно решить эту задачу, не пользуясь тригонометрией. Обозначим площадь грани $SDC$ через $S$, а площадь грани $SMN$ — через $S_1$. Тогда из подобия треугольников $DSC$ и $MSN$ имеем

$$\frac{S}{S_1} = \frac{SC^2}{SN^2}; \quad \frac{SC}{SN} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}},$$

но

$$\frac{S_{BCN}}{S_{BSC}} = \frac{SN}{SC} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$$

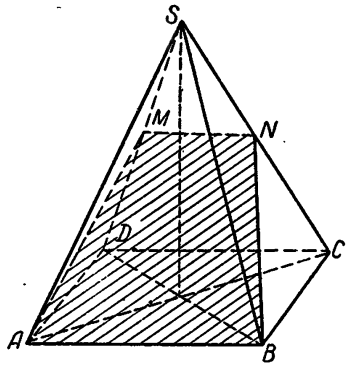



Рис. 135.

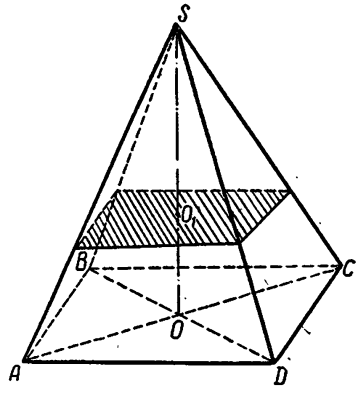



Рис. 136.

($\triangle BSN$ и $\triangle BSC$ имеют одинаковые высоты), отсюда $S_{BSN} = S\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \sqrt{S_1 S}$.

Поэтому искомая поверхность равна

$$S_{\text{бок}} = S + S_1 + 2\sqrt{S_1 S} = (\sqrt{S} + \sqrt{S_1})^2 = (4+5)^2 = 81 \text{ см}^2.$$

**761.** Обозначим через $B$ и $h$ соответственно площадь основания и высоту данной пирамиды (рис. 136), через $b'$ и $x$ — площадь сечения и его расстояние от вершины пирамиды.

Запишем соотношение

$$b' : B = x^2 : h^2; \; b' = \frac{Bx^2}{h^2}.$$

Из условия задачи имеем

$$2\frac{b'x}{3} = \frac{Bh}{3}.$$

Следовательно, $2B\frac{x^3}{3h^2} = B\frac{h}{3}$; $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$. Этот же результат можно получить сразу, если принять во внимание, что объемы подобных многогранников относятся, как кубы их высот.

Обозначая через $m$ диагональ прямоугольника, находим

$$h^2 = l^2 - \frac{m^2}{4},$$

отсюда

$$h = \frac{\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}}{2}.$$

Имеем

$$x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}.$$

**762.** 1. Найдем необходимые условия для $a$.

Пусть в пирамиде $DABC$ (рис. 137)

$$AB = AC = CD = a;$$

$$BC = AD = BD = 1.$$

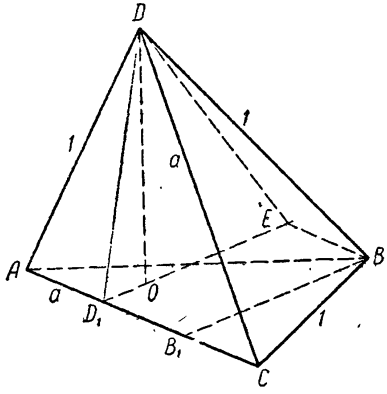


Рис. 137.

Тогда из $\triangle ABC$ имеем

$$a + a > 1, \text{ т. е. } a > \frac{1}{2}.$$

Из $\triangle BCD$ $1 + 1 > a$, т. е. $a < 2$, следовательно,

$$\frac{1}{2} < a < 2. \qquad (1)$$

Уточним границы для множества значений $a$. Строим $D_1OD \perp$ пл. $ABC$, $OD_1 \perp AC$, $BB_1 \perp AC$, $D_1E = BB_1$. Тогда $DD_1 \perp AC$ (теорема о трех перпендикулярах), $AC \perp$ пл. $DD_1E$. $BB_1D_1E$ — прямоугольник, поэтому $BE \parallel AC$ и $BE \perp$ пл. $DD_1E$.

Следовательно,

$$\angle BED = \frac{\pi}{2}.$$

$\triangle ABC = \triangle ADC$ (по трем сторонам), откуда следует, что $BB_1 = DD_1$ как соответственные высоты.

Из $\triangle ACD$ ($\angle DAC$ острый как угол при основании равнобедренного треугольника)

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD_1,$$

или

$$a^2 = a^2 + 1 - 2a \cdot AD_1,$$

отсюда

$$AD_1 = \frac{1}{2a}.$$

Из $\triangle ADD_1$

$$DD_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}},$$

тогда и

$$B_1C = AD_1 = \frac{1}{2a};$$

$$BB_1 = D_1E = DD_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}.$$

Дальше имеем

$$BE = B_1D_1 = |AC - (AD_1 + B_1C)| = \left|a - \frac{1}{a}\right|.$$

Из существования пирамиды следует, что точка $D$ не совпадает с точкой $E$. Тогда $BE < BD$ ($BE$ — перпендикуляр к пл. $DD_1E$, а $BD$ — наклонная);

$$\left|a - \frac{1}{a}\right| < 1, \quad -1 < a - \frac{1}{a} < 1.$$

Решая эти неравенства при $a > 0$, получим

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \qquad (2)$$

При выполнении условия (2) выполняется также условие (1).

2. Докажем достаточность условия (2).

Если выполнено условие (2), то $\left|a - \frac{1}{a}\right| < 1$ и $a > \frac{1}{2}$, поэтому существуют отрезки

$$b = \sqrt{1 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2} \text{ и } c = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}.$$

Легко проверить, что $c + c > b$, поэтому существует $\triangle DD_1E$, где $DE = b$, $DD_1 = D_1E = c$. Через точку $D_1$ можно провести прямую $P \perp$ пл. $DD_1E$ и на ней отложить отрезки $D_1B_1 = \left|a - \frac{1}{a}\right|$, $B_1C = D_1A = \frac{1}{2a}$. Затем можно построить $B_1B \perp AC$, $B_1B = c$.

Полученными точками $A$, $B$, $C$, $D$ определяется пирамида $DABC$. Вычислив ее ребра, установим, что она имеет указанные в задаче размеры.

Таким образом, множество всех значений $a$, при которых существует указанная в задаче пирамида, определяется условием (2).

**763.** Пусть $SABC$ (рис. 138) есть изображение данной пирамиды, в основание $ABC$ которой вписан круг с центром $O$ радиуса $r$.

Если $O$ — центр основания, то $SO$ — высота пирамиды. Проведем апофему $SK$ пирамиды, т. е. $SK \perp AC$; по теореме о трех перпенди-

кулярах $OK \perp AC$ и, следовательно, $OK = r$. Боковую поверхность данной правильной пирамиды можно найти по формуле

$$S_{бок} = \frac{1}{2} 3AC \cdot SK,$$

а площадь основания

$$S_{осн} = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Сторона правильного треугольника через радиус вписанного круга находится по формуле

$$AC = 2r\sqrt{3}.$$

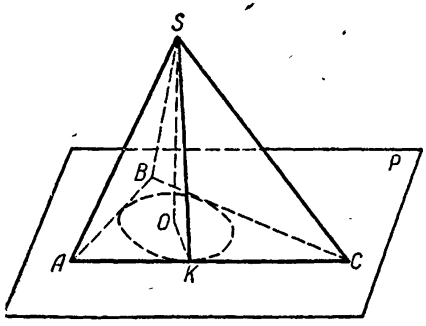


Рис. 138.

Из треугольника $SAK$, в котором $\angle SAK = \angle SCK = \alpha$, находим

$$SK = AK \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} r \operatorname{tg} \alpha.$$

Подстановка в формулы дает

$$S_{полн} = 3r^2 \sqrt{3} (\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha + 1) =$$

$$= 9r^2 \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 9r^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 30°) =$$

$$= \frac{6\sqrt{3} r^2 \sin (\alpha + 30°)}{\cos \alpha} \text{ кв. ед.}$$

Так как при вершине $A$ имеется трехгранный угол с плоскими углами $\alpha$, $\alpha$ и 60°, то должно быть $\alpha + \alpha > 60°$.

Поскольку $\alpha$ — угол при основании равнобедренного треугольника, то $0° < \alpha < 90°$. Таким образом, окончательно имеем

$$30° < \alpha < 90°.$$

Примечание. Интересно отметить, что на первый взгляд ответ задачи не требует такого ограничения множества допустимых значений параметров, которые получены из геометрических соображений. Но, принимая во внимание, что полная поверхность всякой пирамиды всегда больше удвоенной площади ее основания (равна она может быть в случае вырождения пирамиды в удвоенное основание — это предельный случай), мы будем иметь такое неравенство:

$$S_{полн} > 2S_{осн},$$

но

$$S_{осн} = 3\sqrt{3} r^2,$$

поэтому

$$\frac{6\sqrt{3} r^2 \sin (\alpha + 30°)}{\cos \alpha} > 6\sqrt{3} r^2;$$

$$\frac{\sin (\alpha + 30°)}{\cos \alpha} > 1, \quad \frac{\sin \alpha \cos 30° + \cos \alpha \sin 30°}{\cos \alpha} > 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } \alpha > 30°.$$

При $\alpha = 30°$ пирамида преобразуется в удвоенное основание, как это было уже упомянуто. При уменьшении $\alpha$ от 30 до 0° и при постоянной стороне основания каждая из боковых граней перестает быть боковой гранью пирамиды, а преобразуется в отдельный треугольник, площадь которого приближается к нулю.

**764.** $\angle SDB = \alpha$; искомый угол $DBS$ обозначим через $x$ (рис. 139), тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OS}{OD}; \quad \operatorname{tg}x = \frac{OS}{OB}.$$

Но $OB = 2OD$, так как пирамида правильная и точка $O$ есть точка

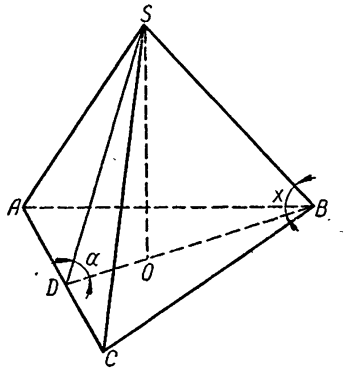


Рис. 139.

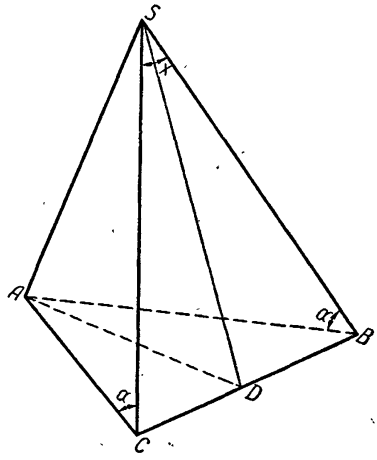


Рис. 140.

пересечения медиан основания и, следовательно, делит их в отношении 2 : 1.

Таким образом, $\operatorname{tg}x = \frac{OS}{2OD}$, или $\operatorname{tg}x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

**765.** По условию задачи две боковые грани $SAC$ и $SAB$ перпендикулярны к плоскости основания, поэтому (следствие из теорем о перпендикулярности плоскостей) линия пересечения этих двух плоскостей перпендикулярна к основанию, т. е. ребро данной пирамиды $SA$ (рис. 140) перпендикулярно к основанию, $\angle ACS = \angle ABS = \alpha$; $\triangle ABC$ — равносторонний потому, что он равнобедренный и один из его углов равен 60°.

Обозначим сторону основания пирамиды через $a$, а искомый угол $BSC$ — через $x$. Тогда

$$SC = \frac{a}{\cos\alpha} \quad (\text{из } \triangle ASC),$$

а

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a\cos\alpha}{2a} = \frac{\cos\alpha}{2},$$

откуда

$$x = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Поскольку $0 < \frac{\cos\alpha}{2} < \frac{1}{2}$, то $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$; $0° < \frac{x}{2} < 30°$; $0° < x < 60°$. Это можно также доказать, если рассмотреть треугольники $CSD$ и $CAD$. Из этих треугольников имеем $\frac{CD}{AD} = \operatorname{tg} 30°$; $\frac{CD}{SD} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, но $SD > AD$, поэтому $\operatorname{tg} 30° > \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; откуда, принимая

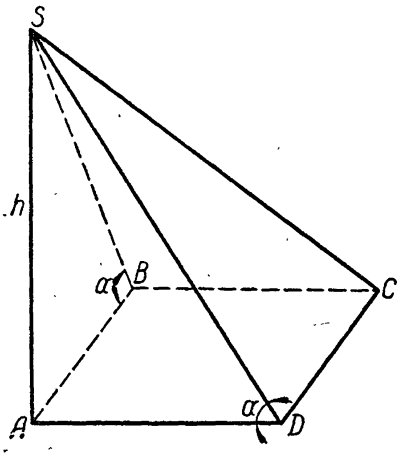



Рис. 141.

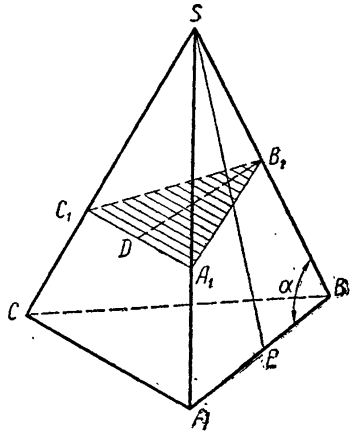



Рис. 142.

во внимание, что угол $\frac{x}{2}$ положительный и острый, получим $30° > \frac{x}{2}$, или $x < 60°$.

**766.** Пусть прямая $SA$ есть линия пересечения двух граней пирамиды, перпендикулярных к основанию (рис. 141). Тогда $SA \perp AD$, $SA \perp AB$. Кроме того, $SD \perp DC$ согласно известной теореме о том, что прямая ($CD$), проведенная на плоскости через основание наклонной ($SD$) перпендикулярно к ее проекции ($AD$), перпендикулярна и к самой наклонной.

Аналогично $SB \perp BC$.

Тогда

$$AD = h\operatorname{ctg}\alpha \text{ (из } \triangle ASD);$$

$$SD = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Боковая поверхность пирамиды

$$S_{бок} = h^2\operatorname{ctg}\alpha + \frac{h \cdot h\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} = h^2\operatorname{ctg}\alpha\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2h^2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha} \text{ кв. ед.}$$

**767.** В грани $ABS$ и в грани $CBS$ через середину ребра $SB$ проводим соответственно перпендикуляры $B_1A_1$ и $B_1C_1$ к ребру $SB$. Плоскость $A_1B_1C_1$, проходящая через перпендикуляры $A_1B_1$ и $B_1C_1$, является искомой секущей плоскостью, так как она проходит через середину ребра $SB$ и перпендикулярна к этому ребру (теорема о двух перпендикулярах). В сечении пирамиды построенной нами плоскостью образуется равнобедренный $\triangle A_1B_1C_1$, площадь которого надо определить (рис. 142).

Из равнобедренного $\triangle ABS$ находим

$$\cos\alpha = \frac{BE}{SB} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4} \text{ (где } \alpha = \angle SBE),$$

откуда

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}.$$

Из прямоугольного треугольника $A_1B_1S$ находим

$$A_1B_1 = SB_1 \operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = -SB_1 \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= -a\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a\sqrt{15}}{7}$$

и

$$SA_1 = \frac{SB_1}{\cos(180^\circ - 2\alpha)} = -\frac{SB_1}{\cos 2\alpha} = -\frac{a}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{8a}{7}.$$

$\triangle ACS \sim \triangle A_1C_1S$, откуда $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{SA_1}{SA}$, или $C_1A_1 = CA\frac{SA_1}{SA} = \frac{SA_1}{2} = \frac{4a}{7}$.

Из прямоугольного $\triangle A_1DB_1$ находим

$$DB_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - DA_1^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{15}}{7}\right)^2 - \left(\frac{2a}{7}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{7}.$$

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{A_1C_1 \cdot DB_1}{2} = \frac{\frac{4a}{7} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{7}}{2} = \frac{2a^2\sqrt{11}}{49} \text{ кв. ед.}$$

**768.** $\triangle OEL \sim \triangle MEK$ (рис. 143). Имеем

$$OL : H = MK : EK \quad (H = EO \text{ — высота пирамиды}),$$

т. е.

$$OL : H = b : \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - b^2},$$

так как

$$MK = b, \; ME = \frac{H}{2}, \; EK = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - b^2}.$$

Получаем

$$OL^2 = \frac{4b^2H^2}{H^2 - 4b^2}.$$

Таким же образом найдем

$$OC^2 = \frac{4h^2H^2}{H^2 - 4h^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{4h^2H^2}{H^2 - 4h^2} = 2\,\frac{4b^2H^2}{H^2 - 4b^2},$$

так как $OC^2 = 2OL^2$.

Получаем

$$H = \frac{2bh}{\sqrt{2b^2 - h^2}}.$$

Находим

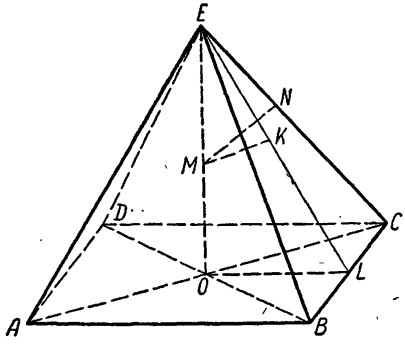



Рис. 143.

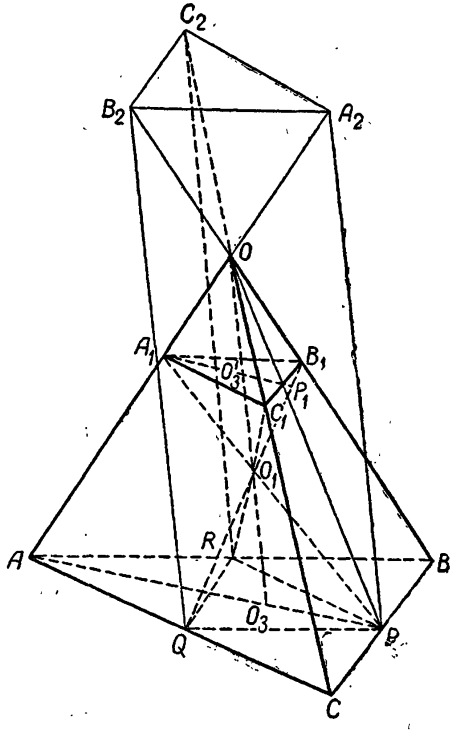



Рис. 144.

$$OL^2 = \frac{4b^2H^2}{H^2 - 4b^2} = \frac{2b^2h^2}{h^2 - b^2}$$

и

$$V = \frac{1}{3}(2OL)^2 H,$$

откуда

$$V = \frac{16b^3h^3}{3(h^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - h^2}} \text{ куб. ед.};$$

$$b < h < \sqrt{2b}.$$

**769.** 1. Соединим точки $Q$ с $P$ прямой (рис. 144). Прямые $QP$ и $AB$ параллельны и $A_1B_1 \parallel AB$. Поэтому $QP \parallel A_1B_1$. Через прямые $QP$ и $A_1B_1$ проведем плоскость, что всегда возможно. В этой плоскости лежат прямые $A_1P$ и $B_1Q$. Следовательно, они пересекаются.

Обозначим точку их пересечения через $O_1$. Из подобия треугольников $A_1O_1B_1$ и $QO_1P$ находим

$$\frac{QP}{A_1B_1} = \frac{PO_1}{O_1A_1} = \frac{QO_1}{O_1B_1} = \frac{\frac{1}{2}AB}{A_1B_1} \tag{1}$$

$$\left(QP = \frac{1}{2}AB\right).$$

Соединим теперь прямой точки $P$ и $R$. $PR \parallel AC$; $A_1C_1 \parallel AC$, поэтому $PR \parallel A_1C_1$; через $PR$ и $A_1C_1$ проведем плоскость. В этой плоскости лежат прямые $PA_1$ и $RC_1$, они также пересекаются. Обозначим точку их пересечения через $O_2$. Треугольники $A_1O_2C_1$ и $PRO_2$ подобны. Из подобия их находим

$$\frac{PO_2}{O_2A_1} = \frac{RO_2}{O_2C_1} = \frac{PR}{A_1C_1} = \frac{\frac{1}{2}AC}{A_1C_1};$$

$$PR = \frac{1}{2}AC,$$

но

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

(сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, есть многоугольник, подобный многоугольнику основания), отсюда

$$\frac{PO_1}{O_1A_1} = \frac{PO_2}{O_2A_1};$$

$$\frac{PO_1 + O_1A_1}{O_1A_1} = \frac{PO_2 + O_2A_1}{O_2A_1};$$

$$\frac{PA_1}{O_1A_1} = \frac{PA_1}{O_2A_1};$$

$$O_1A_1 = O_2A_1,$$

т. е. точки $O_2$ и $O_1$ должны слиться и три прямых $PA_1$, $QB_1$ и $RC_1$ пересекаются в одной точке.

2. Пусть $OO_3$ — прямая, соединяющая вершину пирамиды с точкой пересечения медиан треугольника основания (с его центром тяжести). Проведем плоскость через $OO_3$ и боковое ребро $OA$ (плоскость $OAP$). В этой плоскости лежит и прямая $PA_1$, поэтому $OO_3$ и $PA_1$ пересекаются. Обозначим точку их пересечения через $O_4$, а точку пересечения $OO_3$ с пл. $A_1B_1C_1$ — через $O_3'$. Треугольники $A_1O_3'O_4$ и $O_3PO_4$ — подобны. Следовательно,

$$\frac{PO_4}{O_4A_1} = \frac{PO_3}{A_1O_3'},$$

но

$$\frac{PO_3}{A_1O_3'} = \frac{\frac{1}{3}AP}{\frac{2}{3}A_1P_1} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{2}{3}A_1B_1} = \frac{\frac{1}{2}AB}{A_1B_1},$$

отсюда

$$\frac{PO_4}{O_4A_1} = \frac{\frac{1}{2}AB}{A_1B_1}.$$

Сопоставляя данное равенство с (1), убеждаемся в том, что точки $O_4$ и $O_1$ должны слиться.

Таким образом, прямые $A_1P$; $B_1Q$; $C_1R$ и $OO_3$ пересекаются в одной точке $O_1$, и если перемещать плоскость $A_1B_1C_1$ поступательным движением, то эта точка будет смещаться по прямой $OO_3$, т. е. последняя является геометрическим местом точек пересечения указанных прямых.

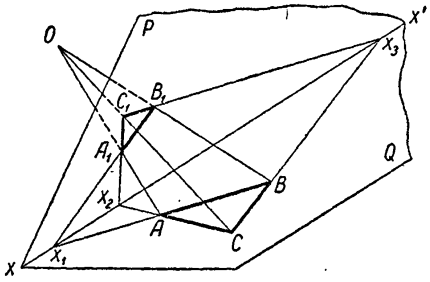



Рис. 145.

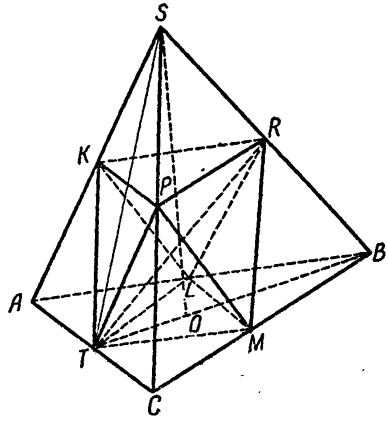



Рис. 146.

3. Теперь предположим, что боковые ребра пирамиды продолжены неограниченно с другой стороны от точки $O_1$ и движущаяся плоскость и основание пирамиды лежат по разные стороны от точки $O$. Пусть эта плоскость заняла положение $A_2B_2C_2$, причем $A_2B_2 = PQ$.

В этом случае фигура $A_2B_2QP$ будет параллелограммом. Действительно, $A_2B_2 \parallel PQ$; $A_2B_2 = QP$. Поэтому $A_2P \parallel B_2Q$. Аналогично доказывается, что прямые $B_2Q$ и $C_2R$ параллельные, и, следовательно все прямые $B_2O$, $C_2R$ и $A_2P$ параллельные между собой, а также параллельны прямой $OO_3$ (почему?).

**770.** Указание. Провести через конец ребра правильного тетраэдра прямую, параллельную противоположному ребру, а из другого его конца опустить перпендикуляр на грань тетраэдра. Соединить основание перпендикуляра с концом ребра, через который проведена вспомогательная прямая, и применить теорему о трех перпендикулярах.

**771.** Пусть $P$ и $Q$ две пересекающиеся плоскости (рис. 145), $xx'$ — линия их пересечения, $ABC$ и $A_1B_1C_1$ — два треугольника,

лежащих в плоскостях $P$ и $Q$ с попарно непараллельными сторонами. $O$ — точка пересечения прямых, соединяющих соответственные вершины треугольников.

Проведем через $OA$ и $OB$ плоскость, что всегда возможно; прямые $A_1B_1$ и $AB$ лежат в этой плоскости, а так как они непараллельны, то должны пересекаться, и точка их пересечения $x_1$ принадлежит трем плоскостям: $OAB$, $P$ и $Q$, т. е. лежит на прямой пересечения плоскостей $P$ и $Q$ (прямой $xx'$). Аналогично доказывается, что прямые $A_1C_1$ и $AC$, $C_1B_1$ и $CB$ попарно пересекаются, и точки их пересечения $x_2$ и $x_3$ лежат на одной прямой $xx'$.

**772.** Стороны полученного выпуклого восьмигранника (рис. 146) являются средними линиями равных между собой правильных треугольников (граней тетраэдра), поэтому они все равны, а правильный выпуклый восьмигранник с равными сторонами — правильный октаэдр.

Линии, соединяющие середины противоположных сторон правильного тетраэдра, являются в то же время линиями, соединяющими вершины правильного октаэдра, не лежащими на одной его грани, следовательно, они пересекаются в одной точке, делятся в этой точке пополам и взаимно перпендикулярны.

Каждая плоскость, являющаяся плоскостью симметрии октаэдра, делит тетраэдр на две части, объемы которых состоят из половины объема октаэдра и суммы объемов двух тетраэдров; так как эти тетраэдры равны, то плоскость, проходящая через две прямые, соединяющие середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является в данном случае плоскостью симметрии правильного октаэдра, делит данный тетраэдр на две равновеликие части.

Если соединить прямыми точки $S$ и $T$; $B$ и $T$, то полученный треугольник $STB$ — равнобедренный, $TR$ его медиана, проведенная к основанию. Поэтому $TR \perp SB$. Аналогично доказывается, что $TR \perp AC$.

Из $\triangle TRB$

$$TR = \sqrt{BT^2 - BR^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Объем октаэдра

$$V_{\text{октаэдра}} = \frac{2}{3} S_{KLMP} \frac{TR}{2} = \frac{2a^2 \cdot a\sqrt{2}}{4 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \sqrt{SB^2 - BO^2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\frac{V_{\text{тетраэдра}}}{V_{\text{октаэдра}}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^3\sqrt{2}}{24}} = \frac{2}{1}$$

(через $a$ обозначена длина ребра тетраэдра).

**773.** Рассмотрим движение точек $x$ и $y$ последовательно по каждому из указанных ребер куба.

1. Точка $x$ в некоторый момент времени оказалась в положении $x$, а точка $y$ в положении $y$ (рис. 147).

Так как всякий отрезок прямой $xy$, соединяющий любую точку верхнего основания куба с любой точкой его нижнего основания, делится плоскостью, перпендикулярной к его боковым ребрам и проходящей через их середину (плоскостью симметрии куба) пополам, то середина $O$ отрезка $xy$ должна лежать в этой плоскости.

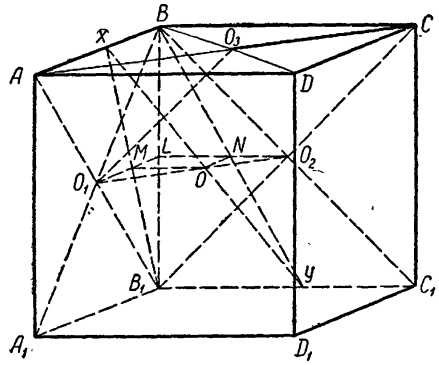


Рис. 147.

Точки $x$ и $y$ движутся с одинаковой скоростью, поэтому $Ax = B_1y$ и $xB + B_1y = a$, где $a$ — ребро куба. Проведя прямые $xB_1$ и $yB$ и рассматривая треугольники $xB_1y$ и $xBy$, плоскости которых перпендикулярны к граням $ABB_1A_1$ и $B_1BCC_1$ (признак перпендикулярности двух плоскостей), опустим перпендикуляры $OM$ и $ON$ из точки $O$ на эти грани. $OM$ и $ON$ лежат в указанной выше плоскости симметрии и являются средними линиями треугольников $xB_1y$ и $xyB$: $MO = \frac{1}{2}yB_1$; $ON = \frac{1}{2}xB$; $MO + ON = \frac{1}{2}(yB_1 + xB) = \frac{1}{2}a$, т. е. сумма расстояний от точки $O$ до боковых граней куба $ABB_1A_1$ и $BB_1C_1C$, равная сумме расстояний от этой точки до катетов равнобедренного прямоугольного $\triangle O_1LO_2$, есть величина постоянная. Геометрическое же место точек, сумма расстояний от которых до $O_1L$ и $LO_2$ в плоскости $O_1LO_2$ постоянна, есть гипотенуза $O_1O_2$ прямоугольного треугольника $O_1LO_2$.

Таким образом, точка $O$ — середина отрезка прямой $xy$ — при движении точек $x$ и $y$ с равными скоростями по прямым $AB$ и $B_1C_1$ от $A$ к $B$ и от $B_1$ к $C_1$ из исходных положений $A$ и $B_1$ будет двигаться по прямой $O_1O_2$, соединяющей центры квадратов $ABB_1A_1$ и $B_1BCC_1$.

2. При дальнейшем движении точек $x$ по прямой $BC$ и $y$ по прямой $C_1C$ с равными скоростями середина отрезка $xy$ опишет отрезок $O_2C$, что легко доказывается.

3. Аналогично: при движении $x$ от $C$ до $D$ и $y$ от $C$ до $B$ точка $O$ опишет отрезок $CO_3$.

4. При движении $x$ от $D$ к $A$, а $y$ от $B$ к $B_1$ середина отрезка $xy$ опишет $O_3O_1$ (доказательство, как и в п. 1).

Таким образом, середина $O$ отрезка $xy$ при указанных в условии движениях точек $x$ и $y$ опишет ромб $O_1O_2CO_3$.

**774.** Для построения сечения (рис. 148) в диагональной плоскости $BDD_1B_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проводим прямую $FL$ параллельно диагонали куба $BD_1$, предварительно соединив прямой $PN$ середины его ребер $P$ и $N$ и найдя точку пересечения $F$ проведенной прямой $PN$ с диагональю основания $B_1D_1$. Продолжив $PN$ в плоскости нижнего основания куба до пересечения ее с продолжением ребра $A_1B_1$ в точке $E$, соединяем прямой $LE$ (в плоскости боковой грани $A_1B_1BA$) точки $L$ и $E$. Точка пересечения прямой $EL$ с ребром куба $AA_1$ — точка $K$ — и будет одной из вершин искомого сечения. Соединим затем точку $K$ с $P$. В плоскости грани $BB_1C_1C$ проводим прямую $LM \parallel KP$ (линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей параллельны между собой). Проведя прямые $LM$ и $NM$, получим искомое сечение — $KPNML$. Конечно, для нахождения точки $M$ можно было бы поступить так же, как мы поступили при отыскании точки $K$.

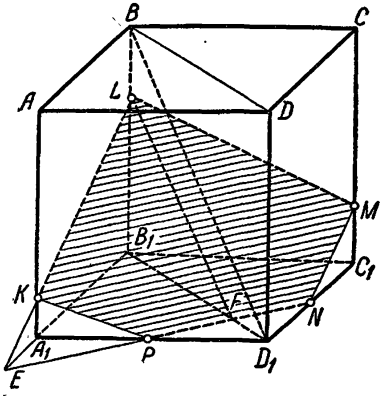


Рис. 148.

Полученное сечение — искомое, ибо оно удовлетворяет условию задачи: проходит через середины смежных ребер ($P$ и $N$) и параллельно диагонали куба $BD_1$ (признак параллельности прямой и плоскости).

Проекция площади сечения $KPNML$ на плоскость нижнего основания куба совпадает с площадью фигуры $A_1B_1C_1NP$, т. е. равна $a^2 - S_{\Delta PND_1} = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7}{8}a^2$.

Воспользуемся формулой, выражающей зависимость между площадью плоской фигуры и площадью ее проекции на плоскость,

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{фиг}} \cdot \cos\alpha,$$

где $S_{\text{фиг}}$ — площадь данной фигуры, $S_{\text{пр}}$ — площадь ее проекции, $\cos\alpha$ — косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью ее проекции.

$\angle LFB_1$ — линейный угол двугранного угла между указанными плоскостями (теорема о трех перпендикулярах).

$$\cos\angle LFB_1 = \cos\angle BD_1B_1 = \frac{B_1D_1}{BD_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (BD_1 = a\sqrt{3};\quad B_1D_1 = a\sqrt{2}),$$

поэтому

$$S_{KLMNP} = \frac{S_{A_1B_1C_1NP}}{\cos\angle LFB_1} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} = \frac{7a^2\sqrt{6}}{16} \text{ кв. ед.}$$

**775.** $SABCD$ — данная пирамида, $ABCD$ — прямоугольник, $AD = a$, $DC = b$ (рис. 149).

Так как все боковые ребра пирамиды равны, то вершина $S$ проектируется (при ортогональном проектировании) в центр окружности, описанной около основания пирамиды, т. е. в точку пересечения $O$ диагоналей $AC$ и $BD$.

$V_{SABCD} = S_{ABCD} \cdot \frac{H}{3} = \frac{abH}{3}$ ($H = SO$ — высота пирамиды, $S_{ABCD}$ — площадь ее основания, $V_{ABCD}$ — объем пирамиды).

Задача сводится к определению $H$.

Проведем $SM$ и $SL$ — высоты боковых граней $DSC$ и $DAS$ и соединим точки $O$ с $M$, $O$ с $L$. Обозначим $\angle DSC = \alpha$; $\angle ASD = 3\angle DCS = 3\alpha$,

тогда

$$SM = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \text{ (из } \triangle DSM);$$

$$SL = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2} \text{ (из } \triangle LSD).$$

Из треугольников $SOM$ и $SOL$ найдем

$$SO^2 = SM^2 - OM^2 = \frac{b^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4};$$

$$SO^2 = SL^2 - OL^2 = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{3\alpha}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

Отсюда

$$b^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - a^2 = a^2\operatorname{ctg}^2\frac{3\alpha}{2} - b^2,$$

или

$$b^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1\right) = a^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{3\alpha}{2} + 1\right),$$

или

$$\frac{b^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{\sin^2\frac{3\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Определим из полученного уравнения $\sin\frac{\alpha}{2}$. Так как $\sin\frac{3\alpha}{2} = 3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}$, то, извлекая квадратный корень и подставляя значение $\sin\frac{3\alpha}{2}$, будем иметь

$$b\sin\frac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = a\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \left(\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0\right)$$

или

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{3b-a}{4b}.$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{4b}{3b-a} - 1 = \frac{b+a}{3b-a}.$$

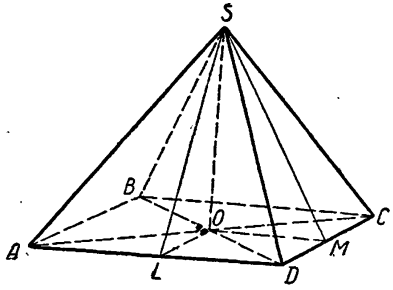



Рис. 149.

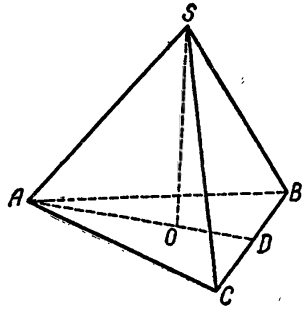



Рис. 150.

$$SO = \sqrt{\frac{b^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2(b+a)}{4(3b-a)} - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3 - 3a^2b + ab^2 + b^3}{3b-a}}.$$

$$V_{SABCD} = \frac{ab}{6}\sqrt{\frac{a^3 - 3a^2b + ab^2 + b^3}{3b-a}} \text{ куб. ед.}$$

**776.** $SABC$ — данная треугольная пирамида, $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $\angle CAB = \alpha$ (рис. 150).

$V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot H}{3}$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $H = SO$ — высота пирамиды, $V$ — ее объем.

$S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sin\alpha}{2}$; задача сводится к определению высоты пирамиды.

Так как все боковые ребра пирамиды равны, то вершина пирамиды $S$ проектируется в центр окружности, описанной около ее ос-

нования; $AO = R$ ($R$ — радиус описанной около основания окружности).

Вычислим $R$ по формуле $R = \frac{a}{2\sin A}$.

В данном случае

$$R = \frac{a}{2\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника $ASO$ находим

$$SO^2 = AS^2 - AO^2,$$

или

$$H^2 = a^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\left(3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2\sin\frac{3\alpha}{2}}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$H = \frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{a^2\sin\alpha}{2\cdot 3\cdot\sin\alpha}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3}{2}\alpha}$$

или

$$V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3a}{2}} \text{ куб. ед.}$$

777. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 151) — равносторонний, сторона которого равна 4. $AA'B'B$ — грань призмы, перпендикулярная к основанию, $A'B$ — меньшая ее диагональ.

Искомый объем призмы будет равен $V = S_{\text{осн}}h$, где $h$ — находится в плоскости $AA'B'B$. Ищем $h$, как высоту ромба. Обозначим $AF$ через $x$, тогда $FB = a - x$. Из $\triangle AFA'$ и $A'FB$ имеем

$$a^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2,$$

отсюда

$$x = \frac{2a^2 - c^2}{2a}.$$

Следовательно,

$$h = \frac{c}{2a}\sqrt{4a^2 - c^2}; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда

$$V = \frac{ac}{8}\sqrt{12a^2 - 3c^2} = \frac{4 \cdot 3}{8}\sqrt{12 \cdot 16 - 27} = \frac{3}{2}\sqrt{165} \approx 19{,}2 \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Высоту ромба можно также найти как высоту треугольника, пользуясь известной формулой $h_a = \frac{2S}{a}$, или, определив сперва высоту треугольника $A'AB$, опущенную на сторону $A'B$, по теореме Пифагора, воспользоваться зависимостью $AB \cdot A'F = A'B \cdot h_1$, где $h_1$ — высота $\Delta AA'B$, проведенная на сторону $A'B$.

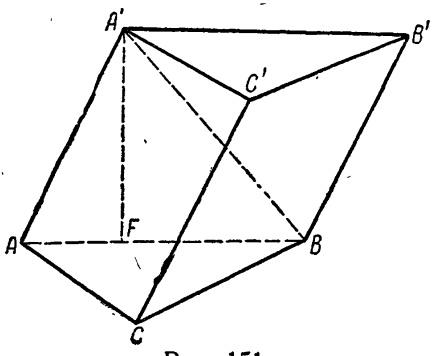



Рис. 151.

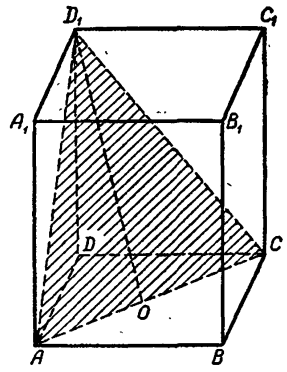



Рис. 152.

778. Заметим, что $\angle AD_1C = \alpha$; $AB = BC = CD = AD = a$. Обозначим высоту призмы через $H$, тогда $V = a^2H$ (рис. 152). Так как $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то из треугольника $AOD_1$ найдем

$$AD_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника $AD_1D$ получим

$$DD_1 = H = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - a^2},$$

или

$$H = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{a^3}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha} \text{ куб. ед.}$$

779. Совершенно очевидно, что для определения объема многогранника достаточно из объема данного куба вычесть объемы отрезанных от него восьми равных правильных (если за основание принят $\triangle ADB$) треугольных пирамид (рис. 153).

Если положим $AD = x$, $AC = y$, то получим

$$\begin{cases} 2y = a - x; \\ x^2 = 2y^2 \end{cases}$$

(из прямоугольного треугольника $ADC$).

Исключим из этой системы уравнений неизвестное $x$ и определим

$$y = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда объем многогранника будет равен

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} yyy = a^3 - \frac{4}{3}\left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

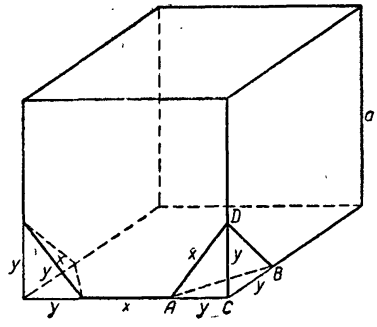



Рис. 153.

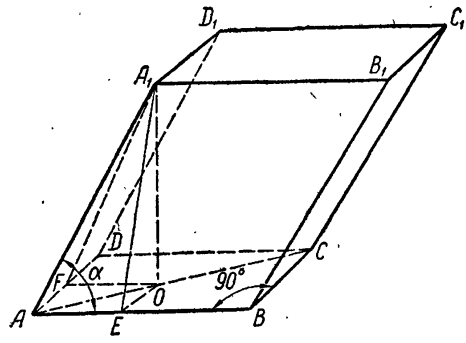



Рис. 154.

и окончательно

$$V = \frac{7}{3} a^3 (\sqrt{2} - 1) \text{ куб. ед.}$$

780. Проведем через вершину $A_1$ (рис. 154) плоскости $A_1EO$ перпендикулярно к $AB$ и $A_1FO$ — перпендикулярно к $AD$. Эти плоскости будут перпендикулярны к плоскости основания и линия их пересечения $A_1O$ будет высотой параллелепипеда. Образовавшиеся прямоугольные $\triangle A_1AE$ и $\triangle A_1AF$ равны между собой, откуда вытекает, что $A_1E = A_1F$ и, следовательно, $\triangle A_1OE = \triangle A_1OF$, а значит, $OE = OF$ и прямая $AO$ — биссектриса $\angle BAD$.

Имеем $H = \sqrt{A_1E^2 - OE^2}$. $AEOF$ — квадрат, следовательно $OE = AE$.

Из $\triangle AA_1E$ получаем

$$H = c\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha} = c\sqrt{\cos(180^\circ - 2\alpha)},$$

откуда вытекает, что

$$V = abc\sqrt{\cos(180^\circ - 2\alpha)} \text{ куб. ед.;}$$

$$S_{\text{бок}} = 2c(a + b)\sin\alpha \text{ кв. ед.}$$

Примечание 1. В процессе решения задачи доказана следующая теорема: *если ребро трехгранного угла образует с двумя другими его ребрами равные углы, то это ребро* (при ортогональном проектировании) *проектируется на биссектрису противоположного плоского угла.*

Примечание 2. Исследуем полученное решение.

$$-\cos 2\alpha > 0,$$

или

$$\cos 2\alpha < 0. \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что угол $\alpha$ — угол параллелограмма (он может быть острым, прямым или тупым), получим, исходя из неравенства (1),

$$90^\circ < 2\alpha < 270^\circ,$$

или

$$45^\circ < \alpha < 135^\circ.$$

Найденные ограничения для множества допустимых значений $\alpha$ могут быть установлены на основании следующих теорем независимо от полученного ответа: *сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего* и *сумма плоских углов многогранного угла меньше 360°.*

Рассматривая трехгранный угол с вершиной в точке $A$, будем иметь:

$$\begin{cases} 2\alpha > 90^\circ; \\ 2\alpha + 90^\circ < 360^\circ, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha > 45^\circ; \\ \alpha < 135^\circ, \end{cases}$$

или окончательно

$$45^\circ < \alpha < 135^\circ.$$

**781.** Плоскость сечения, проходящего через одно из ребер куба (рис. 155) под углом $\alpha$ к основанию (будем считать, что $\alpha < 90^\circ$), делит куб на две прямые призмы с основаниями $ABCE$ и $ADE$. Если обозначим ребро куба через $a$, а объемы указанных призм соответственно через $V_1$ и $V_2$, то будем иметь

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{ABCE} \cdot a}{S_{ADE} \cdot a} = \frac{[a + (a - a\operatorname{tg}\alpha)]\frac{a}{2}}{\frac{aa\operatorname{tg}\alpha}{2}},$$

или

$$\frac{V_1}{V_2} = 2\operatorname{ctg}\alpha - 1.$$

**782.** Имеем $\angle C_1NC = \varphi$, площадь $\triangle AC_1B$ равна $S$ (рис. 156). Для определения объема призмы $V$ нужно найти ее высоту $CC_1$ и площадь основания.

Обозначим длину стороны основания через $a$, тогда

$$CC_1 = CN \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\varphi;$$

но площадь $\triangle ACB$, являющегося проекцией $\triangle AC_1B$ на плоскость основания, равна

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = S\cos\varphi,$$

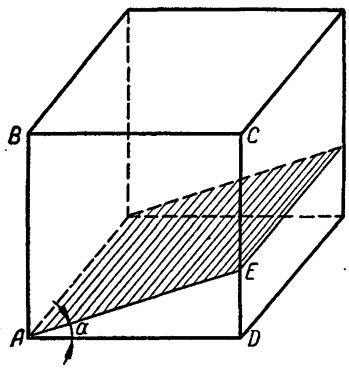



Рис. 155.

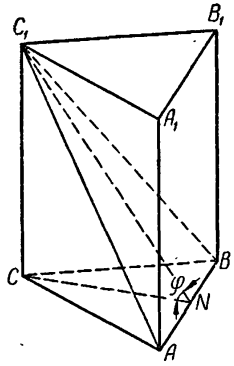



Рис. 156.

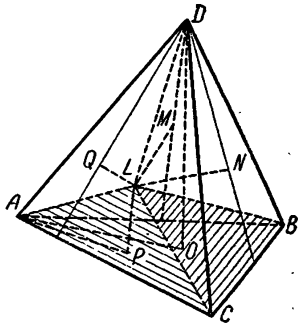



Рис. 157.

откуда

$$a = \frac{2\sqrt{S\cos\varphi}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Следовательно,

$$CC_1 = \frac{2\sqrt{S\cos\varphi}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}} \operatorname{tg}\varphi = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{S\cos\varphi}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

Искомый объем

$$V = \sqrt[4]{3}\cdot S\sqrt{S\cos\varphi}\cdot\sin\varphi \text{ куб. ед.}$$

**783.** Пусть $L$ — точка внутри правильного тетраэдра $DABC$ (рис. 157); $LM$, $LN$, $LQ$ и $LP$ — ее расстояния от граней. Соединив точку $L$ с точками $A$, $B$, $C$ и $D$ и проведя плоскости $ALD$, $DLB$, $BLC$, $ALC$ и др., разобьем тетраэдр на четыре треугольные пирамиды $LABC$, $LADB$, $LDBC$ и $LADC$, сумма объемов которых равна объему тетраэдра $DABC$. Поэтому

$$V_{DABC} = V_{LABC} + V_{LADB} + V_{LDBC} + V_{LADC},$$

или

$$S_{ABC} \cdot DO = S_{ABC} \cdot LP + S_{ADB} \cdot LM + S_{DBC} \cdot LN + S_{ADC} \cdot LQ.$$

Но

$$S_{ABC} = S_{ADB} = S_{DBC} = S_{ADC}.$$

Следовательно,

$$DO = LP + LM + LN + LQ,$$

т. е. *сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного тетраэдра, до его граней есть величина постоянная, равная высоте тетраэдра.*

**784.** Совместим данные тетраэдры равными трехгранными углами и из точек $D$ и $D'$ опустим перпендикуляры $DE$ и $D'E'$ на основания этих тетраэдров (рис. 158).

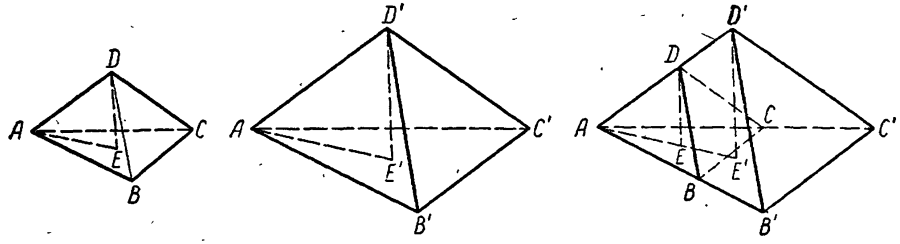



Рис. 158.

Ясно, что

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DE}{\frac{1}{3} S_{\triangle AB'C'} D'E'},$$

так как $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ имеют $\angle BAC = \angle B'AC'$, то

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}.$$

Имеем

$$\frac{V}{V'} = \frac{AB \cdot AC \cdot DE}{AB' \cdot AC' \cdot D'E'}.$$

Далее имеем

$$\triangle ADE \sim \triangle AD'E',$$

а потому

$$\frac{DE}{D'E'} = \frac{AD}{A'D'},$$

откуда

$$\frac{V}{V'} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}.$$

**785.** Пусть $R$ — радиус окружности, описанной около основания. По условию задачи он совпадает с радиусом окружности, описанной около боковых граней.

Сторона основания $a_6 = R$, а через $b$ обозначим апофему основания. Пусть, наконец, $h$ — высота боковой грани, опущенная из вершины пирамиды, и $H$ — высота пирамиды. Имеем

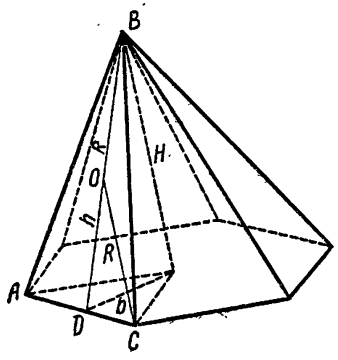


Рис. 159.

$$b = R\cos\frac{\pi}{6} = \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

площадь основания

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\,6R^2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\,3R^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}.$$

Из $\triangle ACB$ и $\triangle DOC$ (рис. 159)

$$h = R + \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R + \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{R}{2}(2+\sqrt{3}),$$

следовательно,

$$S_{\text{бок}} = 3\,\frac{R^2}{2}(2+\sqrt{3}) = \frac{3}{2}R^2(2+\sqrt{3}),$$

и, значит,

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{3}{2}R^2(2+\sqrt{3}) + \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} =$$

$$= 3R^2 + \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = 3R^2(1+\sqrt{3}),$$

или

$$16 = 3R^2(1+\sqrt{3}),$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{16}{3(1+\sqrt{3})}} = \frac{4}{\sqrt{3(1+\sqrt{3})}};$$

$$H = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4}(2+\sqrt{3})^2 - \frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{4+4\sqrt{3}} =$$

$$= R\sqrt{1+\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$V = \frac{S_{\text{осн}}\cdot H}{3} = \frac{3\cdot 16\cdot\sqrt{3}\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 3(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}} = \frac{16\cdot 2(\sqrt{3}-1)}{3\cdot 2} =$$

$$= \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1) \approx 3{,}9\ \text{см}^3.$$

**786.** На основании $ABC$ (рис. 160) данного тетраэдра $SABC$ строим призму $SB_1C_1ABC$. Объем $SABC$ составляет $\frac{1}{3}$ часть объема этой призмы, а объем $SBB_1C_1C$ составляет $\frac{2}{3}$ объема этой же призмы. Поэтому объем тетраэдра $SABC$ равен

$$V_{SABC} = \frac{1}{2} V_{SBB_1C_1C} = \frac{1}{2} S_{BB_1C_1C} \cdot \frac{1}{3} h,$$

если $h$ — расстояние вершины $S$ от плоскости $BB_1C_1C$. Искомый объем будет

$$V = \frac{1}{6} BB_1 \cdot BC \cdot h \sin (\widehat{BB_1BC}).$$

$BB_1 = AS$, $\angle B_1BC$ равен углу между $AS$ и $BC$, $SO = h$ — кратчайшему расстоянию между $AS$ и $BC$.

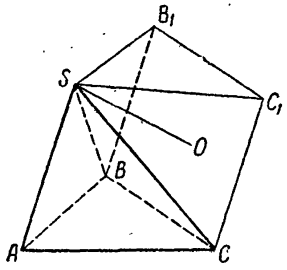



Рис. 160.

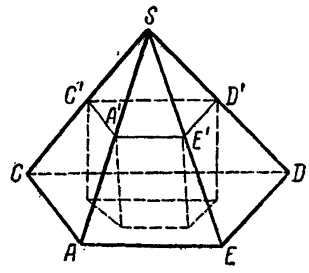



Рис. 161.

**787.** Обозначим через $B$ и $H$ площадь основания и высоту пирамиды $SACDE$ (рис. 161), а через $b$ и $h$ площадь основания и высоту призмы. Многоугольники $ACDE$ и $A'C'D'E'$ подобны, поэтому их площади относятся между собой как квадраты их расстояний от вершины $S$ пирамиды:

$$\frac{b}{B} = \frac{(H-h)^2}{H^2},$$

откуда

$$b = \frac{B}{H^2}(H-h)^2.$$

Следовательно, объем призмы

$$V = bh = \frac{Bh}{H^2}(H-h)^2.$$

Наибольшее значение произведения $\frac{Bh}{H^2}(H-h)^2$ получим, когда $h(H-h)^2$ будет наибольшим, так как $\frac{B}{H^2}$ — постоянное число.

Рассмотрим три положительных числа $a$, $b$ и $c$, сумма которых постоянна. Как известно из алгебры, среднее арифметическое трех положительных чисел не меньше их среднего геометрического

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Левая часть этого смешанного равенства и неравенства постоянная величина, а правая часть изменяется, оставаясь меньше левой, и только, когда $a = b = c$, становится ей равной, т. е. достигает максимального значения. Отсюда следует, что наибольшее значение произведения трех положительных чисел, имеющих постоянную сумму, будет тогда, когда эти числа равны и каждое из них равно $\frac{1}{3}$ их суммы.

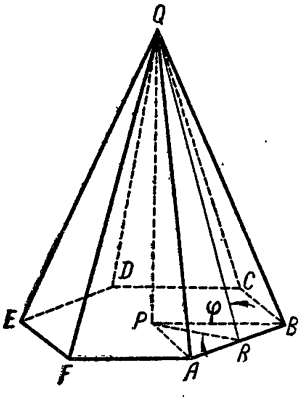


Рис. 162.

В данном примере произведение $h\,(H - h) \times (H - h)$ можно записать в виде $\frac{2h\,(H-h)\,(H-h)}{2}$, три величины $2h$; $H - h$; $H - h$ имеют постоянную сумму $2h + H - h + H - h = 2H$, поэтому максимальное значение произведения будет при $2h = H - h$, или $h = \frac{H}{3}$.

**788.** Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника $2d\,(m - 2) = 8d$, отсюда $m = 6$ ($m$ — число сторон многоугольника).

Пусть $PQ = h$ — высота пирамиды (рис. 162). Рассмотрим какую-нибудь боковую грань пирамиды: $\triangle QAB$ и ее проекцию на основание $\triangle PAB$. Из условия имеем

$$\frac{6S_{\Delta QAB}}{6S_{\Delta PAB}} = 4.$$

$\triangle QAB$ и $\triangle PAB$ имеют общее основание $AB$, следовательно, их площади относятся, как соответствующие высоты, т. е.

$$\frac{S_{\Delta QAB}}{S_{\Delta PAB}} = \frac{QR}{PR},$$

но $\frac{PR}{QR} = \cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{1}{4}$, где $\varphi$ — угол между плоскостью боковой грани и основания.

Находим, что

$$PR = h\operatorname{ctg}\varphi = 3\,\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

Затем найдем, что сторона основания

$$a = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{15}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{18}{5\sqrt{3}};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{18}{5\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \approx 2{,}08 \text{ см}^3.$$

**789.** Пусть $SABCD$ (рис. 163) — пирамида, $DA_1B_1C_1$ и $D_2A_2B_2C_2$ — сечения ($A_1$ и $A_2$ находятся на ребре $AS$, $B_1$ и $B_2$ находятся на ребре $BS$ и т. д.).

$\triangle BSD$ — равносторонний, следовательно, $DB_1 \perp SB$ и пройдет через $\frac{1}{3} SO$.

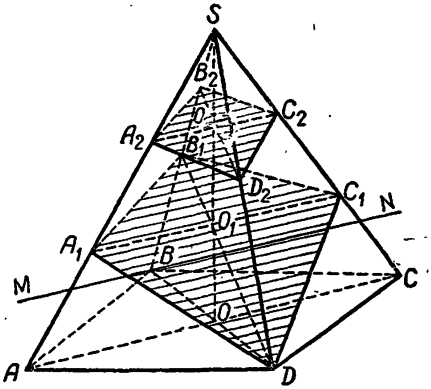


Рис. 163.

Имеем $12 = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$, отсюда

$$AC = 8\sqrt{3};$$

$$A_1C_1 : AC = 2 : 3;$$

$$A_1C_1 = \frac{16}{3}\sqrt{3};\ DB_1 = SO = 12;$$

$$S_{DA_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot DB_1 = 32\sqrt{3}.$$

$DB_1$ пересекает $SO$ в $O_1$, $D_2B_2$ пересекает $SO$ в $O_2$.

$$SB_1 = \frac{1}{2} SB = 4\sqrt{3}.$$

Имеем

$$V_{SA_1B_1C_1D} = 128 \text{ см}^3;$$

$$SB_2 = \frac{1}{2} SB_1;\quad S_{A_2B_2C_2D_2} = \frac{1}{4} S_{A_1B_1C_1D};$$

$$V_{SA_2B_2C_2D_2} = \frac{1}{8} V_{SA_1B_1C_1D} = 16 \text{ см}^3;$$

$$V_{A_1B_1C_1D\ A_2B_2C_2D_2} = 128 - 16 = 112 \text{ см}^3;$$

$$V_{A_1B_1C_1\ ABCD} = 384 - 128 = 256 \text{ см}^3.$$

Примечание. Рассмотрим построение сечения в правильной четырехугольной пирамиде, проходящего через произвольную точку высоты перпендикулярно к ребру $SB$. В плоскости треугольника $SBD$ через данную точку его высоты $O_2$ проводим прямую $B_2D_2 \perp SB$ и через ту же точку $O_2$ проводим прямую $A_2C_2 \parallel AC$ в плоскости $SAC$. Соединив точки $B_2$ с $A_2$, $B_2$ с $C_2$, $D_2$ с $A_2$ и $D_3$ с $C_2$, получим искомое сечение.

Действительно, $SB \perp B_2D_2$ по построению. Если провести прямую $MBN \parallel AC$, то $SB \perp NM$ (теорема о трех перпендикулярах) и $SB_2 \perp A_2C_2$. Следовательно, $SB_2$ перпендикулярна двум непараллельным прямым на плоскости $A_2B_2C_2D_2$, поэтому $S_2B_2$ перпендикулярна плоскости сечения.

**790.** На рис. 164 имеем пирамиду $SABCD$. Основание $ABCD$ — квадрат; $SO = h$ — высота пирамиды; $SR$ — апофема пирамиды. Заметим, что $OR = \frac{1}{2}AB$, а $\angle SRO = \alpha$.

Для определения объема пирамиды нужно найти сторону основания $AB$ квадрата и высоту $h$ пирамиды.

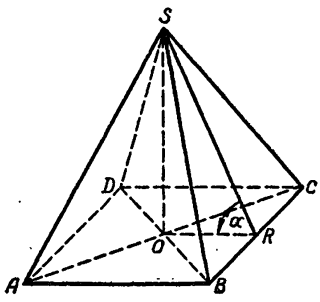


Рис. 164.

По условию задачи известна полная поверхность пирамиды, т. е.

$$S = AB^2 + \frac{1}{2}4AB \cdot SR =$$

$$= AB(AB + 2SR).$$

Это уравнение дает возможность определить сторону основания пирамиды.

Определим апофему $SR$ пирамиды из треугольника $SOR$

$$SR = \frac{AB}{2\cos\alpha}.$$

Подставляя в уравнение, имеем

$$S = AB\left(AB + \frac{2AB}{2\cos\alpha}\right) = AB^2\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{AB^2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha},$$

откуда

$$AB = \sqrt{\frac{S\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2S\cos\alpha}.$$

Площадь основания

$$S_{\text{осн}} = \frac{S\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Высота $h$ пирамиды определится из треугольника $SOR$

$$SO = h = \frac{AB}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{2S\cos\alpha}}{4\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{S \cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha \sqrt{2S\cos\alpha}}{4\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{S \sin\alpha \sqrt{2S\cos\alpha}}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}} \text{ куб. ед.}$$

или

$$V_{\text{пир}} = \frac{2S \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{24\cos^2\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2S\cos\alpha \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{6} S \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \sqrt{S \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Для вычисления стороны основания пирамиды можно было воспользоваться формулой $S_{\text{полн}} = \frac{2S_{\text{осн}}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, где $S_{\text{полн}}$ — полная поверхность пирамиды, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $\alpha$ — угол наклона боковой грани к осиованию.

$$S = \frac{2AB^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha};$$

$$AB = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{2S\cos\alpha}.$$

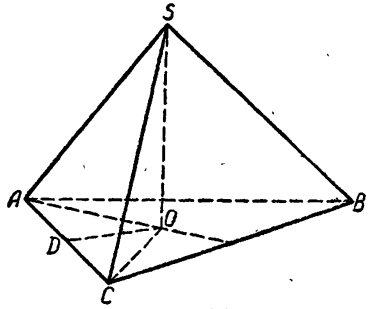


Рис. 165.

**791.** Имеем: $AB = AC = AS = BS = CS = b$; $\angle BAC = \alpha$ (рис. 165). Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}SH$, где $S$ — площадь основания; $H$ — высота пирамиды.

Имеем:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha.$$

Найдем высоту пирамиды $H = OS$.

Так как $AO = OB = OC$ как проекции равных наклонных $SA$, $SB$ и $SC$, то $O$ — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Рассмотрим $\triangle AOC$. Если $OD$ есть перпендикуляр, опущенный на сторону основания пирамиды $AC$, то $AD = DC = \frac{b}{2}$, а $\angle DAO = \frac{\alpha}{2}$ ($AO$ — биссектриса угла $BAC$).

Тогда

$$AO = \frac{AD}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

и из $\triangle AOS$ имеем

$$H = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,b^2\sin\alpha\,\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1} =$$

$$= \frac{b^2}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Приведем подкоренное выражение к виду, удобному для логарифмирования,

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2(\cos\alpha + 1) - 1 = 2\cos\alpha + 1 = 2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\frac{\pi + 3\alpha}{6}\cos\frac{\pi - 3\alpha}{6}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\frac{\pi + 3\alpha}{6}\cos\frac{\pi - 3\alpha}{6}}\ \text{куб. ед.}$$

Примечание 1. $AO = R$ можно непосредственно определить по следующей формуле:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{AC}{2\sin\frac{\pi - \alpha}{2}} = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

здесь $R$ — радиус окружности, описанной около треугольника.

Примечание 2. Из полученного ответа следует, что

$$0 < \frac{\pi + 3\alpha}{6} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad 0 < \alpha < \frac{2}{3}\pi;$$

при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $V = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3$ (величина объема правильного тетраэдра), при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2}{3}\pi$ вершина пирамиды проектируется вне площади основания.

**792.** Пусть $SO_1 = x$, тогда вся высота $OS = 6 + x$ (рис. 166). По теореме о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, будем иметь

$$\frac{(h+x)^2}{x^2} = \frac{9}{4},$$

откуда

$$x = 12 \text{ см}.$$

Высота полной пирамиды

$$H = 12 + 6 = 18 \text{ см};$$

$$V_{\text{ус. п}} = \frac{1}{3} h (Q + q + \sqrt{Qq})$$

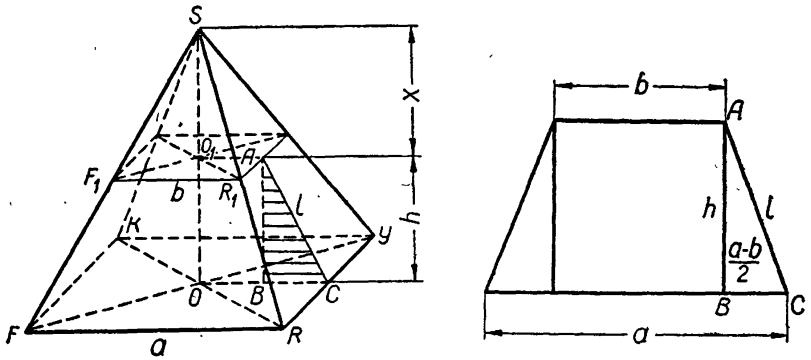



Рис. 166.

($Q$ — площадь нижнего основания, $q$ — площадь верхнего основания), или

$$V_{\text{ус. п}} = 152 \text{ см}^3,$$

или

$$152 = \frac{1}{3} \cdot 6 (9m + 4m + \sqrt{9m \cdot 4m}) = 2 \cdot 19m = 38m,$$

откуда $m = \frac{152}{38} = 4 \text{ см}^2$, где $m$ — общая мера площадей оснований усеченной пирамиды.

Стороны основания будут

$$FR = \sqrt{9 \cdot 4} = 6 \text{ см};$$

$$F_1R_1 = \sqrt{4 \cdot 4} = 4 \text{ см}.$$

$$S_{\text{б. ус. п}} = \frac{4a + 4b}{2} l$$

($l = AC$ — апофема боковой грани; $a$ и $b$ — стороны оснований), или

$$S_{\text{б. ус. п}} = \frac{24+16}{2} l = 20l.$$

Вычислим $l$:

$$l = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} \text{ см}.$$

$$S_{\text{б. ус. п}} = 20\sqrt{37} \approx 12{,}2 \text{ см}^2.$$

**793.** Величина площади основания пирамиды известна. Следовательно, для определения ее объема нужно найти высоту. Очевидно, что высота пирамиды $h$ равна половине диагонали основания (рис. 167), т. е. $h = OA$ ($\angle SAO = 45°$).

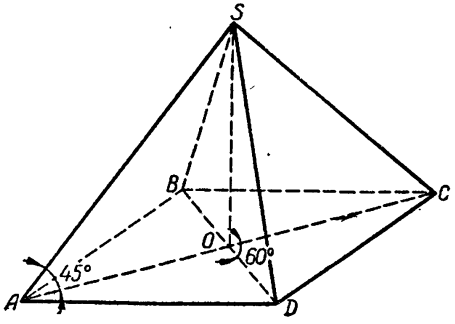


Рис. 167.

С другой стороны, так как $\triangle DOC$ равносторонний, то половина диагонали основания равна меньшей стороне основания $CD$.

Таким образом, если $CD = x$, а $AD = y$, то

$$(2x)^2 = x^2 + y^2;$$

$$xy = S,$$

откуда

$$x = h = \sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3}}.$$

Следовательно, объем пирамиды

$$V = \frac{1}{9} S \sqrt{S} \sqrt[4]{27} \text{ куб. ед.}$$

Второй способ определения высоты пирамиды. Обозначим половину диагонали основания через $z$.

Тогда

$$S = \frac{(2z)^2 \sin 60°}{2} = z^2\sqrt{3},$$

откуда

$$h = z = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3}}.$$

**794.** Объем пирамиды $V = \frac{SH}{3}$, где $S$ — площадь основания, а $H$ — высота пирамиды. Необходимо отыскать эти неизвестные величины, зная, что $\angle OSE = \alpha$ (рис. 168) и $SE - SO = m$.

Обозначим апофему пирамиды $SE$ через $x$, тогда $H = x\cos\alpha$. Но

$$x - x\cos\alpha = m,$$

откуда

$$x = \frac{m}{1-\cos\alpha} = \frac{m}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

и, следовательно,

$$H = \frac{m\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Принимая во внимание, что

$$OE = x\sin\alpha = \frac{m\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

получим

$$S = \left(\frac{m\sin\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

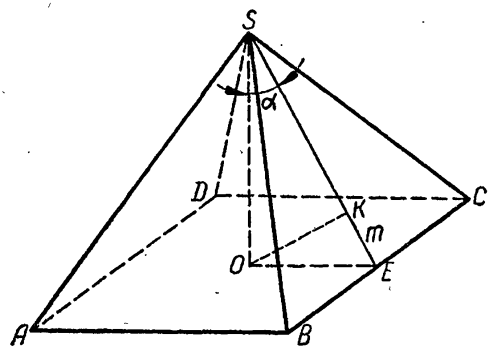



Рис. 168.

Таким образом,

$$V = \frac{2m^3\cos\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2m^3\cos\alpha\sin\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2m^3\operatorname{ctg}\alpha\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3}m^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\text{ куб. ед.}$$

Примечание. Можно указать еще один способ решения. На стороне $SE$ треугольника $SOE$ отложим $SK = SO$, тогда $KE = m$; $\angle KOE = \frac{\alpha}{2}$; $\angle OEK = 90^\circ - \alpha$; $\angle OKE = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Из треугольника $OKE$ по теореме синусов находим

$$\frac{KE}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{OE}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)},$$

откуда

$$OE = \frac{a}{2} = \frac{m\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = m\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$SO = OE \operatorname{ctg} \alpha = m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$V = \frac{\left(2m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha}{3} = \frac{4}{3} m^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha \text{ куб. ед.}$$

**795.** Построение.

1-й способ. Пусть $SABCD$ — данная пирамида (рис. 169). В диагональной плоскости $SBD$ проводим прямую $DL \perp SB$. Через

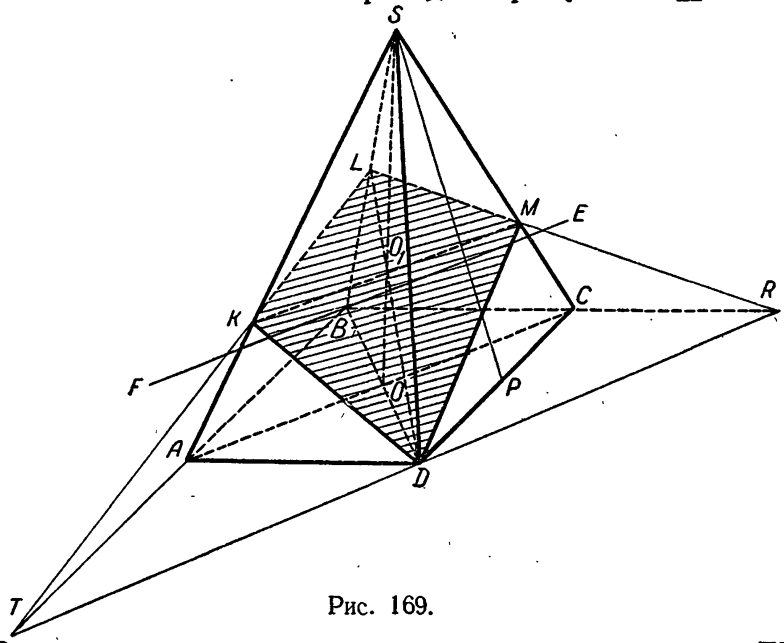



Рис. 169.

точку $D$ в плоскости основания пирамиды проводим прямую $TDR \parallel AC$ до пересечения ее в точках $T$ и $R$ с продолжением прямых $BA$ и $BC$. Соединяем точки $T$ с $L$ (в плоскости пирамиды $ASB$) и $R$ с $L$ (в плоскости $SBC$), находим точки пересечения их $K$ и $M$ с ребрами пирамиды $AS$ и $SC$. Соединив точки $K$, $L$, $M$ и $D$, получим искомое сечение $KLMD$, проходящее через точку $D$ и перпендикулярное к ребру $SB$.

*Доказательство.* Проведя прямую $FBE \parallel AC$, на основании теоремы о трех перпендикулярах, устанавливаем, что $SB \perp FE$ и, следовательно, $SB \perp TR$. Кроме того, $SB \perp DL$ (по построению). Поэтому прямая $SB$ перпендикулярна к плоскости $KLMD$.

2-й способ. В диагональной плоскости $SBD$ данной пирамиды проводим прямую $DL \perp SB$, находим точку пересечения $O_1$ прямой $LD$ и высоты пирамиды $SO$.

Через точку $O_1$ в диагональной плоскости $SAC$ пирамиды проводим прямую $KO_1M \parallel AC$, фиксируем точки ее пересечения $K$ и $M$ с боковыми ребрами $AS$ и $CS$ пирамиды. Соединив точки $K$, $L$, $M$ и $D$, получим четырехугольник $KLMD$, который и будет искомым сечением.

*Доказательство.* $AC \perp BD$ и $AC \perp SO$, поэтому прямая $AC$ перпендикулярна к плоскости $SBD$ (теорема о двух перпендикулярах), и, следовательно, $KM$ перпендикулярна плоскости $SBD$. Таким образом, $SB \perp KM$ и $SB \perp DL$ (по построению), а если прямая перпендикулярна двум непараллельным прямым на плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

В сечении получается четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

Решение.

$$S_{KLMD} = S_{KLM} + S_{KMD} = \frac{KM \cdot LO_1}{2} + \frac{KM \cdot O_1D}{2} = \frac{KM \cdot LD}{2}.$$

Площадь построенного сечения равна половине произведения его диагоналей. Решение сводится к вычислению последних. Обозначим $\angle SDB = \angle SBD = x$.

$$BD = 2BO = 2BS\cos x = 2a\cos x \text{ (из } \triangle BOS).$$

Из $\triangle LBD$ найдем

$$LD = BD\sin x = 2a\sin x\cos x,$$

а из $\triangle O_1OD$ получим

$$OO_1 = OD\operatorname{tg}(90° - x) = a\cos x\operatorname{ctg} x;$$

$$SO_1 = SO - OO_1 = a\sin x - a\cos x\operatorname{ctg} x = \frac{a(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin x}$$

$$(SO = a\sin x \text{ из } \Delta SOB).$$

Для определения $KM$ рассмотрим $\triangle KO_1S$:

$$KM = 2KO_1 = 2 \cdot SO_1\operatorname{ctg} x = \frac{2a^2(\sin^2 x - \cos^2 x)\operatorname{ctg} x}{\sin x}.$$

Найдя $KM$ и $LD$, выраженные через функции угла $x$, подставим их значения в выражение площади сечения:

$$S_{KLMD} = \frac{LD \cdot MK}{2} = \frac{2a^{2\prime}\cos^2 x(1 - 2\cos^2 x)}{\sin x};$$

теперь рассмотрим $\triangle SDP$:

$$DP = a\cos\alpha,$$

поэтому

$$OD = \sqrt{2}a\cos\alpha.$$

С другой стороны, $OD = a\cos x$.

Сравним последние равенства:

$$\sqrt{2}a\cos\alpha = a\cos x,$$

или

$$\cos x = \sqrt{2}\cos\alpha.$$

Подставим найденное значение $\cos x$ в выражение для площади сечения:

$$S_{KLMD} = \frac{2a^2\, 2\cos^2\alpha\,(1-4\cos^2\alpha)}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}} = -\frac{4a^2\cos\alpha\,(2\cos 2\alpha+1)}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} =$$

$$= -\frac{8a^2\cos\alpha\,(\cos 2\alpha+\cos 60°)}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} = -\frac{16a^2\cos\alpha\cos(30°+\alpha)\cos(30°-\alpha)}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} =$$

$$= \frac{16a^2\cos\alpha\sin(\alpha-60°)\sin(\alpha+60°)}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \text{ кв. ед.}$$

Чтобы было возможно построение сечения, высота $DL$ треугольника $SDB$ должна быть внутренняя, поэтому

$$\angle BSD < 90°,$$

или

$$180° - 2x < 90°, \quad x > 45°.$$

Но

$$\cos x = \sqrt{2}\cos\alpha,$$

следовательно, $\sqrt{2}\cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha < \frac{1}{2}$, $\alpha > 60°$,

где $\alpha$ — один из углов равнобедренного треугольника ($\alpha < 90°$).

Окончательно имеем

$$60° < \alpha < 90°.$$

При этих условиях полученное решение будет действительным положительным числом.

Обычные условия, накладываемые на параметр $\alpha$, несколько шире. Так как сумма плоских углов при вершине трехгранного угла (при вершине $D$) больше третьего, то

$$2\alpha > 90°; \quad \alpha > 45° \quad \text{и} \quad 45° < \alpha < 90°.$$

**796.** Искомый объем пирамиды $V = \frac{SH}{3}$, где $S$ — площадь основания; $H$ — высота пирамиды.

Если $OK$ (рис. 170) — перпендикуляр, опущенный на сторону основания $BC$, то $S = \frac{na}{2}\,OK$, где $OK = \frac{1}{2}\,a\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$.

Высота

$$H = OB\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{180°}{n}}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{na^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}}{24\sin\frac{180°}{n}} \text{ куб. ед.}$$

**797.** Имеем правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (рис. 171) с объемом $V$ и $\angle OSB = \alpha$. Нужно определить $r = OK$.

Очевидно,

$$OK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AD = KB.$$

Из треугольника $OKB$ находим

$$OB = \sqrt{OK^2 + KB^2} = \sqrt{OK^2 + OK^2} = OK\sqrt{2} = r\sqrt{2}.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H, \quad \text{где} \quad H = OS.$$

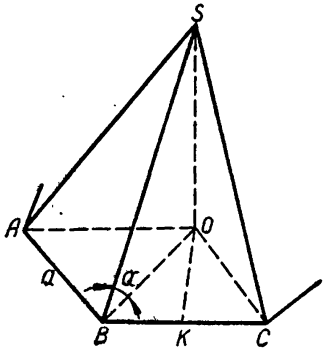



Рис. 170.

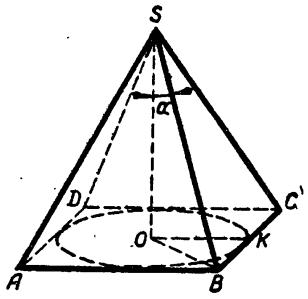



Рис. 171.

Так как $S_{\text{осн}}$ — площадь квадрата $ABCD$, то

$$S_{\text{осн}} = AB^2 = (2OK)^2 = 4OK^2 = 4r^2.$$

Из треугольника $OSB$ находим, что

$$H = OS = OB \operatorname{ctg} \alpha = r\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Теперь находим

$$V = \frac{1}{3} 4r^2 r\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha,$$

откуда

$$r = \frac{1}{2} \sqrt[3]{3\sqrt{2} V \operatorname{tg} \alpha} \text{ лин. ед.}$$

**798.** Из $\triangle BMC$ (рис. 172), где $\angle MCB = 45°$, а $\angle MBC = 180° - (45° + \alpha) - 45° = 90° - \alpha$, по теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin(45° + \alpha)} = \frac{m}{\sin(90° - \alpha)},$$

отсюда

$$BC = a = \frac{m \sin(45° + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Из $\triangle ABC$ находим

$$AC = b = a \operatorname{ctg} \alpha = \frac{m \sin (45^\circ + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Из $\triangle DCM$ находим

$$MD = H = m \operatorname{tg} \alpha.$$

Линейными углами для двугранных углов $DACB$ и $DBCA$ будут $\angle DKM$ и $\angle DNM$; эти углы равны, так как $\triangle MKC = \triangle MNC$ и $\triangle DMK = \triangle DNM$. Обозначим $\angle DNM = \angle DKM = \varphi$, тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{MN}, \quad \text{где} \quad MN = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{1}{6} m^3 \frac{\sin^2 (45^\circ + \alpha)}{\cos^2 \alpha};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha).$$

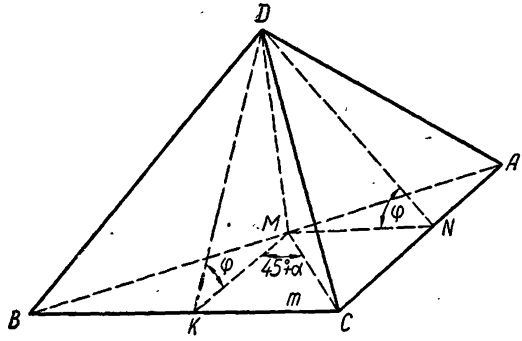



Рис. 172.

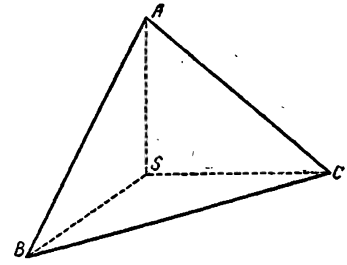



Рис. 173.

**799.** Каждое ребро данной пирамиды, образованное пересечением двух граней, перпендикулярных к третьей, перпендикулярно к этой третьей грани и, поскольку два других ребра лежат на этой грани, то рассматриваемое ребро перпендикулярно к ним. Следовательно, можно сделать вывод, что все боковые ребра данной пирамиды взаимно перпендикулярны, т. е. ее боковые грани являются прямоугольными треугольниками.

Таким образом, обозначая боковые ребра пирамиды через $x$, $y$, $z$, получим

$$\frac{1}{2} xy = 6; \quad \frac{1}{2} xz = 4; \quad \frac{1}{2} yz = 3. \qquad (1)$$

Примем за основание данной пирамиды боковую грань $SBC$ (рис. 173).

Искомый объем будет равен

$$\frac{1}{3} S_{BCS} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} yzx = \frac{1}{6} xyz.$$

Для того чтобы найти $xyz$, перемножим равенства (1):

$$\frac{1}{8}x^2y^2z^2 = 72; \quad xyz = 24.$$

Следовательно, объем данной пирамиды равен 4 $м^3$.

**800.** Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, где $R$ — радиус основания, а $H$ — высота цилиндра.

По условию задачи (рис. 174)

$$H = d\sin\alpha; \quad 2\pi R = d\cos\alpha;$$

$$R = \frac{d\cos\alpha}{2\pi}.$$

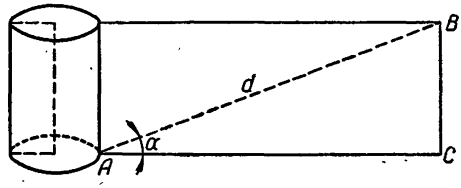



Рис. 174.

Таким образом,

$$V = \frac{\pi d^2\cos^2\alpha\, d\sin\alpha}{4\pi^2} = \frac{d^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{4\pi} \text{ куб. ед.}$$

**801.** Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 h = 3{,}14 \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}2 = 1{,}57\ дм^3.$$

Вес цилиндра в воздухе

$$P = 1{,}57 \cdot 7{,}79 = 12{,}23\ кг.$$

Вес вытесненной жидкости равняется

$$12{,}23\ кг - 10{,}5\ кг = 1{,}73\ кг.$$

Известно, что

$$d = \frac{P}{V},$$

или

$$d = \frac{1{,}73}{1{,}57} = 1{,}10\ кг/дм^3 \quad \text{— плотность жидкости.}$$

**802.** Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, где $R$ — радиус основания, а $H$ — высота цилиндра, которые необходимо определить.

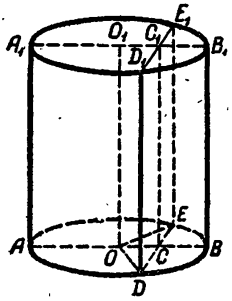



Рис. 175.

По условию $OC = a$, а $\angle DOE = \alpha$ (рис. 175). Из прямоугольного треугольника $DOC$

$$R = OD = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$DC = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}; \quad DE = 2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$S = DD_1 \cdot 2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$H = DD_1 = \frac{S}{2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом,

$$V = \pi \left( \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \frac{S}{2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a S}{\sin \alpha} \text{ куб. ед.}$$

**803.** Пусть диагональ данного прямоугольника $AC = a$ (рис. 176). Найдем объем $V_1$ цилиндра, полученного сворачиванием листа бумаги по стороне, прилежащей к углу $\alpha$.

Тогда $V_1 = \pi R_1^2 H_1$, где $R_1$ — радиус основания, а $H_1$ — высота получившегося цилиндра.

Но $2\pi R_1 = a \cos \alpha$, следовательно,

$$R_1 = \frac{a \cos \alpha}{2\pi}; \quad H = a \sin \alpha.$$

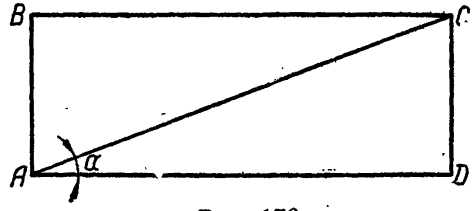



Рис. 176.

Следовательно,

$$V_1 = \pi \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{4\pi^2} a \sin \alpha = \frac{a^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{4\pi}.$$

Затем определим радиус основания $R_2$ и высоту $H_2$ цилиндра, полученного сворачиванием листа бумаги по меньшей стороне, противолежащей углу $\alpha$:

$$2\pi R_2 = a \sin \alpha; \quad R_2 = \frac{a \sin \alpha}{2\pi}; \quad H_2 = a \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$V_2 = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{4\pi}.$$

Таким образом,

$$\frac{V_1}{V_2} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Можно решить эту задачу и так.

Объем цилиндра равен

$$V = \pi r^2 h,$$

или

$$V = 2\pi r h \frac{r}{2} = S_б \frac{r}{2},$$

т. е. объем цилиндра равен произведению его боковой поверхности на половину радиуса. В данной задаче боковые поверхности цилиндров в обоих случаях равны, поэтому

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

**804.** Пусть $R$ — радиус основания, тогда высота конуса будет $4R$:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

или

$$V_{\text{кон}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Известно, что

$$P = Vd.$$

Следовательно,

$$2{,}5 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 10{,}47,$$

или

$$R = \sqrt[3]{\frac{7{,}5}{4 \cdot \pi \cdot 10{,}47}},$$

откуда

$$R = 0{,}385 \text{ дм}, \quad H = 1{,}54 \text{ дм}.$$

**805.** Объем конуса $V = \frac{1}{3} \pi r h$, где $r$ — радиус основания, а $h$ — высота конуса (рис. 177).

Но $$2\pi r = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 250}{360},$$

откуда $$r = \frac{125}{9} \text{ см}.$$

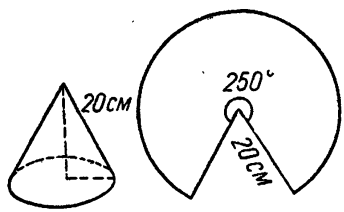



Рис. 177.

Высота конуса

$$h = \sqrt{20^2 - \left(\frac{125}{9}\right)^2} = \frac{5}{9} \sqrt{671} \text{ см}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{125}{9}\right)^2 \frac{5}{9} \sqrt{671} = \frac{5\pi}{27} \left(\frac{125}{9}\right)^2 \sqrt{671} \approx 2910 \text{ см}^3.$$

**806.** Для определения объема конуса необходимо найти радиус основания конуса $R$ и высоту $H = SO$ (рис. 178).

Радиус основания конуса $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Из $\triangle ASK$ находим, что $AS = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, а из $\triangle AOS$

$$H = SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}} \text{ куб. ед.}$$

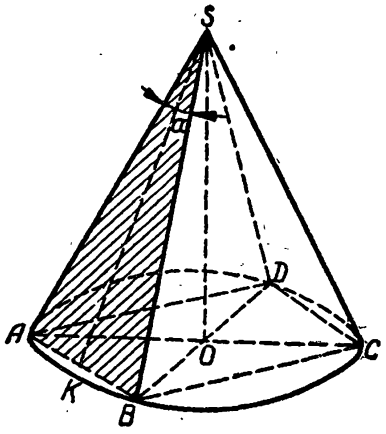


Рис. 178.

Нахождение числового значения объема:

$$a = 63{,}15 \text{ см и } \alpha = 66°52';$$

$$\lg V = \lg\pi + 3\lg a +$$

$$+ \frac{1}{2}\lg\cos\alpha - \lg 12 - \lg\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$\lg\pi = 0{,}4971$$

$$3\lg a = 5{,}4009$$

$$\frac{1}{2}\lg\cos\alpha = \overline{1}{,}7972$$

$$-\lg 12 = \overline{2}{,}9208$$

$$-\lg\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}2589$$

$$\lg V = 4{,}8749.$$

Отв. $V = 74\,980$ *см*$^3$.

**807.** Заметим, что $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot OS$ (рис. 179).

Из $\triangle OCS$ определим $OS$:

$$OS = OC\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

но так как $OC = R$, то $OS = R\mathrm{tg}\alpha$, следовательно,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3\,\mathrm{tg}\,\alpha \text{ куб. ед.}$$

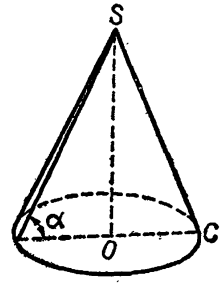


Рис. 179.

Полная поверхность конуса

$$S = \pi \cdot OC \cdot SC + \pi \cdot OC^2 = \pi \cdot OC\,(SC + OC).$$

Из $\triangle OSC$ определяем $SC$:

$$SC = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha};$$

$$S = \pi R\left(\frac{R}{\cos\alpha} + R\right) = \pi R^2\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) = 2\pi R^2 \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$S = 2\pi R^2 \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} \text{ кв. ед.}$$

**808.** Обозначим через $V$ объем сосуда, $v$ — объем ртути, $V' = V - v$ — объем воды, $H$ — высота сосуда, $h$ — толщина слоя ртути:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H; \quad v = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$$

$$V' = V - v = \frac{1}{3}\pi(R^2 H - r^2 h).$$

Известно, что вес тела равен его объему, умноженному на плотность. Обозначим через $P$ вес ртути, $P'$ — вес воды.

$$P = \frac{1}{3}\pi r^2 h d,$$

где $d$ — плотность ртути и

$$P' = \frac{1}{3}\pi(R^2 H - r^2 h).$$

По условию задачи известно, что

$$P = 3P',$$

отсюда

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h d = \pi(R^2 H - r^2 h),$$

или

$$\pi r^2 h d + 3\pi r^2 h = 3\pi R^2 H,$$

или

$$h = \frac{3\pi R^2 H}{\pi r^2 d + 3\pi r^2},$$

или

$$h = \frac{3R^2 H}{r^2(d+3)}.$$

Известно, что

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}, \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2},$$

или

$$h = \frac{3H^3}{h^2(d+3)},$$

откуда

$$h = H\sqrt[3]{\frac{3}{d+3}};$$

$$h = 12\sqrt[3]{\frac{3}{16{,}6}},$$

откуда $h \approx 1{,}4$ *см*; $H - h = 12 - 1{,}4 = 10{,}6$ *см*.

**809.** 1-й случай. Обозначим объем деревянного конуса через $V$, а объем его погруженной части через $V_1$.

Известно, что объемы конусов относятся как кубы их высот:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{H^3}{h^3}, \tag{1}$$

где $H$ — высота деревянного конуса, $h_1$ — высота его части, погруженной в воду.

Так как тело, погруженное в жидкость, испытывает давление снизу вверх, равное весу жидкости в объеме погруженной части тела, то вес деревянного конуса равен весу воды, имеющей объем $V_1$. Объемы тел, равных по весу, относятся обратно пропорционально их плотностям. Следовательно,

$$\frac{V}{V_1} = \frac{d_1}{d} = \frac{1}{0{,}729} \tag{2}$$

($d$ — плотность дерева, $d_1$ — плотность воды). Сравнивая (1) и (2), получим

$$\frac{H^3}{h^3} = \frac{1}{0{,}729},$$

отсюда

$$h = \sqrt[3]{0{,}729} \cdot H = 0{,}9H.$$

2-й случай. Через $V_2$ обозначим объем погруженной части, т. е. объем соответствующего усеченного конуса, а через $h_2$ — его высоту, которая подлежит определению. $V - V_2$ — объем конуса, выступающего над поверхностью воды.

$$\frac{V - V_2}{V} = \frac{(H - h_2)^3}{H^3} \quad \text{и} \quad \frac{V}{V_2} = \frac{1}{0{,}729},$$

или

$$\frac{V-V_2}{V}=\frac{(H-h_2)^3}{H^3} \quad \text{и} \quad \frac{V-V_2}{V}=\frac{1-0{,}729}{1}.$$

Сравнивая эти два равенства, находим

$$\frac{H-h_2}{H}=\sqrt[3]{0{,}271},$$

или

$$H-h_2=0{,}647H,$$

отсюда

$$h_2=0{,}353H\approx 0{,}35H.$$

**810.** Если конус вписан в пирамиду (а усеченный конус, вписанный в усеченную пирамиду, составляет часть конфигурации полной пирамиды с вписанным в нее конусом), то:

1) вершина конуса сливается с вершиной пирамиды;

2) высота пирамиды сливается с высотой конуса и проходит через центр круга, вписанного в основание (прямая, соединяющая центры кругов, вписанных в основания усеченной пирамиды, есть высота усеченного конуса и усеченной пирамиды);

3) основание (основания) пирамиды (усеченной пирамиды) есть многоугольник (многоугольники), в который (в которые) можно вписать круг (круги), а сам круг (круги) есть основание (основания) конуса (усеченного конуса);

4) все боковые грани одинаково наклонены к плоскости (плоскостям) основания (оснований);

5) высоты боковых граней пирамиды есть прямые, соединяющие вершину пирамиды (конуса) с точками касания окружности, вписанной в основание, со сторонами основания (в усеченной пирамиде — это прямые, лежащие в боковых гранях и соединяющие точки касания окружностей кругов, вписанных в основания);

6) все высоты боковых граней пирамиды равны и являются линиями касания конической поверхности с боковыми гранями пирамиды (в усеченной пирамиде — это прямые, указанные в пункте 5).

После краткого предисловия решим данную задачу.

Объем усеченного конуса

$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr), \qquad (1)$$

где $h$ — высота усеченного конуса, $R$ и $r$ — соответственно радиусы его нижнего и верхнего оснований.

Таким образом, чтобы решить задачу, необходимо вычислить $R$, $r$ и $h$.

Проведем прямую $AF$ (рис. 180) перпендикулярно к прямой $BC$.

Из треугольника $ABF$ имеем $R = \frac{a}{2}\sin\varphi$.

Аналогично находим, что

$$r = \frac{b}{2}\sin\varphi.$$

Основанием пирамиды должна быть трапеция, сумма параллельных сторон которой равна сумме боковых сторон. По условию же основания есть равнобедренные трапеции, поэтому

$$BC + AD = AB + DC = 2AB = 2a.$$

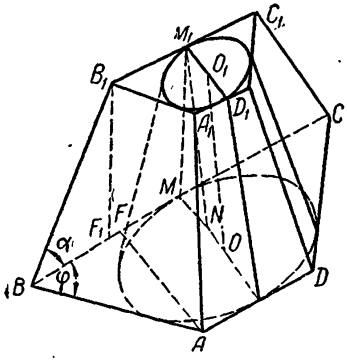


Рис. 180.

Из треугольника $ABF$

$$\begin{cases} \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = a; \\ \frac{BC}{2} - \frac{AD}{2} = a\cos\varphi. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений определяем $BC$:

$$BC = a(1 + \cos\varphi) = 2a\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Совершенно аналогично вычисляем сторону $B_1C_1$ верхнего основания:

$$B_1C_1 = 2b\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Из точки $B_1$ опустим перпендикуляр на прямую $BC$ ($B_1F_1$). Тогда

$$BF_1 = \frac{BC}{2} - \frac{B_1C_1}{2} = a\cos^2\frac{\varphi}{2} - b\cos^2\frac{\varphi}{2} = (a - b)\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Из треугольника $BB_1F_1$ находим

$$B_1F_1 = BF_1\operatorname{tg}\alpha = (a - b)\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Соединим точки $OO_1$ и проведем плоскость через $OO_1$ и $OM$ ($OM$ — радиус нижнего основания усеченного конуса). Она пересекает боковую грань $BB_1C_1C$ по $MM_1$ ($MM_1$ — высота этой грани, а $O_1M_1$ — радиус верхнего основания конуса).

$$MM_1 = B_1F_1.$$

В трапеции $OO_1M_1M$ ($OM \parallel O_1M_1$ как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей) проведем $M_1N \perp OM$ ($M_1N = OO_1$).

Из треугольника $M_1NM$ вычислим $M_1N = h$.

$$h = M_1N = \sqrt{MM_1^2 - MN^2} = \sqrt{MM_1^2 - (R-r)^2} =$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a-b)^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{(a-b)\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\alpha} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(a-b)\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\alpha} \sqrt{\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sin\alpha + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\alpha\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sin\alpha - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\alpha\right)} =$$

$$= \frac{(a-b)\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\alpha} \sqrt{\sin\left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Подставив значения $R$, $r$ и $h$ в равенство (1), получим

$$V = \frac{\pi(a-b)\cos\frac{\varphi}{2}}{3\cos\alpha} \sqrt{\sin\left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)} \left(\frac{a^2}{4}\sin^2\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{ab}{4}\sin^2\varphi + \frac{b^2}{4}\sin^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{\pi(a-b)(a^2+ab+b^2)\cos\frac{\varphi}{2}\sin^2\varphi}{3\cdot 4\cdot\cos\alpha} \sqrt{\sin\left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\pi(a^3-b^3)\sin^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{12\cos\alpha} \sqrt{\sin\left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)} \text{ куб. ед.}$$

$$0 < \alpha < 90°; \quad 0 < \varphi < 90° \text{ и } \alpha > \frac{\varphi}{2}.$$

Поскольку ребро $BB_1$ проектируется на биссектрису угла $ABC$, ибо центр круга, вписанного в основание $BADC$, лежит на пересечении биссектрис углов основания, а плоскость $O_1OBB_1$ (на рисунке не показано) перпендикулярна к этому основанию (признак перпендикулярности двух плоскостей), то ребро $BB_1$ составляет с ребрами $BA$ и $BC$ равные углы, т. е. $\angle B_1BC = \angle B_1BA$ (предлагаем это доказать читателю). Сумма же двух плоских углов при вершине трехгранного угла больше третьего, поэтому $2\alpha > \varphi$, или $\alpha > \frac{\varphi}{2}$.

Мы получили то же самое неравенство между $\alpha$ и $\varphi$, что и выше, но исходя уже из геометрических соображений.

**811.** Поперечное сечение трубы $B$ (рис. 181) вдвое больше поперечного сечения трубы $A$, т. е. ее диаметр

$$d = 100\sqrt{2};$$

$$EC = MC - ME = 50\sqrt{2} - 50 = 50(\sqrt{2} - 1) \approx 20{,}7 \text{ мм}.$$

Из $\triangle CED$

$$DE = EC \operatorname{ctg} 20°,$$

или

$$DE \approx 56{,}9 \text{ мм}.$$

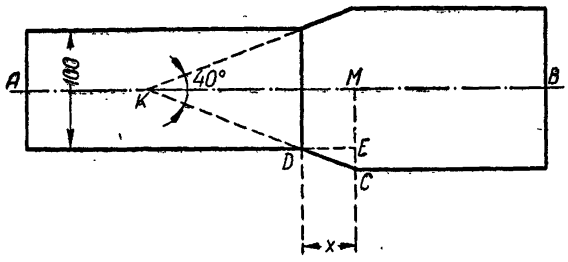



Рис. 181.

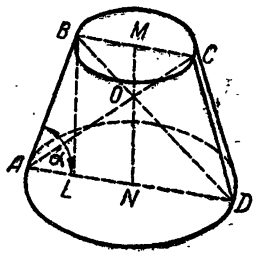



Рис. 182.

**812.** По условию $AB = l$; $\angle BAN = \alpha$; $BD \perp AC$ (рис. 182).

Объем усеченного конуса определим по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2),$$

где $H$ — высота усеченного конуса;

$R$ и $r$ — радиусы, соответственно нижнего и верхнего оснований.

Из $\triangle ABL$ находим, что $H = BL = l \sin\alpha$.

Принимая во внимание, что по условию $AC \perp BD$, и, следовательно, $\angle OAN = \angle OBM = 45°$ (так как диагонали равнобочной трапеции наклонены к основанию под равными углами), получаем: $R = ON$; $r = OM$, т. е. $R + r = l \sin\alpha$. Но $AL = l\cos\alpha$, и, таким образом, $R - r = l\cos\alpha$.

Следовательно,

$$R = \frac{1}{2}l(\sin\alpha + \cos\alpha); \quad r = \frac{1}{2}l(\sin\alpha - \cos\alpha),$$

откуда

$$R^2 = \frac{1}{4}l^2(1 + \sin 2\alpha);$$

$$r^2 = \frac{1}{4}l^2(1 - \sin 2\alpha);$$

$$Rr = \frac{1}{4}l^2(-\cos 2\alpha).$$

Далее находим

$$V = \frac{\pi}{12} l^3 \sin\alpha (2 - \cos 2\alpha) \text{ куб. ед.}$$

**813.** Пусть веса скорлуп $x$ и $y$.

Тогда $x : y = d_1^2 : d_2^2$, так как веса скорлуп при одинаковой толщине пропорциональны квадратам их поверхностей. Веса содержимого яиц пропорциональны объемам (примем с известной погрешностью, что яйцо имеет форму шара):

$$(P_1 - x) : (P_2 - y) = d_1^3 : d_2^3,$$

откуда

$$x = \frac{P_2 d_1^3 - P_1 d_2^3}{d_2^2 (d_1 - d_2)}; \quad y = \frac{P_2 d_1^3 - P_1 d_2^3}{d_1^2 (d_1 - d_2)}.$$

**814.** Боковая поверхность конуса

$$S_б = \pi r l,$$

или

$$S = \pi r l.$$

Найдем полную поверхность конуса, которая будет равновелика площади равностороннего треугольника со стороной $a$:

$$S_{\text{полн. пов}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

поэтому

$$S + \pi r^2 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

откуда

$$r^2 = \frac{a^2 \sqrt{3} - 4S}{4\pi}.$$

Следовательно,

$$l^2 = \frac{4S^2}{\pi (a^2 \sqrt{3} - 4S)}.$$

Теперь находим $H$:

$$H^2 = l^2 - r^2 = \frac{4S^2}{\pi (a^2 \sqrt{3} - 4S)} - \frac{a^2 \sqrt{3} - 4S}{4\pi} =$$

$$= \frac{16S^2 - (a^2 \sqrt{3} - 4S)^2}{4\pi (a^2 \sqrt{3} - 4S)} = \frac{16S^2 - 3a^4 + 8\sqrt{3} a^2 S - 16S^2}{4\pi (a^2 \sqrt{3} - 4S)} =$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{3} (8S - a^2 \sqrt{3})}{4\pi (a^2 \sqrt{3} - 4S)}.$$

Обозначив искомый радиус шара буквой $R$, находим соотношение

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 H,$$

т. е.

$$R^3 = \frac{r^2 H}{4}$$

или

$$R = \sqrt[3]{\frac{(a^2\sqrt{3}-4S)}{16\pi}\sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}(8S-a^2\sqrt{3})}{4\pi(a^2\sqrt{3}-4S)}}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^2\sqrt{3}(8S-a^2\sqrt{3})(a^2\sqrt{3}-4S)}{1024\pi^3}}.$$

815. Проведем секущую плоскость через центры трех шаров $O_1$, $O_2$, $O_3$ и три касательных прямых $NA$, $NB$, $NC$ (рис. 183,*а*) к окружностям, полученным в сечении данных шаровых поверхностей.

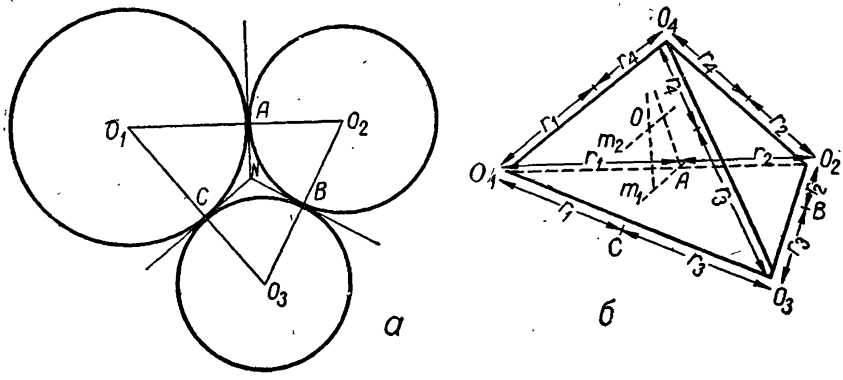



Рис. 183.

Докажем, что эти три прямые пересекаются в одной точке:

$$O_1A = O_1C;$$
$$O_2A = O_2B; \qquad (1)$$
$$O_3C = O_3B,$$

или $O_1A + O_2A + O_3C = O_1C + O_2B + O_3B = p$ (где $p$ — полупериметр треугольника $O_1O_2O_3$);

$$O_1A + O_2A + O_3C = p, \text{ отсюда } O_3C = p - O_1O_2.$$

Как известно, если провести биссектрисы внутренних углов треугольника и из точки их пересечения опустить перпендикуляры на его стороны, то, обозначив точки пересечения перпендикуляров со сторонами через $A'$, $B'$ и $C'$, получим

$$O_3C' = p - O_1O_2,$$

или $O_3C' = O_3C$. То же справедливо и для других аналогичных отрезков. Таким образом, существует единственное деление сторон треугольника на части, удовлетворяющие условию (1). Поэтому прямые $NA$, $NB$ и $NC$ пересекутся в одной точке — в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника $O_1O_2O_3$.

Геометрическое место касательных к шаровой поверхности в данной на ней точке есть плоскость, проходящая через точку касания и перпендикулярная к радиусу, соединяющему центр шара с этой точкой (касательная плоскость). Поэтому три касательные плоскости, проходящие через точки касания $A$, $B$ и $C$, должны пройти через точку $N$ и, будучи перпендикулярны к плоскости $O_1O_2O_3$ (признак перпендикулярности плоскостей), пересекутся по одной прямой, проходящей через точку $N$ и перпендикулярной к плоскости $O_1O_2O_3$.

Четыре плоскости, каждая из которых проходит через центры трех шаров, образуют тетраэдр $O_4O_1O_2O_3$ (рис. 183,*б*), суммы длин противоположных ребер которого равны. Каждой грани соответствует прямая, являющаяся линией пересечения трех плоскостей, касающихся шаровых поверхностей в точках их касания (три из этих плоскостей рассмотрены выше). Всего таких плоскостей шесть. Обозначим указанные прямые через $m_1$, $m_2$, $m_3$ и $m_4$.

Каждая из этих прямых равноудалена от сторон соответствующей грани (например, $m_1$ — от сторон грани $O_1O_2O_3$) и проходит через центр круга, вписанного в нее. Прямые $m_1$ и $m_2$, соответствующие граням $O_1O_2O_3$ и $O_2O_1O_4$, имеющих общую сторону $O_1O_2$, лежат в одной касательной плоскости, проходящей через точку $A$. Следовательно, прямые $m_1$ и $m_2$ пересекаются (так как они не параллельны). Обозначим точку их пересечения через $O$. Прямые $m_3$ и $m_4$ ($m_3$ соответствует грани $O_3O_2O_4$, $m_4$ — $O_4O_1O_3$) должны пройти через ту же точку $O$, являющуюся точкой пересечения уже рассмотренных пяти касательных плоскостей, две из которых проходят через каждую из этих прямых и принадлежат к разным тройкам плоскостей, пересекающимся по этим прямым.

Таким образом, все 6 касательных плоскостей и 4 соответствующих им прямых пересекаются в одной точке.

Из рассмотренного следует, что если суммы длин противоположных ребер тетраэдра равны, то существует точка, равноудаленная от всех его сторон.

Сумму длин противоположных ребер тетраэдра можно принять как сумму длин четырех радиусов шаров, попарно касающихся друг друга, имеющих центры в точках $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $O_4$ и не лежащих в одной плоскости. Кроме того, при указанном выше условии в тетраэдр можно вписать шар, касающийся всех его ребер.

В данной задаче сумма противоположных ребер тетраэдра равна $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ ($r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$ — радиусы данных шаров).

**816.** Пусть $OADB$ — сферический сектор, имеющий угол $\alpha$, а его радиус $OA$ надо определить. Удлинив радиус $OA$ на величину

$AE$, равную $a$ *см*, получим другой сферический сектор $OEHF$, объем которого превышает объем первого сферического сектора на $d$ *см*$^3$. На основании формул

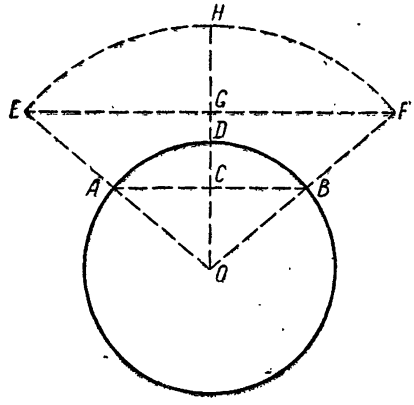



Рис. 184.

$$V_{\text{сф. сект. }OADB} = \frac{2}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot CD;$$

$$V_{\text{сф. сект. }OEHF} = \frac{2}{3}\pi \cdot OE^2 \cdot GH.$$

Обозначив искомый радиус через $x$, выразим $CD$, $GH$ и радиус $OE$ через $\alpha$, $a$ и $x$ (рис. 184).

$$CD = OD - OC, \text{ но}$$

$$OC = x\cos\frac{\alpha}{2},$$

отсюда

$$CD = x\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2x\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Аналогично $GH = OH - OG = (x+a) - (x+a)\cos\frac{\alpha}{2} = 2(x+a)\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

$$V_{\text{сф. сект. }OADB} + d = V_{\text{сф. сект. }OEHF},$$

или

$$\frac{4}{3}\pi x^3 \sin^2\frac{\alpha}{4} + d = \frac{4}{3}\pi(x+a)^3\sin^2\frac{\alpha}{4};$$

решив это уравнение, находим, что

$$x = -\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{-\frac{a^2}{3} + \frac{d}{a\pi\sin^2\frac{\alpha}{4}}}\right).$$

**817.** Для определения объема шарового сектора воспользуемся формулой

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где $R$ — радиус шара; $h$ — высота соответствующего шарового сегмента (рис. 185).

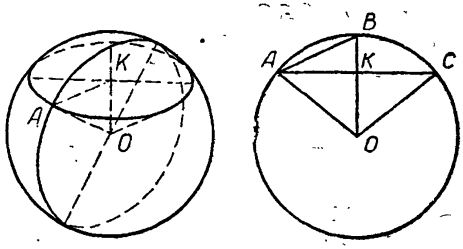



Рис. 185.

Радиус $R$ определим из выражения

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

откуда

$$R^3 = \frac{3V}{4\pi}.$$

Очевидно, $h = R - OK$, но из $\triangle AOK$

и $$OK = R\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$h = R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Таким образом,

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3V}{4\pi}\sin^2\frac{\alpha}{4} = V\sin^2\frac{\alpha}{4} \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Высоту сегмента можно также вычислить из треугольника $BAK$, принимая во внимание, что $\angle BAK = \frac{\alpha}{4}$:

$$BK = AK\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

818. Пусть $AC$ и $AD$ две из таких касательных. $C$ и $D$ — точки касания с шаровой поверхностью (рис. 186). $Q$ — центр шара.

1. Искомое расстояние $CD$ будет хордой малого круга радиуса $CB$ и может быть определено из равнобедренного треугольника $CBD$, в котором $\angle CBD = \frac{360^\circ}{n}$. Сторону $CB$ можно определить следующим образом: из $\triangle CQB$ $CB = R\sin Q$, из прямоугольного треугольника $ACQ$ $\cos Q = \frac{R}{l}$, откуда $\sin Q = \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}} = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - R^2}$; таким образом,

$$CB = \frac{R}{l}\sqrt{l^2 - R^2}.$$

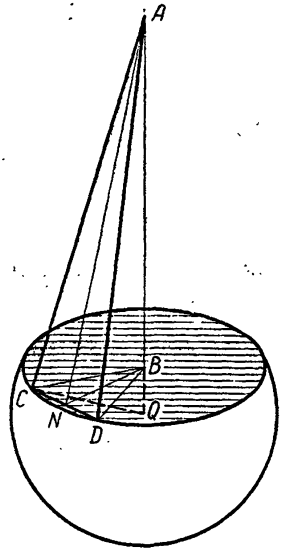


Рис. 186.

Из $\triangle CBD$

$$CD = 2NC = 2CB\sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{2R}{l}\sqrt{l^2 - R^2}\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

2. Угол между двумя касательными, который обозначим через $\varphi$, найдем из прямоугольного $\triangle ACN$:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{CN}{AC} = \frac{CB\sin\frac{180^\circ}{n}}{AC}.$$

Подставив вместо $CB$ полученное для него значение и выразив катет $AC$ по теореме Пифагора через $\sqrt{l^2 - R^2}$, окончательно имеем

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{l}\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

**819.** На рис. 187 изображено осевое сечение обоих тел. Даны: дуга $ACB = \alpha$; радиус основания сегмента $ACB$, равный $r$; $DE$ — линия пересечения плоскостей осевого сечения и касательной плоскости; $DFE$ — сечение получившегося нового сегмента; $DC$ —

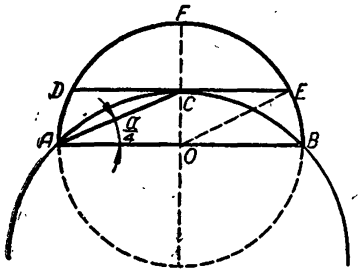



Рис. 187.

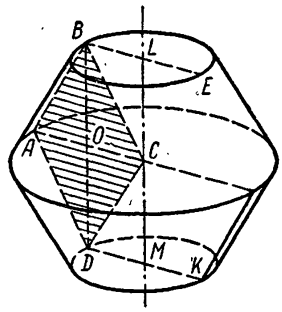



Рис. 188.

искомый радиус сегмента, найдя который можно определить окружность основания этого сегмента.

Поскольку радиусом шара, построенного на сегменте $ACB$, служит радиус $r$ основания сегмента, то искомый радиус основы второго сегмента $x = CE$ найдем из $\triangle OCE$, где $OE = r$, а $CO$ равно высоте сегмента $ACB$:

$$x = \sqrt{r^2 - OC^2}.$$

Высоту $CO$ определим из прямоугольного треугольника $ACO$, где $\angle CAO = \frac{\alpha}{4}$, так как он опирается на дугу $CB = \frac{\alpha}{2}$.

Следовательно, $CO = r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$, откуда

$$x = \sqrt{r^2 - r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4}} = r\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{4}}\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

а искомая длина окружности

$$C = 2\pi x = \frac{2\pi r}{\cos\frac{\alpha}{4}}\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ лин. ед.}$$

**820.** Для того чтобы найти объем тела вращения, нужно найти объем двух усеченных конусов, которые составлены большими основаниями, и вычесть объем двух полных конусов (рис. 188).

Известно, что объем усеченного конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2),$$

а объем полного конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Оба усеченных конуса имеют одинаковый объем. $\angle ABC = 60°$, откуда следует, что $\triangle ABC$ — равносторонний, т. е.

$$AC = 18; \quad OB = h = 9\sqrt{3}; \quad BL = DM = 9.$$

Объем всей фигуры

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9\sqrt{3}(324 + 162 + 81) = 3402\sqrt{3} \cdot \pi;$$

$$V_{\text{кон. ВСЕ}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 81 \cdot 9\sqrt{3} = 243\sqrt{3} \cdot \pi.$$

Искомый объем

$$V = 3402\sqrt{3} \cdot \pi - 486\sqrt{3} \cdot \pi = 2916\sqrt{3} \cdot \pi \ см^3 \approx 15{,}9 \ дм^3.$$

**821.** Тело, полученное вращением равнобедренного треугольника вокруг боковой стороны, состоит из двух конусов с общим основанием. Радиус основания $R = OC$, высота одного конуса $H_1 = OB$ и высота второго конуса $H_2 = AO$ (рис. 189). Заметим, что

$$V_{\text{вр}} = V_1 + V_2,$$

где

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_1$$

и

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_2.$$

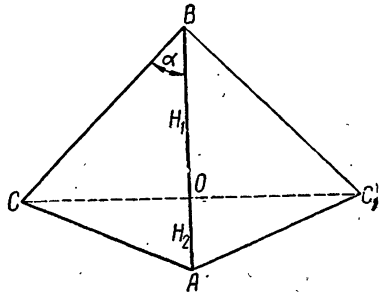



Рис. 189.

Следовательно,

$$V_{\text{вр}} = \frac{1}{3}\pi R^2(H_1 + H_2).$$

Но

$$H_1 + H_2 = AB = BC = b$$

(по условию), значит

$$V_{\text{вр}} = \frac{1}{3}\pi R^2 b.$$

Из прямоугольного треугольника $OBC$

$$R = OC = BC \sin\alpha,$$

или

$$R = b\sin\alpha.$$

Итак,

$$V_{вр} = \frac{1}{3}\pi b^3 \sin^2\alpha \text{ куб. ед.}$$

Чтобы вычислить объем тела вращения при заданных значениях для $\alpha$ и $\beta$, прологарифмируем обе части последнего равенства:

$$\lg V_{вр} = \lg\pi + 3\lg b + 2\lg\sin\alpha - \lg 3$$

$$\lg\pi = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}4971$$

$$3\lg b = 3 \cdot \lg 11{,}75 = 3 \cdot 1{,}0700 = 3{,}2100$$

$$2\lg\sin\alpha = 2\lg\sin 87°32' = 2\cdot\bar{1}{,}9996 = \bar{1}{,}9992$$

$$-\lg 3 = -0{,}4771 \qquad = \bar{1}{,}5229$$

$$\lg V_{вр} = 3{,}2292$$

Итак, $V_{вр} = 1695\ см^3$.

Предлагаем читателю рассмотреть при решении этой задачи случаи, когда $\alpha > 90°$ и $\alpha = 90°$.

**822.** Искомый объем равен разности между суммой объемов конусов с образующими $AB$ и $BC$ (рис. 190) и суммой объемов конусов с образующими $OA$ и $OC$ (ось всех четырех конусов общая — $AC$).

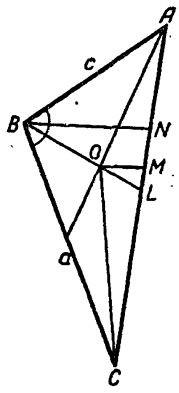


Рис. 190.

Пусть $BN = R$ — радиус основания двух первых конусов и $OM = r$ — радиус основания двух вторых конусов.

Искомый объем

$$V = \frac{\pi}{3}R^2 \cdot AN + \frac{\pi}{3}R^2 \cdot CN -$$

$$-\left(\frac{\pi}{3}r^2 \cdot AM + \frac{\pi}{3}r^2 \cdot MC\right) = \frac{\pi}{3}(R^2 - r^2)\,AC.$$

Из подобия треугольников $BNL$ и $OML$

$$\frac{R}{r} = \frac{BN}{OL} = 3$$

(по свойству медиан треугольника).

Следовательно,

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)AC = \frac{8\pi}{27}R^2 \cdot AC.$$

По теореме косинусов $AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.

Определяем радиус $R$. Площадь треугольника $ABC$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}AC \cdot R,$$

откуда

$$R = \frac{ac \sin \beta}{AC} = \frac{ac \sin \beta}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}}.$$

Затем находим

$$V = \frac{8\pi}{27} \cdot \frac{a^2c^2 \sin^2 \beta}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta)} \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$$

и окончательно

$$V = \frac{8\pi}{27} \cdot \frac{a^2c^2 \sin^2 \beta}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}}.$$

Подставив числовые данные в полученное равенство, получим

$$V = \frac{8\pi}{27} \cdot \frac{14^2 \cdot 15^2 \sin^2 67°10'}{\sqrt{14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cos 67°10'}} =$$

$$= \frac{8\pi \cdot 14^2 \cdot 5^2 \cdot \sin^2 67°10'}{3\sqrt{14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cos 67°10'}} = \frac{39200\pi \cdot \sin^2 67°10'}{3\sqrt{421 - 420 \cos 67°10'}}.$$

При помощи четырехзначных таблиц логарифмов получим

$$V = 2172 \text{ см}^3.$$

Примечание. Выражение $V = \frac{8\pi a^2c^2 \sin^2 \beta}{27\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}}$ можно привести к логарифмическому виду, используя вспомогательный угол.

$$V = \frac{8\pi a^2c^2 \sin^2 \beta}{27\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac - 2ac - 2ac \cos \beta}} = \frac{8\pi a^2c^2 \sin^2 \beta}{27\sqrt{(a + c)^2 - 2ac(1 + \cos \beta)}} =$$

$$= \frac{8\pi a^2c^2 \sin^2 \beta}{27(a + c)\sqrt{1 - \frac{4ac \cos^2 \frac{\beta}{2}}{(a + c)^2}}} = \frac{8\pi a^2c^2 \sin^2 \beta}{27(a + c)\sqrt{1 - \cos^2 \psi}} =$$

$$= \frac{8\pi a^2c^2 \sin^2 \beta}{27(a + c) \sin \psi},$$

где

$$\cos \psi = \frac{2\sqrt{ac}}{a + c} \cos \frac{\beta}{2}; \quad \cos \varphi < 1,$$

так как

$$\frac{2\sqrt{ac}}{a + c} = \frac{\sqrt{ac}}{\frac{a + c}{2}} \leqslant 1$$

(среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического, и $\cos \frac{\beta}{2} < 1$).

**823.** Найдем объем тела, образованного вращением вокруг оси $OF$ (рис. 191) фигуры $ACE$ и равного половине искомого.

Очевидно, что $V_{ACE} = V_{OCE} - V_{OAE}$. По условию $\angle COD = \alpha$, $OE = R$.

Тогда объем тела, образуемого вращением $\triangle OCE$ (по лемме),

$$V_{OCE} = 2\pi OE \cdot CE \frac{OE}{3} = \frac{2}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Объем шарового сектора, образуемого вращением вокруг оси $OF$ сектора $AOE$, как известно, равен произведению площади поверхности соответствующего шарового пояса на треть радиуса.

Если принять во внимание, что площадь поверхности шарового пояса равна произведению его высоты на длину окружности большого круга, то

$$V_{AOE} = 2\pi \cdot OE \cdot AQ \frac{OE}{3} = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

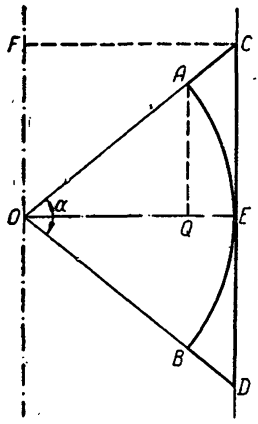



Рис. 191.

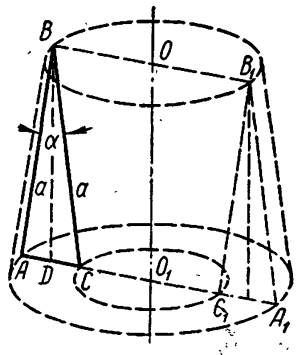



Рис. 192.

Следовательно,

$$V_{ACE} = \frac{2}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\pi R^3 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Искомый объем

$$V_{ACDB} = \frac{8}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \sin^2\frac{\alpha}{4} \text{ куб. ед.}$$

**824.** Очевидно, что объем $V$ искомого тела вращения равен разности объемов усеченных конусов с осевыми сечениями $A\dot{B}B_1A_1$ и $CC_1B_1B$ (рис. 192).

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot BD\,(O_1A^2 + OB^2 + O_1A \cdot OB) -$$

$$-\frac{1}{3}\pi \cdot BD\,(OB^2 + O_1C^2 + OB \cdot O_1C) = \frac{1}{3}\pi \cdot BD\,(O_1A^2 +$$

$$+ OB^2 + O_1A \cdot OB - OB^2 - O_1C^2 - OB \cdot O_1C) = \frac{1}{3}\pi \cdot BD\,[(O_1A +$$

$$+ O_1C)(O_1A - O_1C) + OB(O_1A - O_1C)] = \frac{1}{3}\pi \cdot BD(O_1A -$$

$$- O_1C)(O_1A + O_1C + OB) = \frac{1}{3}\pi \cdot BD \cdot AC(O_1A + O_1C + OB) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot BD \cdot AB\left(O_1C + AC + O_1C + O_1C + \frac{AC}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot BD \cdot AC\left(3 \cdot O_1C + \frac{3}{2}AC\right) = \pi \cdot BD \cdot AC\left(O_1C + \frac{1}{2}AC\right).$$

Но

$$AC = 2AD = 2AB \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}; \quad BD = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2};$$

по условию задачи $O_1C + \frac{1}{2}AC = nr$, где $r$ — радиус окружности, вписанный в треугольник $ABC$, равный $\frac{S}{p}$ ($S$ — площадь треугольника, а $p$ — полупериметр).

Следовательно,

$$r = \frac{a^2 \sin\alpha}{2a + 2a\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sin\alpha}{2\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

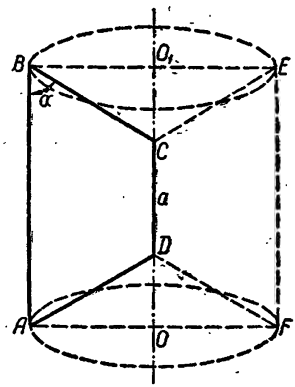


Рис. 193.

Таким образом,

$$V = \pi \cdot a\cos\frac{\alpha}{2} 2a\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{na\sin\alpha}{4\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\pi n a^3 \sin^2\alpha}{4\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)} \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник,

$$r = AD\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = a\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$

**825.** По условию $AD = BC$ и, следовательно, искомый объем $V$ равен разности между объемом цилиндра с осевым сечением $ABEF$ и удвоенным объемом конуса с осевым сечением $ADF$ (рис. 193).

$$V = V_ц - 2V_к.$$

Имеем

$$V_ц = \pi \cdot OA^2 \cdot AB.$$

Принимая во внимание, что по условию $CD = a$,

$$BC = \frac{3}{4}a \text{ и } \angle ABC = \alpha,$$

найдем, что

$$OA = \frac{3}{4}a\sin\alpha; \quad AB = a + 2 \cdot \frac{3}{4}a\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}a(2 + 3\cos\alpha).$$

Следовательно,

$$V_ц = \pi\frac{9}{16}\alpha^2\sin^2 a \cdot \frac{1}{2}a(2 + 3\cos\alpha) = \frac{9}{32}\pi a^3\sin^2\alpha(2 + 3\cos\alpha).$$

Объем конуса

$$V_к = \frac{1}{3}\pi \cdot OD^2 \cdot OD, \text{ т. е.}$$

$$V_к = \frac{1}{3}\pi\frac{9}{16}a^2\sin^2\alpha\,\frac{3}{4}a\cos\alpha = \frac{9}{64}\pi a^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

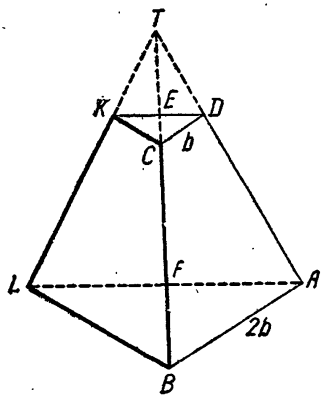


Рис. 194.

Таким образом,

$$V = \frac{9}{32}\pi a^3\sin^2\alpha(2 + 3\cos\alpha) -$$

$$= \frac{18}{64}\pi a^3\sin^2\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{9}{8}\pi a^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ куб. ед.}$$

**826.** 1-й способ решения. На рис. 194 изображено осевое сечение тела вращения. Искомый объем $V$ равен разности между суммой объемов конуса $BAL$ и усеченного конуса $KDAL$ и объема конуса $CDK$. Поэтому

$$V = \frac{\pi}{3}[AF^2 \cdot BF + (AF^2 + AF \cdot DE + DE^2)FE - DE^2 \cdot EC] =$$

$$= \frac{\pi}{3}[AF^2(BF + FE) + DE^2(FE - EC) + AF \cdot DE \cdot EF] =$$

$$= \frac{\pi}{3}(AF^2 \cdot BE + DE^2 \cdot FC + AF \cdot DE \cdot EF) = \frac{\pi}{3}[AF^2(CB + EC) +$$

$$+ DE^2(BC - BF) + AF \cdot DE(BC + CE - BF)];$$

$$V = \frac{\pi}{3}[(2b\sin\varphi)^2(a + b\cos\varphi) + (b\sin\varphi)^2(a - 2b\cos\varphi) +$$

$$+ 2b\sin\varphi b\sin\varphi(a + b\cos\varphi - 2b\cos\varphi)];$$

$$V = \frac{\pi}{3} b^2\sin^2\varphi\,[4a + 4b\cos\varphi + a - 2b\cos\varphi + 2a - 2b\cos\varphi].$$

Отсюда

$$V = \frac{7\pi}{3} ab^2\sin^2\varphi \text{ куб. ед.}$$

2-й способ решения. Пусть $\triangle TLB$ вращается вокруг стороны $TB$. Тогда объем тела вращения $V_1 = \frac{\pi}{3}h^2h$, где $k$ — сторона $TB$, вокруг которой вращается треугольник, а $h$ — его высота, проведенная из точки $L$ на эту сторону. $T$ — точка пересечения прямых $LK$ и $BC$.

В данном примере объем тела вращения можно рассматривать как разность объемов, образованных вращением двух треугольников $TLB$ и $TKC$ вокруг своих сторон $TB$ и $TC$. Обозначив искомый объем через $V$, а объемы тел, образованных вращением треугольников, соответственно через $V_1$ и $V_2$, получим

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3} TB \cdot LF^2 - \frac{\pi}{3} TC \cdot KE^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3} 2a(2b\sin\varphi)^2 - \frac{\pi}{3} a(b\sin\varphi)^2 = \frac{7}{3}\pi ab^2\sin^2\varphi \text{ куб. ед.}$$

При заданных числовых значениях получим

$$V = 252\pi \text{ см}^3 \approx 792 \text{ см}^3.$$

827. Дано: ромб $ABCD$; $AC = d$; $OM = d$; $\angle BCD = \angle BAD = \alpha$ (рис. 195). Ромб, вращаясь, образует тело, объем которого равен объему тела, образованного вращением прямоугольника $NKCD$ вокруг той же оси $O_3O_1$, потому что треугольники $NDA$ и $BKC$ равны между собой.

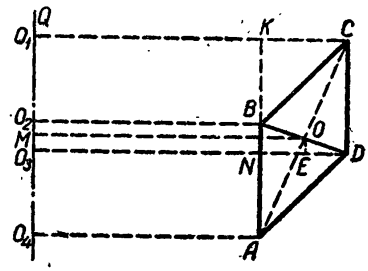


Рис. 195.

Равные треугольники вращаются вокруг оси $O_4O_1$ на одинаковом расстоянии от нее и одинаково расположены по отношению к ней, следовательно, они опишут равновеликие тела (усеченный конус, из которого вынут цилиндр). Объем тела, образованного вращением прямоугольника $NKCD$ вокруг оси $O_3O_1$, равен объему цилиндра, образованного вращением прямоугольника $O_3O_1CD$ вокруг оси $O_3O_1$ (объем $V_1$) минус объем цилиндра, образованного вращением прямоугольника $O_3O_1KN$ (объем $V_2$). Итак, объем тела вращения

$$V = V_1 - V_2.$$

Но

$$V_1 = \pi \cdot O_3D^2 \cdot O_1O_3,$$

где $O_3D$ — радиус основания первого цилиндра, а $V_2 = \pi \cdot O_3N^2 \times$ $\times O_1O_3$ ($O_3N$ — радиус основания второго цилиндра), $O_1O_3 = CD$. $V = \pi \cdot O_3D^2\, O_1O_3 - \pi \cdot O_3N^2 \cdot O_1O_3 = \pi O_1O_3\,(O_3D^2 - O_3N^2) = \pi CD$ $(O_3D + O_3N)\,(O_3D - O_3N) = \pi CDND\,(2O_3D - ND)$, потому что

$$O_3D - O_3N = ND; \quad O_3N = O_3D - ND.$$

Треугольник $OCD$ — прямоугольный, так как диагонали ромба, пересекаясь, делятся пополам ($OC = \frac{d}{2}$) и взаимно перпендикулярны. Угол ромба диагональю делится пополам, т. е. $\angle OCD = \frac{\alpha}{2}$; $CD$ — гипотенуза; $CD = \frac{OC}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Из прямоугольного треугольника $AND$ имеем

$$ND = AD \sin\alpha = \frac{d\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2d\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = d\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $O_3D = O_3E + ED$ и $O_3E = MO$, то $O_3D = d + ED$. $NE = ED$, ибо $OE$ есть средняя линия в треугольнике $BDN$:

$$ED = \frac{ND}{2} = \frac{d}{2}\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$O_3D = d + \frac{d\sin\frac{\alpha}{2}}{2};$$

$$2O_3D = 2d + d\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$V = \pi\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\, d\sin\frac{\alpha}{2}\left(2d + d\sin\frac{\alpha}{2} - d\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

или

$$V = \pi d^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Можно несколько упростить вычисления. Предварительно заметим, что

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 4\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\frac{a-b}{2} =$$

$$= 4\left(b - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)\frac{a-b}{2} = 4\left(b + \frac{a-b}{2}\right)\frac{a-b}{2}.$$

Поэтому

$$V = \pi O_1O_3\,(O_3D^2 - O_3N^2) = 4\pi O_1O_3\left(O_3N + \frac{O_3D - O_3N}{2}\right)\frac{O_3D - O_3N}{2} =$$

$$= 4\pi O_1O_3 \cdot O_3E \cdot NE = 4\pi\,\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot d\,\frac{d\sin\frac{\alpha}{2}}{2} = \pi d^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ куб. ед.}$$

828. Из рис. 196 очевидно, что

$$V = \frac{1}{3}\pi H\,(KC^2 + AD^2 + KC \cdot AD) - \frac{1}{3}\pi H \cdot KB^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H\,[KC^2 + AD^2 + KC \cdot AD - (KC - BC)^2] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H \cdot 3KC \cdot BC = \pi a \sin\alpha\,(a + a\cos\alpha)\,a.$$

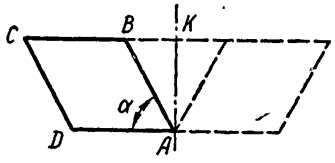



Рис. 196.

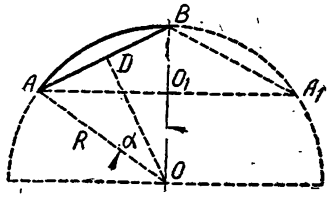



Рис. 197.

Итак,

$$V = 2\pi a^3 \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ куб. ед.}$$

829. Искомая поверхность, очевидно, равна боковой поверхности конуса, который образуется вращением прямой $AB$ вокруг оси $BO$, сложенной с сегментной поверхностью, образующейся вращением вокруг той же оси дуги $AB$ с центром в точке $O$ (рис. 197).

Но

$$S_{\text{кон}} = \pi \cdot O_1A \cdot AB;$$

$$S_{\text{сегм}} = BO_1 \cdot 2\pi R.$$

Принимая во внимание, что

$$O_1A = R\sin\alpha; \quad AB = 2AD = 2R\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$BO_1 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

имеем

$$S = S_{\text{кон}} + S_{\text{сегм}} = 2\pi R\sin\alpha R\sin\frac{\alpha}{2} + 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}\,2\pi R =$$

$$= 4\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right) = 8\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4} \text{ кв. ед.}$$

830. Понятно, что искомый объем $V$ равен сумме объемов усеченных конусов с осевыми сечениями $ABB_1A_1$ и $ADD_1A_1$ без объемов конусов с осевыми сечениями $CBB_1$ и $CDD_1$ (рис. 198).

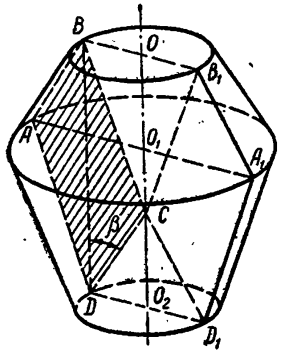


Рис. 198.

Введем обозначения: $OB = r$; $OO_1 = h$; $O_1O_2 = H$, тогда $AO_1 = 2OB = 2r$; $DO_2 = OB = r$.

Следовательно,

$$V = \pi\frac{H}{3}(4r^2 + 2r^2 + r^2) +$$

$$+ \pi\frac{h}{3}(4r^2 + 2r^2 + r^2) - nr^2\frac{H+h}{3} = 2\pi r^2 c,$$

но

$$h = r\operatorname{ctg}\beta; \quad H = r\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда, сложив левые и правые части последних равенств, получим

$$c = r(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta);$$

$$r = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{2\pi c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} \text{ куб. ед.}$$

831. Объем тела, полученного от вращения кругового сегмента вокруг радиуса, проведенного в конце дуги, выражается формулой $V = \frac{1}{6}\pi l^2 h$, где $l$ — длина хорды $AB$ (рис. 199), стягивающей дугу сегмента, $h$ — проекция этой хорды на данный радиус (отрезок $AC$). Формула эта получается путем нахождения разности объемов тел, образованных вращением сектора $AOB$ и треугольника $OAB$.

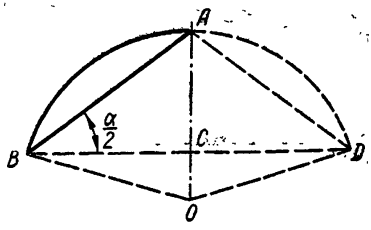


Рис. 199.

Из $\triangle AOB$

$$l = AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Из $\triangle ACD$

$$h = l\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\sin^4\frac{\alpha}{2} \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Формулу $V = \frac{1}{6}\pi l^2 h$ можно вывести так:

$$V_{\text{вращ. сегм } AB} = V_{\text{сегм } DAB} - V_{\text{кон } ABD} =$$

$$= \pi AC^2\left(R - \frac{AC}{3}\right) - \frac{\pi CB^2 AC}{3}.$$

Но

$$AB^2 = 2R \cdot AC; \quad R = \frac{AB^2}{2AC} = \frac{l^2}{2h}; \quad CB^2 = AB^2 -$$

$$- AC^2; \; CB^2 = l^2 - h^2.$$

Следовательно,

$$V_{\text{вращ. сегм } AB} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) - \frac{\pi(l^2 - h^2)h}{3} =$$

$$= \pi h\left(\frac{hl^2}{2h} - \frac{h^2}{3} - \frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{3}\right) = \frac{\pi h l^2}{6}.$$

**832.** По известной лемме об объеме тела, полученного от вращения треугольника вокруг оси, проходящей через вершину треугольника (рис. 200),

$$V = \frac{1}{3}AD \cdot S_{BC} = \frac{1}{3}AD \cdot 2\pi \cdot AD \cdot BC =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot AD \cdot 2 \cdot S = \frac{4}{3}\pi \cdot S \cdot AD.$$

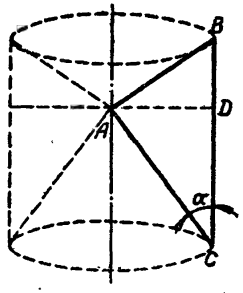


Рис. 200.

Из $\triangle ADC$

$$AC = \frac{AD}{\sin\alpha}.$$

Из $\triangle ADB$

$$AB = \frac{AD}{\cos\alpha}.$$

Площадь данного треугольника

$$S = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{AD^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{AD^2}{\sin 2\alpha},$$

откуда

$$AD = \sqrt{S\sin 2\alpha}.$$

Искомый объем

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot S\sqrt{S\sin 2\alpha} \text{ куб. ед.}$$

**833.** Искомый объем можно найти как разность объемов усеченного конуса $A_1ABB_1$ (рис. 201) и полного конуса $B_1CB$.

Объем усеченного конуса

$$V_1 = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi CK}{3}(KB^2 + CA^2 + KB \cdot CA).$$

Объем полного конуса

$$V_2 = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi KB^2 \cdot CK}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника $CKB$, где $\angle CBK = \alpha$, а сторона $CB = 2a$,

$$H = CK = 2a \sin \alpha;$$

$$R = KB = 2a \cos \alpha.$$

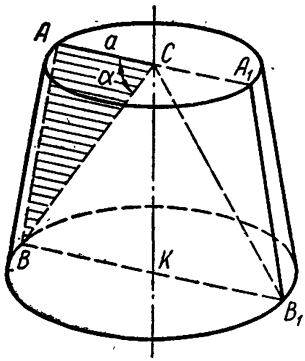



Рис. 201.

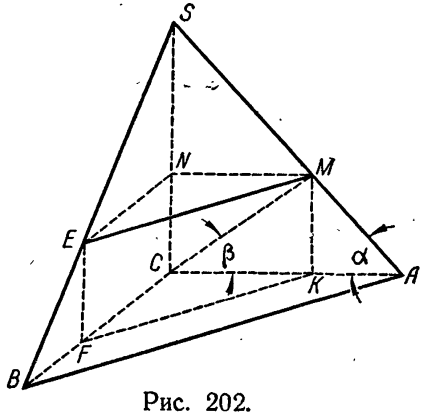



Рис. 202.

Следовательно, искомый объем

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr - R^2) = \frac{\pi H}{3}(r^2 + Rr) =$$

$$= \frac{\pi 2a \sin \alpha}{3}(a^2 + 2a^2 \cos \alpha) = \frac{\pi 2a^3 \sin \alpha}{3}(1 + 2 \cos \alpha) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \sin \alpha (\cos 60° + \cos \alpha),$$

или

$$V = \frac{8}{3}\pi a^3 \sin \alpha \cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ куб. ед.}$$

**834.** Боковая поверхность прямой призмы

$$S_{бок} = NC\,(2CK + FK).$$

Объем призмы $V = S_{\triangle FCK} CN$,

$\triangle FCK$ — прямоугольный и равнобедренный (рис. 202), отсюда

$$S_{\triangle FCK} = \frac{1}{2} CK^2$$

и

$$V = \frac{1}{2} CK^2 \cdot CN.$$

Для определения боковой поверхности и объема вписанной прямой призмы необходимо выразить отрезки $CN$, $CK$ и $FK$ через данные элементы $h$, $\alpha$ и $\beta$.

В $\triangle ACM$ $\angle MAC = \alpha$, $\angle ACM = \beta$, откуда $\angle AMC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Из прямоугольного треугольника $SCA$

$$AC = SC \operatorname{ctg} \alpha = h \operatorname{ctg} \alpha.$$

Из $\triangle ACM$ по теореме синусов

$$\frac{CM}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]},$$

или

$$\frac{CM}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin (\alpha + \beta)},$$

откуда

$$CM = \frac{h \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Из прямоугольного треугольника $MKC$

$$CK = CM \cos \beta = \frac{h \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)};$$

$$MK = CM \sin \beta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Итак,

$$MK = NC = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Из прямоугольного равнобедренного треугольника $FCK$

$$FK = CK \sqrt{2} = \frac{h \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Окончательно имеем

$$S_{\text{бок}} = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \left[ \frac{2h \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)} + \frac{h \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \right] =$$

$$= \frac{4h^2 \sin 2\beta \cos^2 \alpha \cos^2 \frac{\pi}{8}}{\sin^2 (\alpha + \beta)};$$

$$V = \frac{h^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{2 \sin^2 (\alpha + \beta)} \cdot \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{h^3 \cos^3 \alpha \cos^2 \beta \sin \beta}{2 \sin^3 (\alpha + \beta)} \text{ куб. ед.}$$

835. Имеем: $H$ — высота пирамиды, $b$ — сторона меньшего основания.

Неизвестные $b$ и $H$ найдем из прямоугольных треугольников (рис. 203) ($A_1O_1 = H$; $A_1K$ — высота боковой грани; $A_1O_1$ — проекция ребра $AA_1$, делящая пополам угол $DAB$).

1. $b = a - 2AK = a - 2a\cos\alpha$ ($\triangle A_1AK$).

2. $H = \sqrt{A_1K^2 - O_1K^2}$ ($\Delta A_1KO_1$); $A_1K = a\sin\alpha$; $O_1K = AK = a\cos\alpha$ ($\triangle A_1AK$), откуда

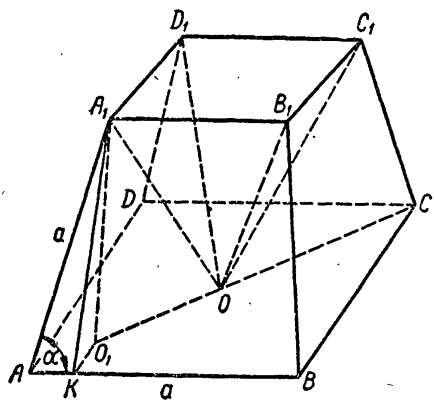


Рис. 203.

$$H = \sqrt{a^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha} = a\sqrt{-\cos 2\alpha}$$ и

$$V_1 - V_2 = \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2) - \frac{Hb^2}{3} = \frac{Ha}{3}(a + b) =$$

$$= \frac{a^2}{3}(a + a - 2a\cos\alpha)\sqrt{-\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{4}{3}a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$$ куб. ед.

Исследование. Величина объема тела — число действительное, положительное, измеряемое кубическими единицами; $a > 0$ как длина отрезка. Чтобы полученное решение было числом действительным, необходимо выполнение неравенства

$$-\cos 2\alpha > 0,$$

или

$$\cos 2\alpha < 0.$$

Принимая во внимание, что $\alpha$ — угол при большем основании равнобедренной трапеции ($0 < \alpha < 90°$), устанавливаем множество значений параметра $\alpha$, удовлетворяющих написанному выше неравенству:

$$90° < 2\alpha < 180°;$$

$$45° < \alpha < 90°,$$

что видно и из чисто геометрических соображений, так как сумма двух плоских углов при вершине $A$ трехгранного угла $AA_1DB$ больше третьего плоского угла. Но установленное ограничение множества допустимых значений параметра $a$ справедливо для всякой правильной усеченной четырехугольной пирамиды с данной стороной основания и не отражает специфичности данной задачи. Ограничения на параметр $\alpha$ следовало наложить уже при вычислении стороны $b$:

$$b = a - 2a\cos\alpha,$$

где $\alpha > 60°(\alpha < 90°)$, ибо $b > 0$. Совокупность найденных выше ограничений (относящихся по сути к определению высот пирамид) и последнего (относящегося к определению величины $b$) дают уже полные возможные для данной задачи ограничения:

$$60° < \alpha < 90°.$$

При изменении $\alpha$ в указанных пределах изменение величин $b$, $H$ и $V_1 - V_2$ возможно в следующих пределах:

$$0 < b < a;$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < H < a;$$

$$\frac{a^3}{3\sqrt{2}} < V_1 - V_2 < \frac{2a^3}{3}.$$

Рассмотрим еще граничные случаи:

при $\alpha = 60°$ усеченная пирамида превращается в полную:

$$V_1 = 0\,(b = 0) \text{ и } V = \frac{a^3}{3\sqrt{2}},$$

при $\alpha = 90°$ усеченная пирамида превращается в куб:

$$V_1 = a^3;\ V_2 = \frac{1}{3}a^3,$$

при $\alpha = 60°$ трапеция $AA_1B_1B$ превратится в равносторонний треугольник со стороной $a$, а при $\alpha < 60°$ ребра $AA_1$ и $BB_1$ пересекутся.

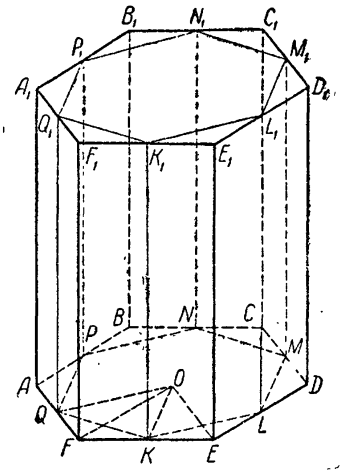


Рис. 204.

**836.** Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 204) — данная призма, а $KLMNPQK_1L_1M_1N_1P_1Q_1$ — вписанная в нее призма.

Известно, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн}}h.$$

Площадь основания данной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$

$$S = 6\frac{16\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}.$$

Объем этой призмы

$$V_1 = 24\sqrt{3} \cdot 6 = 144\sqrt{3}.$$

Сторона основания вписанной призмы

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно, площадь основания вписанной призмы

$$S_{\text{осн}} = 6\,\frac{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{8}a^2\sqrt{3} = 18\sqrt{3},$$

тогда ее объем

$$V_2 = 18\sqrt{3}\cdot 6 = 108\sqrt{3}.$$

Следовательно, разность объемов

$$V_1 - V_2 = 144\sqrt{3} - 108\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\ см^3 \approx 61{,}2\ см^3.$$

**837.** Возможны два случая решения этой задачи. Рассмотрим сначала первый.

Пусть $SABCDO$ (рис. 205) — данный октаэдр с ребром $a$, $SO$ — диагональ его, которая будет осью конуса.

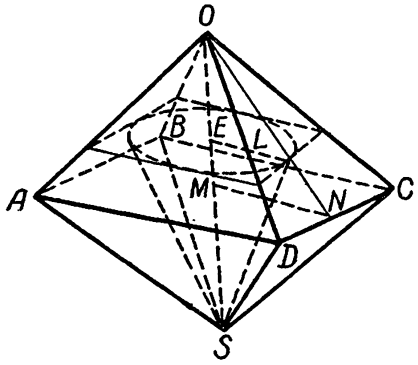


Рис. 205.

Объем октаэдра

$$V_1 = \frac{2}{3}a^2h_1,$$

где $h_1$ — высота пирамиды $OABCD$.

Объем конуса

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2,$$

где $r$ — радиус основания конуса, $h_2$ — высота конуса.

$ON = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ как высота правильного треугольника. Из треугольника $OMN$ найдем

$$h_1 = OM = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Из подобия треугольников $OMN$ и $OEL$

$$\frac{OE}{OM} = \frac{EL}{MN} = \frac{OL}{ON} = \frac{2}{3},$$

откуда

$$OE = \frac{2}{3}OM = \frac{a\sqrt{2}}{3};$$

$$EL = \frac{2}{3}MN = \frac{a}{3}.$$

Таким образом, высота конуса $h_2 = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Вычислив $h_1$ и $h_2$, можем найти $V_1$ и $V_2$:

$$V_1 = \frac{2}{3} a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2};$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2}{9} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{81} a^3 \sqrt{2}.$$

Следовательно, отношение объемов

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{81} \pi a^3 \sqrt{2}}{\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}} = \frac{\pi}{27}.$$

Аналогично решается эта задача и в другом случае. Высота конуса

$$h_2' = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3} a\sqrt{2},$$

а отношение объемов

$$\frac{V_2'}{V_1'} = \frac{\frac{2}{81} \pi a^3 \sqrt{2}}{\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}} = \frac{2\pi}{27}$$

($h_2'$ и $V_2'$ — соответственно высота и объем конуса в другом случае).

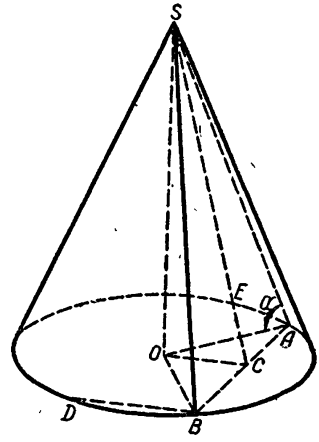


Рис. 206.

838. Обозначим радиус основания конуса через $r$ (рис. 206). Тогда образующая конуса $l$ будет равна $SB = \frac{r}{\cos \alpha}$ (из $\triangle SOB$) и, таким образом, полная поверхность конуса $S_{кон}$ выразится формулой

$$S_{кон} = \pi r l_к + \pi r^2 = \pi r \frac{r}{\cos \alpha} + \pi r^2 = \pi r^2 \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

Для определения полной поверхности пирамиды вычислим сторону основания пирамиды.

Из $\triangle BOC$ ($OC \perp AB$)

$$BC = r \sin \frac{180°}{n}; \quad OC = r \cos \frac{180°}{n}.$$

Следовательно, площадь основания пирамиды

$$S = nr^2 \sin \frac{180°}{n} \cos \frac{180°}{n}.$$

Апофему пирамиды $m$ определим из прямоугольного треугольника $BSC$:

$$SC = m = \sqrt{SB^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{r^2}{\cos^2\alpha} - r^2 \sin^2\frac{180^\circ}{n}} =$$

$$= \frac{r\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\frac{180^\circ}{n}}}{\cos\alpha}.$$

Отсюда полная поверхность пирамиды

$$S_{\text{пир}} = nr \sin\frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{r\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\frac{180^\circ}{n}}}{\cos\alpha} +$$

$$+ nr^2 \sin\frac{180^\circ}{n} \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

$$\frac{S_{\text{пир}}}{S_{\text{кон}}} = \frac{n \sin\frac{180^\circ}{n}\left(\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\frac{180^\circ}{n}} + \cos\alpha \cos\frac{180^\circ}{n}\right)}{\pi(1 + \cos\alpha)}.$$

**839.** Объем призмы (рис. 207) $V = S_{\text{осн}}H$.

Обозначим ребра призмы через $x$, тогда площадь основания, как площадь правильного треугольника,

$$S_{\text{осн}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

и, следовательно, объем

$$V = \frac{x^3\sqrt{3}}{4}.$$

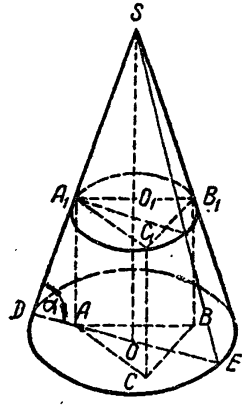


Рис. 207.

Так как $AA_1 = x$, то из $\triangle DAA_1$

$$DA = x \operatorname{ctg}\alpha.$$

Радиус круга, описанного вокруг правильного треугольника,

$$AO = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Так как $DA + AO = DO = R$,

$$x \operatorname{ctg}\alpha + \frac{x}{\sqrt{3}} = R,$$

откуда

$$x = \frac{R}{\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{R}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg} 60^\circ} = \frac{R\sqrt{3}\sin\alpha}{2\sin(\alpha + 60^\circ)}.$$

Искомый объем

$$V = \frac{9R^3 \sin^3 \alpha}{32 \sin^3 (\alpha + 60°)} \text{ куб. ед.}$$

**840.** $\triangle SOC$ — прямоугольный равнобедренный ($OS = OC$) (рис. 208). Следовательно,

$$H = OS = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

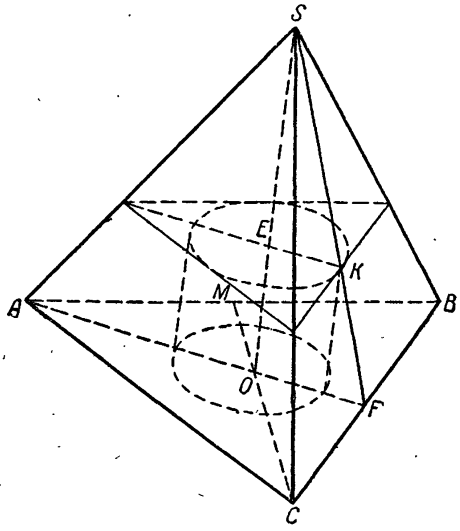


Рис. 208.

Искомый объем пирамиды

$$V_1 = \frac{1}{3} BH,$$

где $B$ — площадь основания пирамиды, $H$ — высота ее.

Объем цилиндра

$$V_2 = \pi r^2 h,$$

где $r$ — радиус основания цилиндра, $h$ — высота его.

Из $\triangle ABC$ следует, что $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, где $a$ — сторона треугольника $ABC$, тогда $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, следовательно,

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

отсюда

$$a = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}\sqrt{6};$$

площадь $\triangle ABC$

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{75}{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{8},$$

тогда объем пирамиды

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{75}{8}\sqrt{3}\,\frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125}{16}\sqrt{6} \approx 19{,}14 \text{ куб. ед.}$$

$\triangle SEK \sim \triangle SOF$; из подобия вытекает, что

$$\frac{EK}{OF} = \frac{SE}{SO};\quad \frac{r}{\frac{5}{4}\sqrt{2}} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} - 2r}{\frac{5\sqrt{2}}{2}},$$

отсюда

$$r = \frac{5}{8}\sqrt{2};$$

$$V_ц = \pi r^2 h = 2\pi \frac{125}{512} 2\sqrt{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{128} \approx 4{,}34 \text{ куб. ед.}$$

**841.** Обозначим радиус основания цилиндра $O_1D$ через $x$, образующую его через $y$ и высоту $SO$ через $h$ (рис. 209).

Дано, что $2\pi xy : \pi r\, SB = m : n$; следовательно,

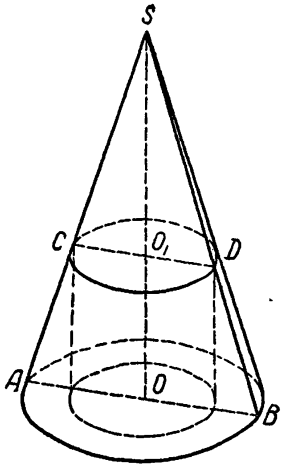


Рис. 209.

$$2xy = \frac{m}{n} rSB = \frac{m}{n} \cdot \frac{r^2}{\sin\alpha}.$$

Из подобия треугольников $SO_1D$ и $SOB$

$$\frac{O_1D}{OB} = \frac{SO_1}{SO}, \text{ или } \frac{x}{r} = \frac{h-y}{h}.$$

Из треугольника $ASO$

$$h = r\operatorname{ctg}\alpha,$$

следовательно,

$$\frac{x}{r} = \frac{r\operatorname{ctg}\alpha - y}{r\operatorname{ctg}\alpha};$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2xy = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{r^2}{\sin\alpha}, \\ \dfrac{x}{r} = \dfrac{r\operatorname{ctg}\alpha - y}{r\operatorname{ctg}\alpha}. \end{cases}$$

Решим эти уравнения относительно $x$ и $y$.

Из второго уравнения выразим $y$ через $x$:

$$\frac{x}{r} = 1 - \frac{y}{r\operatorname{ctg}\alpha}, \text{ или } y = (r - x)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Подставим это значение в первое уравнение:

$$2x\operatorname{ctg}\alpha(r - x) = \frac{mr^2}{n\sin\alpha}; \quad 2x\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(r - x) = \frac{mr^2}{n\sin\alpha};$$

$$2x\cos\alpha(r - x) = \frac{mr^2}{n};$$

отсюда получим квадратное уравнение

$$x^2 2n\cos\alpha - x2rn\cos\alpha + mr^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{rn \pm r\sqrt{n^2 - 2nm\sec\alpha}}{2n},$$

следовательно,

$$y = r\operatorname{ctg}\alpha\,\frac{n \mp \sqrt{n^2 - 2nm\sec\alpha}}{2n}$$

(значения для $y$ получим в таком виде, если после подстановки вынесем $r\operatorname{ctg}\alpha$ за скобку).

Воспользуемся первыми из двух значений $x$ и $y$ и выразим через них искомый объем. После соответствующих преобразований получим

$$V = \pi x^2 y = \frac{\pi r^3 m}{4n^2\sin\alpha}\left(n + \sqrt{n^2 - 2nm\sec\alpha}\right) \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Величину $y$ можно найти и другим путем. Как видно из рисунка, $SO = SO_1 + OO_1$, но $SO = r\operatorname{cgt}\alpha$; $SO_1 = x\operatorname{ctg}\alpha$; $OO_1 = y$. Поэтому $r\operatorname{ctg}\alpha = x\operatorname{ctg}\alpha + y$ и $y = (r - x)\operatorname{ctg}\alpha$.

**842.** Пусть $E$ и $F$ — середина оснований трапеции $ABCD$, полученной в осевом сечении усеченного конуса. Проведем через середину $O$ отрезка $EF$ прямые $OM \perp CD$, $ON \perp EF$, $CP \perp AD$.

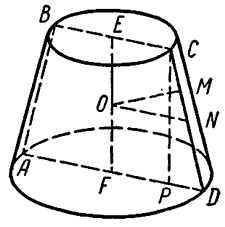


Рис. 210.

Обозначим: $CD = l$; $EF = h$; $OM = x$, $EC = r$; $DF = R$; $\angle MON = \angle PCD = \alpha$ (рис. 210).

Для доказательства достаточно установить, что $x = \frac{h}{2}$. По условию $\pi l\,(R + r) = \pi l^2$ и, следовательно,

$$R + r = l.$$

Из $\triangle OMN$ и $\triangle CPD$

$$x = \frac{R + r}{2}\cos\alpha \text{ и } h = l\cos\alpha,$$

откуда $x = \frac{h}{2}$, что и требовалось доказать

**843.** Обозначим: $H$ — высота конуса, $l$ — образующая конуса, $r$ — радиус основания конуса.

По условию задачи

$$\pi r l = 3\pi r^2,$$

откуда

$$l = 3r.$$

По теореме Пифагора

$$H^2 + r^2 = l^2,$$

или

$$H^2 + r^2 = 9r^2,$$

откуда

$$r^2 = \frac{H^2}{8}.$$

По условию задачи объемы шара и конуса равны, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 H,$$

или

$$\frac{4}{3}\pi(\sqrt[3]{2})^3 = \frac{1}{3}\pi\frac{H^3}{8},$$

или

$$H^3 = 64,$$

откуда $H = 4$ *см*.

844. 1. Пусть дан трехгранный угол $SABC$ (рис. 211,*а*). Проведем биссекторные плоскости двугранных углов $SB$ и $SC$ (т. е. плоскости,

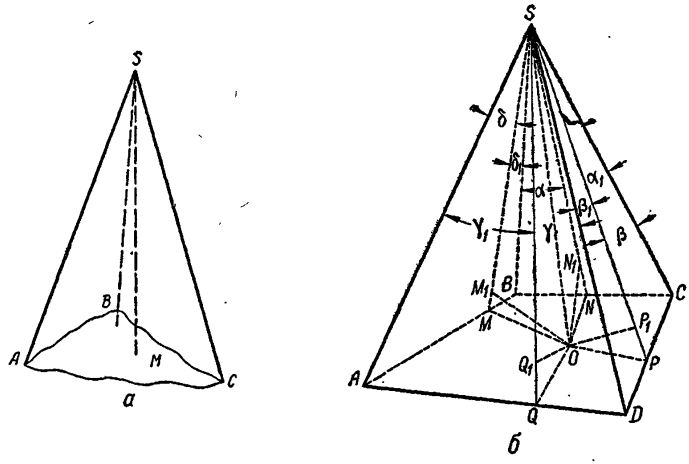



Рис. 211.

делящие двугранный угол пополам и являющиеся геометрическим местом точек, равноудаленных от его граней; эти плоскости проходят через соответствующие ребра двугранного угла). Их пересечение — прямая $SM$ — будет являться геометрическим местом точек, равноудаленных от всех его граней. Биссекторная плоскость двугранного угла $SA$ должна пройти через эту прямую, так как в противном случае существовали бы биссекторная плоскость и прямая, ее пересекающая (в вершине $S$), все точки которых равноудалены от граней двугранного угла, что невозможно.

Отсюда заключаем, что в любой трехгранный угол можно вписать шар (бесконечное множество шаров) и все биссекторные плоскости его двугранных углов пересекаются по одной прямой.

2. Теперь разберем случай выпуклого четырехгранного угла. Пусть $SABCD$ — четырехгранный угол (рис. 211,*б*), в который вписан шар с центром в точке $O$. Выведем сначала необходимое условие возможности вписания шара в многогранный угол. Соединим точки $S$ и $O$, через точку $O$ проведем плоскость, перпендикулярную к $SO$, и опустим из точки $O$ перпендикуляры на грани четырехгранного угла $OM_1$, $ON_1$, $OP_1$ и $OQ_1$, равные радиусам шара, и соответствующие плоскости $SM_1O$, $SN_1O$, $SP_1O$ и $SQ_1O$, проходящие через них и точку $S$. Пересечениями последних с плоскостью $ABCD$ будут прямые $OM$, $ON$, $OP$ и $OQ$, а с плоскостями соответствующих граней — прямые $SM$, $SN$, $SP$ и $SQ$. Треугольники $SOM$, $SON$, $SOP$ и $SOQ$ равны между собой, что легко доказать. Так как $AB \perp SM$, $BC \perp SN$, $DC \perp SP$ и $AD \perp SQ$ (теорема о двух перпендикулярах) и $SM = SN = SP = SQ$, то

$$\triangle SMB = \triangle SBN; \quad \triangle SNC = \triangle SCP;$$

$$\triangle SPD = \triangle SDQ \text{ и } \triangle SQA = \triangle SAM$$

и, следовательно,

$$\alpha_1 = \beta;$$

$$\gamma = \beta_1;$$

$$\gamma_1 = \delta;$$

$$\alpha = \delta_1;$$

или $\alpha_1 + \gamma + \gamma_1 + \alpha = \beta + \beta_1 + \delta + \delta_1$, т. е. если в четырехгранный выпуклый угол можно вписать шар, то суммы его противоположных плоских углов должны быть равны.

Докажем теперь достаточность этого условия, т. е. что если $\angle DSC + \angle ASB = \angle BSC + \angle ASD$, то в четырехгранный угол можно вписать шар.

Проведем биссекторные плоскости двугранных углов $SC$ и $SD$, найдем линию их пересечения $SO$.

Через произвольную точку $O$ прямой $SO$ проведем плоскости $ABCD \perp SO$, $SON$, $SOP$ и $SOQ$, перпендикулярные к граням $SBC$, $SCD$ и $SDA$, и найдем линии их пересечения с плоскостью $ABCD$ — $ON$, $OP$ и $OQ$.

Так как плоскость, перпендикулярная к двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна к линии их пересечения, то $BC \perp ON$ и $BC \perp SN$, $DC \perp OP$ и $DC \perp SP$, $AD \perp OQ$ и $AD \perp SQ$. Прямоугольные треугольники $SNO$, $SPO$ и $SQO$ равны между собой (у них общий катет и равные высоты, проведенные из вершины прямого угла, $ON_1 =$

$= OP_1 = OQ_1$); следовательно, и $SN$, $SP$, $SQ$. Поэтому

$$\triangle SNC = \triangle SCP;$$
$$\triangle SPD = \triangle SDQ,$$

и, как следствие равенства этих треугольников, $\alpha_1 = \beta$; $\beta_1 = \gamma$. Согласно условию

$$\angle DSC + \angle ASB = \angle BSC + \angle ASD,$$

поэтому

$$\alpha + \gamma_1 = \angle ASB.$$

Проведем в плоскости грани $ASB$ прямую $SM$ так, чтобы

$$\angle ASM = \gamma_1, \quad \angle SMB = \alpha.$$

Повернем $\triangle ASM$ вокруг прямой $AS$ и $\triangle SBN$ вокруг прямой $SB$ так, чтобы их плоскости слились с плоскостью $ASB$.

Прямые $SQ$ и $SN$ пойдут по прямой $SM$ (вследствие равенства соответствующих углов) и сольются с некоторым отрезком $SF$ той же прямой (точка $F$ на рисунке не указана). Тогда отрезок $AQ$ сольется с отрезком $AF$, а отрезок $BN$ — с отрезком $BF$. Но вследствие того, что $SQ \perp AQ$ и $SN \perp BN$, необходимо, чтобы $SM \perp AF$ и $SM \perp BF$, а прямые $AF$ и $BF$ должны служить продолжением одна другой, $AFB$ — прямая линия, а не ломаная, точка $F$ должна совпасть с точкой $M$ и $SM \perp AB$, $SM = SQ = SN$. Тогда $AM \perp MO$ (теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах), $SMO \perp$ пл. $ASB$, $\triangle SMO = \triangle SOQ$, $OM_1 = OQ_1$, т. е. расстояние от точки $O$ до грани $ABS$ равно расстоянию от той же точки до грани $ASD$ и, следовательно, точка $O$ равноудалена от всех граней четырехгранного угла. Так как точка $O$ была взята произвольно на прямой $SO$, то последняя является геометрическим местом точек, равноудаленных от всех граней четырехгранного угла.

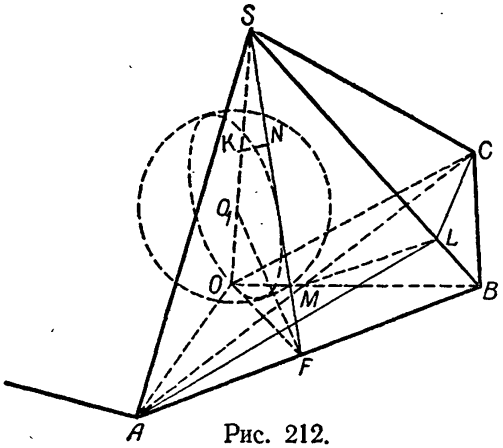


Рис. 212.

Таким образом, *чтобы в четырехгранный угол можно было вписать шар (множество шаров), необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных плоских углов четырехгранного угла были равны.*

**845.** Пусть все боковые грани $n$-угольной ($n > 3$) пирамиды одинаково наклонены к основанию (рис. 212). Из основания $O$ высоты $SO$ пирамиды проводим $OF \perp AB$ и точку $S$ соединяем с точкой $F$. $\angle OFS$ — линейный угол двугранного угла между боковой гранью

и основанием (теорема о трех перпендикулярах и определение линейного угла двугранного угла). $\angle OFS = \alpha$.

Докажем, что высота пирамиды с равнонаклоненными к основанию боковыми гранями есть геометрическое место точек, равноудаленных от боковых граней.

Возьмем на высоте $SO$ пирамиды произвольную точку $K$, опустим из этой точки на боковую грань $ASB$ перпендикуляр $KN$, который лежит в плоскости $SOF$ (грань $ASB$ перпендикулярна к плоскости $SOF$, ибо проходит через прямую $AB$, перпендикулярную к плоскости $SOF$. Из $\triangle SKN$

$$KN = SK \cos\alpha \,(\angle SKN = \alpha).$$

Но так как все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания (под углом $\alpha$), то расстояния от точки $K$ до всех боковых граней будут равны между собой, этим и исчерпывается доказательство.

Отсюда следует, что биссекторные плоскости двугранных углов между боковыми гранями пересекаются по прямой, являющейся высотой пирамиды. Центр шара, вписанного в пирамиду, равноудаленный от всех граней пирамиды, должен лежать на высоте $SO$ пирамиды. Но центр шара должен быть равноудален как от боковых граней, так и от основания пирамиды. Поэтому, проведя биссекторную плоскость двугранного угла $AB$ и найдя ее точку пересечения с $SO$ (точку $O_1$), мы определим положение центра шара, вписанного в пирамиду, а раз существует точка, равноудаленная от всех граней пирамиды, то биссекторные плоскости всех ее двугранных углов пересекаются в одной точке.

Из треугольника $SOF$

$$OF = OS \operatorname{ctg}\alpha;\ SF = \frac{OS}{\sin\alpha}.$$

Так как все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания (под углом $\alpha$), то из последних двух равенств следует, что все высоты боковых граней равны между собой и равны между собой расстояния от точки $O$ до сторон основания, т. е. точка $O$ является центром круга, вписанного в основание. Точки касания шаровой поверхности с боковыми гранями есть точки встречи перпендикуляров, опущенных из центра шара на боковые грани.

Как видно из рассмотренного, эти точки лежат на высотах боковых граней, и одна из них совпадает с основанием высоты $SO$ пирамиды. Таким образом, заключаем: в $n$-угольную ($n > 3$) пирамиду, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания можно вписать шар, центр которого совпадает с точкой пересечения высоты пирамиды с биссекторной плоскостью любого двугранного угла между плоскостью основания и боковой гранью, или, что то же самое, с точкой пересечения высоты пирамиды с биссектрисой соответствующего линейного угла, лежащих в одной плоскости.

Точки касания шаровой поверхности с боковыми гранями лежат на их высотах, а точка касания ее с основанием есть основание высоты пирамиды, совпадающее с центром круга, вписанного в основание пирамиды (основанием пирамиды должен быть многоугольник, в который можно вписать круг). Все сказанное выше справедливо, конечно, и для правильной пирамиды.

В частности, в треугольную пирамиду можно всегда вписать шар. Для этого достаточно провести прямую, все точки которой равноудалены от граней трехгранного угла при любой вершине пирамиды (см. задачу 844), и найти точку пересечения проведенной прямой с биссекторной плоскостью двугранного угла между гранями пирамиды, не проходящей через эту вершину.

При равном наклоне боковых граней к основанию указанная выше прямая, проведенная из вершины пирамиды, противолежащей ее основанию, совпадет с высотой пирамиды, если эта высота будет внутренней. В случае, когда последняя будет внешней, на ней будет находиться центр вписанного в пирамиду шара, т. е. такого шара, поверхность которого касается одной его грани и продолжения трех других.

Пусть дано (рис. 212) $\angle ASB = \alpha$, $SO$ — высота пирамиды $SABC$.

Центр $O_1$ вписанного шара, как уже было выяснено, лежит на пересечении высоты $SO$ пирамиды с биссектрисой угла $SFO$ — линейного угла двугранного угла (с ребром $AB$) наклона боковой грани пирамиды к ее основанию.

Обозначим $\angle SFO = \beta$, тогда радиус вписанного в пирамиду шара $OO_1 = OF \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$.

Из треугольника $OBF$

$$OF = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \angle BOF = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n},$$

тогда

$$OO_1 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Из $\triangle SOF$

$$SF = \frac{OF}{\cos \beta} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \sec \beta.$$

С другой стороны, из $\triangle SFB$ получаем, что

$$SF = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому (из сравнения двух последних равенств) следует, что

$$\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \sec \beta = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

или

$$\cos\beta = \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$OO_1 = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} =$$

$$= \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\frac{1-\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}} \text{ лин. ед.}$$

Так как сумма плоских углов трехгранного угла при вершине пирамиды меньше 360°, то

$$0 < n\alpha < 360^\circ;$$

$$0 < \alpha < \frac{360^\circ}{n},$$

поэтому полученная величина радиуса вписанного в пирамиду шара число действительное и положительное.

Из точки $A$ проведем $AL \perp SB$ и точку $L$ соединим с точкой $C$.

$\triangle ALB = \triangle LBC$, так как $AB = BC$, $\angle ABL = \angle LBC$ и $LB$ — общая сторона двух треугольников. Отсюда

$$\angle CLB = \angle ALB = 90^\circ,$$

и $\angle ALC$ — линейный угол двугранного угла между боковыми гранями, который обозначим через $x$.

Проведем медиану $ML$ треугольника $ALC$, предварительно соединив точки $A$ и $C$. $\triangle ALC$ — равнобедренный, $LM$ служит одновременно его высотой и биссектрисой.

Из $\triangle ALB$ определим $AL$:

$$AL = AB\sin\angle ABL = a\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = a\cos\frac{\alpha}{2},$$

а из $\triangle AMB$ найдем $AM$:

$$AM = AB\sin\angle ABM = a\sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = a\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Поэтому (из $\triangle AML$)

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{AM}{AL} = \frac{a\cos\frac{180^\circ}{n}}{a\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}};\quad x = 2\arcsin\frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Как было доказано выше, $\frac{\alpha}{2} < \frac{180^\circ}{n}$, следовательно,

$$\sin\frac{x}{2} < \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{180^\circ}{n}} = 1.$$

С другой стороны,

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} > \sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right),$$

а так как углы $\frac{x}{2}$ и $\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right)$ — острые, то

$$\frac{x}{2} > 90^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

или

$$x > 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Дадим геометрическое доказательство полученного результата исследования.

Рассмотрим треугольники $AML$ и $AMB$:

$$\frac{AM}{ML} = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$\frac{AM}{MB} = \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right).$$

Но $ML < MB$, поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right),$$

или

$$\frac{x}{2} > 90^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

или

$$x > 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

**846.** Рассмотрим перпендикулярное сечение параллелепипеда, проходящее через середину его высоты и, следовательно, через центр шара, около которого он описан (рис. 213).

Обозначим радиус шара через $R$, а сторону ромба, являющегося указанным сечением, через $a$.

Так как параллелепипед прямой, то угол наклона боковых граней к плоскости основания будет прямым. Линейными углами двугранных, образованных боковыми гранями, будут углы ромба, полученного в перпендикулярном сечении параллелепипеда.

Пусть $\angle BAD = x$ и $KD \parallel NM$. Тогда $KD = a \sin x$. Но $KD = 2R$. Следовательно, $a = \frac{2R}{\sin x}$.

Площадь ромба $ABCD$ $S = a^2 \sin x$, или

$$S = \frac{4R^2}{\sin^2 x} \cdot \sin x = \frac{4R^2}{\sin x}.$$

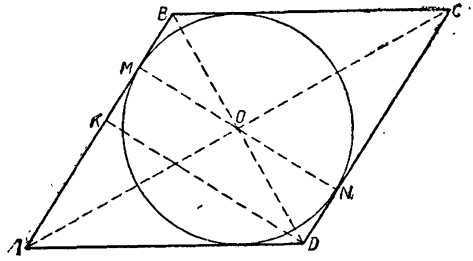



Рис. 213.

Таким образом, объем параллелепипеда

$$V_{\text{пр}} = \frac{4R^2}{\sin x} 2R = \frac{8R^3}{\sin x}.$$

Объем шара $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, но по условию $\frac{8R^3}{\sin x} = \frac{4}{3}\pi R^3 m$ и, следовательно, $\sin x = \frac{6}{\pi m}$; $x = \arcsin \frac{6}{\pi m}$.

Таким образом,

$$\angle A = \arcsin \frac{6}{\pi m} \qquad \angle B = 180^\circ - \arcsin \frac{6}{\pi m}.$$

Задача имеет решение только при условии, что $m \geqslant \frac{6}{\pi}$.

Примечание. Под призмой, описанной около шара (если ничего не оговорено), следует понимать такую призму, грани которой касаются поверхности шара.

Из этого определения следует:

1) центр шара лежит в плоскости перпендикулярного сечения призмы, который делит расстояние между ее основаниями пополам; центр шара является в то же время центром круга, вписанного в это сечение (назовем последнее средним перпендикулярным сечением);

2) перпендикулярным сечением призмы должен быть такой многоугольник, в который можно вписать круг;

3) диаметр круга, вписанного в перпендикулярное сечение призмы, равен диаметру шара и высоте призмы;

4) точки касания сферической поверхности с боковыми гранями призмы есть точки касания окружности круга, вписанного в среднее перпендикулярное сечение, со сторонами этого сечения;

5) точки касания сферической поверхности с основаниями призмы есть точки встречи с ними высоты призмы, проходящей через центр шара и делящейся им пополам;

6) все биссекторные плоскости двугранных углов между боковыми гранями пересекаются по одной прямой, которая параллельна боковым ребрам призмы и

является геометрическим местом центров кругов, вписанных в перпендикулярные сечения этой призмы;

7) все биссекторные плоскости двугранных углов между боковыми гранями и основаниями призмы пересекаются в одной точке, лежащей на середине упомянутой в п. 6 прямой, т. е. в центре шара;

8) призма не обязательно должна быть прямой.

Все приведенные определения также относятся и к параллелепипеду.

**847.** В пирамиде $SABCD$ (рис. 214) дан двугранный угол при основании. Так как $\angle SFO_1$ является линейным двугранного угла, то

$$\angle SFO_1 = \varphi.$$

Так как высота правильной пирамиды есть геометрическое место точек, равноудаленных от граней пирамиды, то центр шара должен

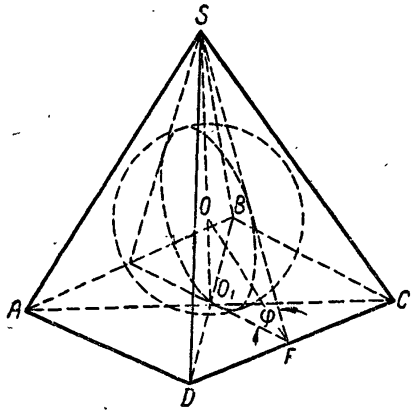



Рис. 214.

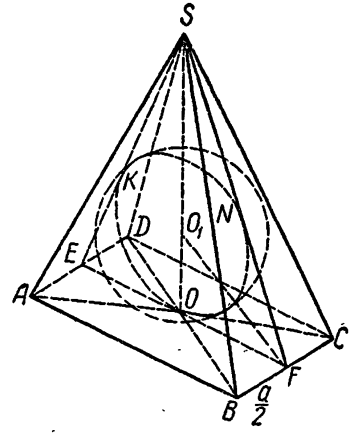



Рис. 215.

находиться на высоте. Центр шара должен быть также равноудаленным от грани $SDC$ и основания $ABCD$ пирамиды, т. е. находиться в биссекторной плоскости образуемого ими двугранного угла. Биссекторная плоскость пересекает плоскость линейного угла по его биссектрисе $OF$, следовательно,

$$\angle OFO_1 = \frac{\varphi}{2}.$$

Из треугольника $SO_1F$

$$O_1F = OS \operatorname{ctg} \varphi = H \operatorname{ctg} \varphi.$$

Теперь из треугольника $OO_1F$ искомый радиус шара

$$OO_1 = O_1F \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = H \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \text{ лин. ед.}$$

**848.** 1-й способ решения. Вершина пирамиды проектируется в центр основания, так как пирамида правильная.

Треугольник $ESF$ (рис. 215) равнобедренный, $SF$ и $SE$ — высоты боковых граней. Вписанный шар касается граней в пяти

точках: одной — в точке пересечения диагоналей квадрата и с четырех — в точках на высотах боковых граней.

Чтобы найти поверхность $S$ шара, необходимо найти радиус шара, т. е. $r = OO_1$.

Так как пирамида правильная, то центр вписанного шара лежит на высоте пирамиды, а большой круг шара $ONK$ вписан в треугольник $ESF$, являющийся сечением пирамиды.

Отсюда, искомый радиус вписанного шара $r = \frac{S}{p}$, где $S$ — площадь треугольника $ESF$, $p$ — полупериметр этого треугольника. Очевидно, $S_{\Delta} = OF \cdot SO$. Из $\triangle BSF$

$$SF = BF \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$SO = \sqrt{SF^2 - OF^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Площадь

$$\Delta SFE = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} =$$

$$= \frac{a^2}{4} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^2}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha}.$$

Полупериметр

$$p = OF + SF = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом,

$$r = \frac{a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Поверхность шара $S = 4\pi r^2$, откуда

$$S_{\text{шара}} = 4\pi \left[\frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)}\right]^2.$$

После соответствующих преобразований получим

$$S_{\text{шара}} = \frac{\pi a^2 \cos \alpha}{2 \sin^2 \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pi a^2 \sin (90° + \alpha)}{2 \sin^2 \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi a^2 \sin \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin^2 \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \pi a^2 \operatorname{ctg} \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) \text{ кв. ед.}$$

Здесь $\alpha < 90°$, так как сумма плоских углов многогранного угла при точке $S$ должна быть меньше 360°.

2-й способ решения. Как уже было указано в задаче 847, центр шара лежит на пересечении высоты пирамиды с биссектрисой угла $SFO$.

Обозначим этот угол через $x$. Тогда $SF = \frac{a}{2\cos x}$; с другой стороны (из $\triangle BSF$), $FS = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, отсюда

$$\frac{a}{2\cos x} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \cos x.$$

Из $\triangle O_1FO$ радиус шара

$$OO_1 = r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Искомая поверхность шара

$$S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = a^2\pi \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = a^2\pi \operatorname{ctg}\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) \text{ кв. ед.}$$

**849.** Если пирамида вписана в шар, то это означает, что все вершины пирамиды лежат на поверхности шара. Центр описанного около пирамиды шара есть, следовательно, точка, равноудаленная от всех ее вершин. Геометрическое место точек, равноудаленных от всех вершин основания пирамиды, есть прямая, перпендикулярная к основанию и проходящая через центр окружности, описанной около него. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов бокового ребра, есть плоскость, перпендикулярная к последнему и проходящая через его середину. Таким образом, центр шара принадлежит одновременно двум указанным геометрическим местам и должен слиться с точкой их пересечения.

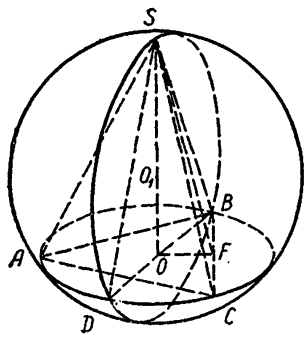


Рис. 216.

На основании изложенного легко вывести необходимое и достаточное условие возможности описать шар около пирамиды.

Пусть $O_1$ центр шара, описанного около пирамиды $SABC$ (рис. 216).

Соединив $O_1$ с $A$, $B$ и $C$, опустив перпендикуляр $O_1O$ на плоскость $ABC$ и проведя прямые $OA$, $OB$ и $OC$ (на рисунке не проведены), получим $OA = OB = OC$ как проекции равных наклонных, проведенных из точки $O_1$ к плоскости $ABC$, т. е. $O$ — центр окружности, описанной около основания $ABC$. Следовательно, основанием пирамиды должен быть такой многоугольник, около которого можно описать окружность. Это является необходимым условием. Оно же и будет достаточным.

Действительно, восставив из центра описанной около основания окружности перпендикуляр к плоскости основания и проведя плоскость, перпендикулярную к боковому ребру через его середину, найдем точку их пересечения (которая всегда существует, ибо боковое ребро не параллельно основанию). Эта точка и будет центром описанного около пирамиды шара.

Необходимым и достаточным условием возможности описать шар около пирамиды является наличие у пирамиды такого основания, вокруг которого можно описать окружность.

Данное здесь доказательство справедливо для всякой $n$-угольной пирамиды.

Пусть $SABC$ — данная пирамида, $O_1$ — центр описанного около нее шара.

Угол $\alpha$ — один из равных углов равнобедренного треугольника ($\alpha < 90°$). Так как сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего, то, рассматривая любой трехгранный угол при вершинах $A$, $B$ или $C$, получим $2\alpha > 60°$, или $\alpha > 30°$, поэтому $30° < \alpha < 90°$. Проведем через прямые $SO$ и $SB$ плоскость, пересекающую шар по большому кругу $SDB$. Соединим точки $S$ и $D$ ($D$ — точка пересечения продолжения $BO$ с окружностью большого круга). Радиус шара будет равен радиусу окружности $SDB$.

Из равнобедренного треугольника $SDB$ ($SD = SB$), обозначая через $x$ $\angle SBO$, по известной формуле

$$R = \frac{DB}{2\sin \angle DSB} = \frac{DB}{2\sin(180° - 2x)} = \frac{DB}{2\sin 2x}.$$

Но $DB = 2r$, а $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ($R$ — радиус шара, $r$ — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$). Поэтому

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}\sin 2x}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из треугольников $SOB$ и $SFB$

$$SB = \frac{OB}{\cos x} = \frac{a}{\sqrt{3}\cos x};$$

$$SB = \frac{a}{2\cos \alpha}$$

($SF$ — апофема пирамиды).

Сравнивая полученные равенства, найдем

$$\sqrt{3}\cos x = 2\cos\alpha,$$

или

$$\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha.$$

Подставим значение $\cos x$ в равенство (1):

$$R = \frac{a}{2\sqrt{3}\sin x\cos x} = \frac{a}{2\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{4\cos\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{\cos\alpha(3\cos\alpha-4\cos^3\alpha)}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{-\cos\alpha\cos 3\alpha}} \text{ (так как } 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha).$$

Исследование решения. Величина радиуса шара, описанного около пирамиды,— число действительное, положительное. Чтобы ответ был действительным числом, необходимо выполнение неравенств ($\alpha$ — один из углов при основании равнобедренного треугольника)

$$\begin{cases} \alpha < 90°; \\ -\cos 3\alpha < 0. \end{cases}$$

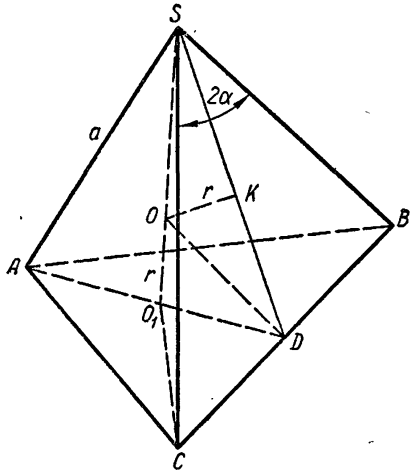


Рис. 217.

Следовательно,

$$90° < 3\alpha < 270°,$$

или

$$30° < \alpha < 90°,$$

что подтверждает предварительное установление множества допустимых значений параметра $\alpha$.

**850.** Введем обозначения: $H = SO_1$ — высота пирамиды, $k = SD$ — апофема, $r$ — радиус вписанного шара, $S_ш$ — поверхность шара (рис. 217).

Рассмотрим $\triangle SCD$, $\triangle O_1DC$ и $\triangle O_1SD$. Так как пирамида правильная, из $\triangle SCD$

$$k = a\cos\alpha,$$
$$CD = a\sin\alpha;$$

из $\triangle O_1DC$

$$O_1D = CD\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}a\sin\alpha;$$

из $\triangle O_1SD$

$$H=\sqrt{a^2\cos^2\alpha-\frac{1}{3}a^2\sin^2\alpha}=\frac{a}{3}\sqrt{9\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}$$

и из $\triangle O_1SD$ по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника

$$\frac{O_1D}{SD}=\frac{O_1O}{OS},$$

или

$$\frac{\sqrt{3}\,a\sin\alpha}{3a\cos\alpha}=\frac{r}{H-r},$$

или после преобразований

$$r=\frac{H\sqrt{3}\sin\alpha}{(\sqrt{3}\sin\alpha+3\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,a\sin\alpha\sqrt{(3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)(3\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)}}{3(\sqrt{3}\sin\alpha+3\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}}=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}}.$$

Получаем окончательно

$$S_{ш}=4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi a^2\frac{\sin^2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}.$$

**851.** $V_{кон}=\frac{\pi O_1B^2\cdot O_1C}{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}O_1B^3\left(OC_1=O_1B\operatorname{tg}30^\circ=O_1B\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$\frac{O_1B}{CB}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 218) или, так как $CB=CD+DB=$

$=2\frac{\sqrt{3}}{3}+O_1B\left(BD=O_1B;\quad CD=OD\operatorname{tg}30^\circ=2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$$\frac{O_1B}{2\frac{\sqrt{3}}{3}+O_1B}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

отсюда

$$O_1B=2(2+\sqrt{3});$$

$$V_{кон}=\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}(2+\sqrt{3})^3.$$

**852.** Обозначим сторону основания пирамиды через $a$ (рис. 219). Тогда из $\triangle KSC$ ($OK \perp DC$)

$$CK = \frac{a}{2}; \quad SC = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ как половина диагонали квадрата, то из $\triangle SOC$

$$OS = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

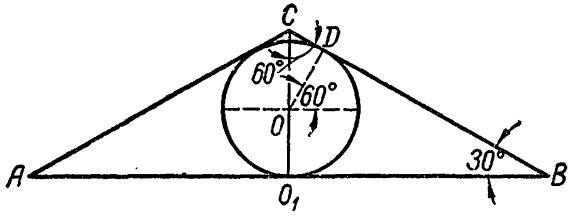


Рис. 218.

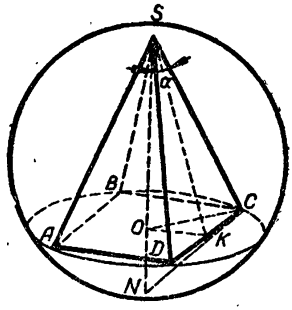


Рис. 219.

Из прямоугольного треугольника $NSC$

$$SC^2 = SN \cdot OS,$$

откуда

$$OS = \frac{SC^2}{SN} = \frac{a^2}{8R\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), получаем

$$\frac{a^2}{8R\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}$$

и, следовательно,

$$a = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Апофема пирамиды

$$SK = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Таким образом, боковая поверхность пирамиды

$$S_{\text{бок}} = 8R\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\cdot 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha} =$$

$$= 16R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 4R^2\sin 2\alpha \text{ кв. ед.}$$

**853.** Если призма вписана в шар, то все ее вершины находятся на поверхности шара. Грани призмы, являясь плоскими многоугольниками, должны быть вписанными в соответствующие круги шара, так как сечение шара плоскостью есть круг. Поэтому боковыми гранями призмы могут быть лишь прямоугольники (в частности, квадраты). Отсюда заключаем, что если призма вписана в шар, то она должна быть прямой, с основаниями, вокруг которых можно описать окружности.

Докажем достаточность этих условий.

Пусть имеется прямая призма с основаниями, около которых можно описать окружности. Соединим центры этих окружностей прямой. Последняя параллельна боковому ребру призмы, т. е. перпендикулярна к ее основаниям. Середина этой прямой будет точкой, равноудаленной от всех вершин верхнего и нижнего оснований призмы.

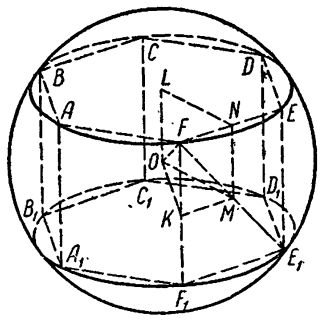


Рис. 220.

Из доказанного следует, что в наклонную призму нельзя вписать шар (или шар описать около наклонной призмы). Таким образом, лишь около всякой прямой призмы с основаниями, около которых можно описать окружности, можно описать и шар. Центр шара лежит на середине прямой, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы.

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — данная правильная призма (рис. 220), вписанная в шар с центром $O$, $\angle OFM = \alpha$ ($OM \perp$ пл. $FEE_1F_1$, $M$ — точка пересечения диагоналей прямоугольника $F_1FEE_1$, $OM$ — геометрическое место точек, равноудаленных от всех вершин $F, F_1, E_1, E$ прямоугольника $FF_1E_1E$; центр шара принадлежит этому геометрическому месту).

Из $\triangle OFM$ $OM = LN = a\sin\alpha$; $FM = a\cos\alpha$; $LN$ — апофема шестиугольника основания призмы.

Обозначим через $b$ длину стороны правильного шестиугольника, $\frac{b\sqrt{3}}{2} = LN = a\sin\alpha$; $b = \frac{2a\sin\alpha}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного треугольника $FMN$

$$MN = \sqrt{FM^2 - FN^2} = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - \frac{a^2\sin^2\alpha}{3}} = a\sqrt{\frac{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{3}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\alpha}{3}} = a\sqrt{\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{3\sin\alpha}} = \frac{a}{\sqrt{3\sin\alpha}}\sqrt{\sin\alpha\sin 3\alpha}.$$

$$H = \frac{2a}{\sqrt{3\sin\alpha}}\sqrt{\sin\alpha\sin 3\alpha} \quad (H \text{ — высота призмы});$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{6b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\cdot 4\sqrt{3}\cdot a^2\sin^2\alpha}{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}a^2\sin^2\alpha;$$

$$V_{\text{пр}} = 2\sqrt{3}a^2\sin^2\alpha\,\frac{2a\sqrt{\sin 3\alpha\sin\alpha}}{\sqrt{3\sin\alpha}} = 4a^3\sin^{3/2}\alpha\sqrt{\sin 3\alpha\sin\alpha} \text{ куб. ед.}$$

Чтобы решение имело смысл, должно быть

$$3\alpha < 180°,$$

или

$$\alpha < 60°.$$

Докажем это, исходя из геометрических соображений:

$$\frac{OM}{OF} = \sin\alpha \text{ (из } \triangle OMF);$$

$$\frac{OM}{OK} = \cos 30° \text{ (из } \triangle OMK).$$

Так как $OF > OK$, то

$$\sin\alpha < \cos 30°;$$

$$\sin\alpha < \sin 60°,$$

или

$$\alpha < 60°.$$

**854.** Конус с вписанным в него шаром можно рассматривать как совокупность тел, образованных вращением вокруг катета прямоугольного треугольника с вписанным в этот треугольник полукругом, окружность которого касается гипотенузы и другого катета в вершине прямого угла.

Отсюда следует:

1) ось вращения будет высотой конуса, так как она пройдет через вершину конуса и центр его основания;

2) гипотенуза опишет боковую поверхность конуса, один из катетов — площадь основания, полуокружность — шаровую поверхность;

3) центр шара совпадет с точкой пересечения высоты конуса с биссектрисой угла между любой образующей и плоскостью основания (угол между гипотенузой и катетом, не являющимся осью вращения, совпадет при вращении со всеми этими углами);

4) точка касания гипотенузы с полуокружностью опишет окружность касания шаровой и конической поверхностей.

Возможны два случая (рис. 221).

Разберем первый из них. На рисунке изображено осевое сечение конуса $ASB$; $KL$ и $C_1L_1$ — следы касательных плоскостей в этом сечении, $O$ — центр вписанного шара, $O_1N$ — радиус окружности касания шаровой и конической поверхностей, $ON$ — радиус шара, проведенный в точку касания. Обозначим $ON = R$, $O_1N = r$.

$$SL = a, \quad SN = a + R.$$

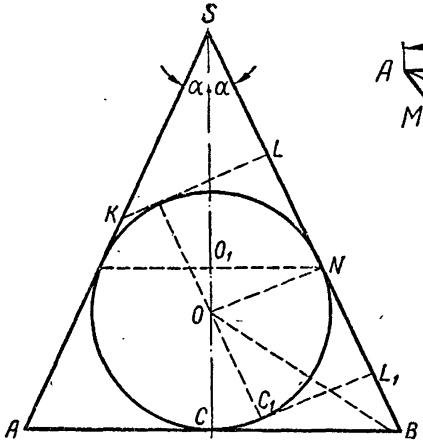



Рис. 221.

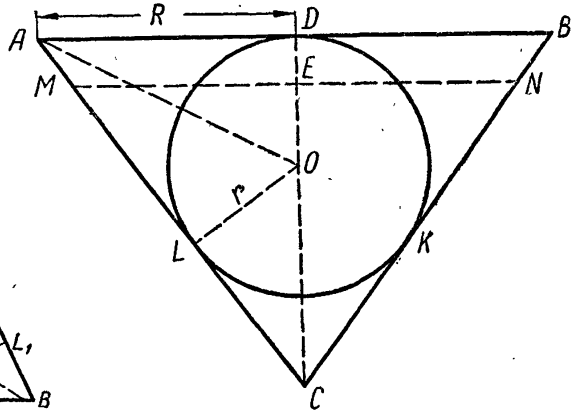



Рис. 222.

Из прямоугольного $\triangle SON$

$$ON = SN \operatorname{tg} \alpha,$$

или

$$R = (R + a) \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда

$$R = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{2} \sin (45° - \alpha)}; \quad (\alpha < 45°).$$

Из $\triangle OO_1N$

$$O_1N = r = ON \sin (90° - \alpha) = R \cos \alpha = \frac{a \sin 2\alpha}{2\sqrt{2} \sin (45° - \alpha)}.$$

Из $\triangle OBC$, обозначая радиус основания конуса через $R_1$, получим

$$CB = R_1 = OC \operatorname{ctg} \frac{90° - \alpha}{2} = \frac{a \sin \alpha \operatorname{ctg} \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2} \sin (45° - \alpha)}.$$

Второй случай предлагаем рассмотреть читателю.

**855.** На рис. 222 изображено осевое сечение конического сосуда; $ADB$ — уровень воды.

$\triangle ABC$ — равносторонний, круг $DKL$ (большой круг шара) вписан в него.

$$R = OD \operatorname{tg} 60^\circ = OD\sqrt{3} = \sqrt[3]{9}\sqrt{3}$$

и

$$H = CD = 3\sqrt[3]{9}.$$

Объем $V$ воды в сосуде равен объему конуса $ABC$ без объема шара, т. е.

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2H - 4\sqrt[3]{9^3}) = 15\pi.$$

Когда шар будет вынут, вода опустится до некоторого уровня $MN$ и заполнит конус $MNC$. Пусть $EC = h$, тогда $ME = CE \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$, так что

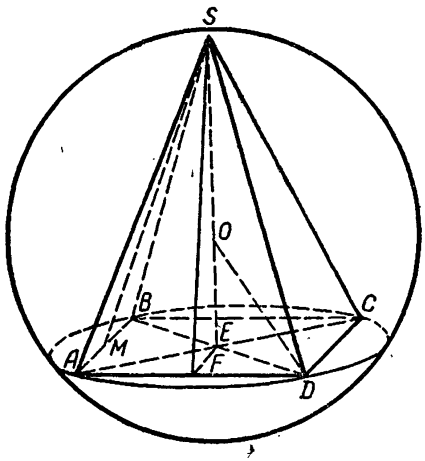


Рис. 223.

$$V = \frac{\pi}{3} ME^2 \cdot CE = \frac{\pi h^3}{9}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{\pi h^3}{9} = 15\pi,$$

или

$$h^3 = 135,$$

откуда

$$h = \sqrt[3]{135} = 3\sqrt[3]{5} \approx 5{,}1.$$

**856.** Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в шар (рис. 223); основание пирамиды — прямоугольник $ABCD$. По условию задачи

$$SA = SB = SC = SD = b.$$

Следовательно, центр шара $O$ находится на высоте $SE$ пирамиды и проектируется в точку $E$ пересечения диагоналей основания. Сечения шара плоскостями боковых граней есть окружности, а поэтому, опирающиеся на них дуги равны $\alpha$ и $\beta$. Углы, образованные боковыми ребрами пирамиды, являются вписанными углами, опирающимися на эти дуги, и равны, соответственно, $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$.

Высоты $SM$ и $SF$ являются биссектрисами углов $ASB$ и $ASD$. Следовательно, $\angle ASM = \angle BSM = \frac{\alpha}{4}$, а $\angle ASF = \angle DSF = \frac{\beta}{4}$; $OS = OD = R$ — радиус шара.

Объем шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Радиус шара можно выразить через высоту $SE$ (которую обозначим для удобства через $h$) и $SD=b$.

Из прямоугольных треугольников $SDE$ и $ODE$, у которых $ED$ — общий катет,

$ED^2=b^2-h^2=R^2-(h-R)^2$; $\quad b^2-h^2=R^2-h^2+2Rh-R^2$,

или $b^2=2Rh$, откуда $R=\frac{b^2}{2h}$. Высоту $h$ можно выразить через $SF$ и $EF$ из треугольника $SEF$, т. е. $h=\sqrt{SF^2-EF^2}$.

Высоту $SF$ находим из треугольника $ASF$; $SF=b\cos\frac{\beta}{4}$. Отрезок $AM=EF$ находим из треугольника $ASM$, т. е. $EF=AM=b\sin\frac{\alpha}{4}$.

Подставляем значения $SF$ и $EF$ в выражение для $h$:

$$h=\sqrt{b^2\cos^2\frac{\beta}{4}-b^2\sin^2\frac{\alpha}{4}}=b\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\beta}{4}-2\sin^2\frac{\alpha}{4}}{2}}=$$

$$=b\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\beta}{2}-\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2}}=b\sqrt{\frac{\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}=$$

$$=b\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}.$$

Подставляя значение $h$ в формулу для $R$, находим

$$R=\frac{b^2}{2h}=\frac{b^2}{2b\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}}=\frac{b}{2\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}}.$$

Значение $R$ подставляем в формулу объема шара и находим объем шара

$$V_{ш}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi b^3}{3\cdot 8\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\right)^3}},$$

или

$$V_{ш}=\frac{\pi b^3}{6\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}}\text{ куб. ед.}$$

Укажем еще один способ нахождения радиуса шара. Обозначим диагональ основания $AC$ через $x$ ($AC=x$). Из $\triangle SDC$ найдем $DC$, а из $\triangle ASD$ — $AD$:

$$DC=2b\sin\frac{\alpha}{4};\quad AD=2b\sin\frac{\beta}{4}.$$

Тогда

$$x = AC = 2b\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\beta}{4}}.$$

Рассмотрим $\triangle ASC$ и обозначим также $\angle ASC = \gamma$.

Из $\triangle ASE$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{x}{2b}; \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4b^2}}; \quad \sin\gamma = 2\frac{x}{2b}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4b^2}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{4b^2 - x^2}}{2b^2}.$$

По известной лемме о зависимости между радиусом описанной окружности вокруг треугольника и его стороною и функцией угла

$$R = \frac{x \cdot 2b^2}{2x\sqrt{4b^2 - x^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - x^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - 4b^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\beta}{4}\right)}} =$$

$$= \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\beta}{4}}} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}}{2}}} =$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}}.$$

Третий способ нахождения радиуса шара аналогичен решению задачи 852.

**857.** Обозначим искомый угол $SBA$ через $x$ (см. рис. 224, на котором изображено осевое сечение данного конуса).

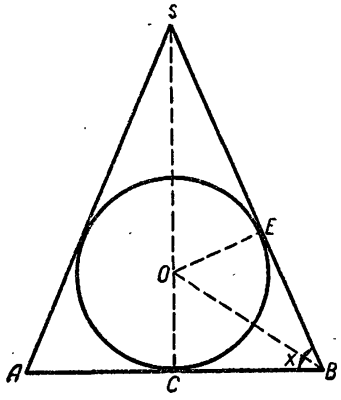


Рис. 224.

Из условия известно, что

$$\frac{\pi Rl}{4\pi r^2} = \frac{Rl}{4r^2} = m; \quad (m \geqslant 0),$$

где $R$ — радиус основания конуса, $l$ — образующая, а $r$ — радиус вписанного шара.

Из $\triangle CSB$ находим, что $l = \frac{R}{\cos x}$, а из $\triangle OBC$ получим, что $r = R\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Таким образом,

$$\frac{Rl}{4r^2} = \frac{R^2}{4\cos x R^2 \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\frac{1}{4\cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = m.$$

Решим последнее уравнение относительно $\cos x$:

$$1 + \cos x = 4m \cos x - 4m \cos^2 x;$$

$$4m \cos^2 x - (4m - 1) \cos x + 1 = 0,$$

откуда

$$\cos x = \frac{(4m-1) \pm \sqrt{(4m-1)^2 - 16m}}{8m}.$$

Очевидно, данное выражение имеет смысл, т. е. задача имеет решение только для тех значений $m > 0$, для которых подкоренное выражение

$$(4m-1)^2 - 16m \geqslant 0 \quad (\cos x > 0, \quad \text{ибо} \quad 0 < x < 90°).$$

При этом условии

$$x = \arccos \frac{(4m-1) \pm \sqrt{(4m-1)^2 - 16m}}{8m}.$$

Примечание. Остановимся более подробно на исследовании множества значений $m$.

Как определено, $m$ должно удовлетворять условию

$$(4m-1)^2 - 16m \geqslant 0; \quad 16m^2 - 24m + 1 \geqslant 0,$$

откуда

$$m \geqslant \frac{12 + \sqrt{128}}{16};$$

$$0 < m \leqslant \frac{12 - \sqrt{128}}{16}.$$

Кроме того, $m > \frac{1}{4}$, ибо в уравнении для $\cos x$ свободный член положительный, а коэффициент второго члена при этих условиях будет отрицательный (согласно теореме Виета оба корня будут положительны). Получаем такие системы неравенств и равенств:

$$\begin{cases} m \geqslant \dfrac{12 + \sqrt{128}}{16}; \\ m > \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} m \leqslant \dfrac{12 - \sqrt{128}}{16}; \\ m > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Вторая система не имеет решений, а из первой получаем, что

$$m \geqslant \frac{12 + \sqrt{128}}{16}.$$

При этом условии

$0 < \cos x = \dfrac{(4m-1) \pm \sqrt{(4m-1)^2 - 16m}}{8m} < 1$, в чем предлагаем убедиться читателю.

**858.** Обозначим искомый радиус шара $SD$ через $R$ (рис. 225) и вычислим прежде всего объем шарового сектора $CSD$, равный половине объема данного конуса.

Воспользуемся формулой объема шарового сектора

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где $R$ — радиус шара, а $h$ — высота сегментной поверхности (на рисунке отрезок $KN$).

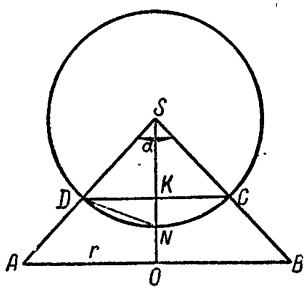



Рис. 225.

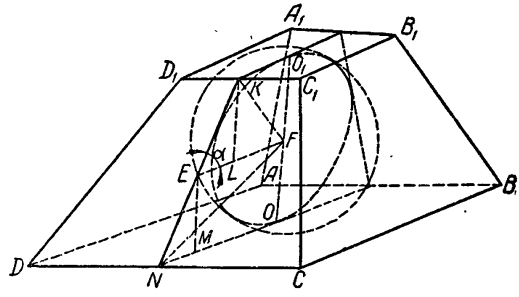



Рис. 226.

Высоту $h$ определим из прямоугольного $\triangle DKN$ (по построению $DK \perp SO$).

Принимая во внимание, что $\angle KDN = \frac{\alpha}{4}$ (как вписанный, опирающийся на дугу $CN$) и $DK = R\sin\frac{\alpha}{2}$, находим

$$h = R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

Таким образом, объем шарового сектора

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4};$$

объем конуса

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

но по условию

$$\frac{1}{6}\pi r^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},$$

откуда

$$R = \frac{r}{2}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}} \text{ лин. ед.}$$

**859.** Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида (рис. 226). $\angle KNO = \alpha$, $OF = FO_1 = r$.

Искомый объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} H (B + b + \sqrt{Bb}),$$

где $H$ — высота (в данном случае $H = 2r$); $B$ — площадь нижнего основания — квадрата $ABCD$; $b$ — площадь верхнего основания — квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Прямоугольные треугольники $MNE$ и $KLE$ равны.

Поэтому

$$MN = LE = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Далее

$$FE = \frac{ON + O_1K}{2} = EN = \frac{EM}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Находим

$$ON = \frac{r}{\sin \alpha} + MN = \frac{r}{\sin \alpha} + r \operatorname{ctg} \alpha = \frac{r(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$AD = 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично находим

$$O_1K = \frac{r}{\sin \alpha} - LE = \frac{r}{\sin \alpha} - r \operatorname{ctg} \alpha = \frac{r(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$A_1D_1 = 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Площади оснований усеченного конуса

$$B = 4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$b = 4r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Искомый объем

$$V = \frac{8r^3}{3}\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1\right) \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Стороны оснований усеченной пирамиды можно определить иначе.

Центр шара $F$ лежит на пересечении биссектрис углов $ONF$ и $O_1KE$; поэтому из $\triangle FKO_1$ и $\triangle FNO$

$$O_1K = C_1F \operatorname{ctg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$ON = OF \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

**860.** Центр $O$ (рис. 227) шара, описанного вокруг данной пирамиды, можно найти, если в плоскости $MAP$ провести перпендикуляр $KO$ к ребру $AM$ через середину $K$ этого ребра до пересечения с высотой пирамиды в точке $O$.

Если $\angle MAP = \angle MOK = 90° - \angle AMP$, то, зная угол наклона бокового ребра к плоскости основания, можно легко решить эту задачу.

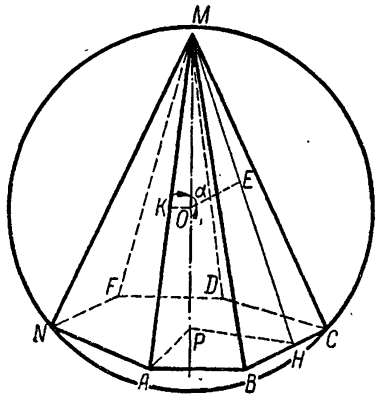


Рис. 227.

Отрезок $OE$ перпендикулярен к боковой грани $BMC$.

Основание этого перпендикуляра находится на апофеме $MH$ пирамиды и, следовательно, $\angle MOE = \alpha$.

Кроме того, $\angle MHP = 90° - \angle PMH = \alpha$.

Обозначим сторону основания через $a$, тогда

$$PH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AP = a.$$

Из $\triangle MPH$

$$MP = PH \operatorname{tg}\alpha;$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Из $\triangle MPA$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{AP}{MP} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha; \quad x = \angle PAM.$$

Следовательно,

$$AM = \frac{MP}{\sin x} = \frac{h}{\sin x};$$

$$OM = \frac{MK}{\sin x} = \frac{AM}{2\sin x} = \frac{h}{2\sin^2 x}.$$

Искомый объем шара

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi MO^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{h^3}{8\sin^6 x} = \frac{\pi h^3}{6}\csc^6 x,$$

где

$$\operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Можно определить объем шара через угол $\alpha$:

$$V = \frac{\pi h^3}{6}(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^3 = \frac{\pi h^3}{162}(3 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha)^3 \text{ куб. ед.}$$

Примечание. Для определения радиуса шара можно также воспользоваться тригонометрической формулой

$$R = \frac{a}{2\sin A}.$$

В данном случае $2a = AD$ (если рассматривать треугольник $AMD$, то радиус окружности, описанной вокруг него, равен радиусу шара), а $A = \angle AMD = 180° - 2x$;

$$r = \frac{2a}{2\sin(180° - 2x)} = \frac{a}{\sin 2x} = \frac{a(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{2\operatorname{tg} x} = \frac{a(\operatorname{ctg}^2 x + 1)}{2\operatorname{ctg} x}.$$

**861.** Вес деревянного шара равен весу шарового сегмента вытесненной воды. Следовательно, их объемы обратно пропорциональны их плотностям $d$ и 1, т. е.

$$\frac{V}{V'} = \frac{1}{d}.$$

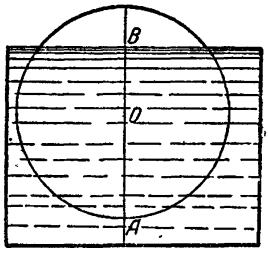


Рис. 228.

Найдем $V$ и $V'$, выразив их через $R$:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

а $V'$ равно разности между объемом шара и объемом шарового сегмента, который выступает из воды (рис. 228).

Но объем шарового сегмента

$$V_1 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right),$$

где $h$ — высота сегмента, $R$ — радиус шара; $h = \frac{R}{3}$; $V_1 = \frac{8\pi R^3}{81}$; отсюда

$$V' = V - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8\pi R^3}{81} = \frac{100\pi R^3}{81}.$$

Имеем

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{100\pi R^3}{81}} = \frac{1}{d},$$

отсюда

$$d = 0{,}925.$$

Примечание. $V'$ можно найти непосредственно:

$$V' = \pi h_1^2\left(R - \frac{h_1}{3}\right),$$

где $h_1$ — высота сегмента, погруженного в воду.

$$V' = \pi\left(\frac{5}{3}R\right)^2\left(R - \frac{5}{9}R\right) = \frac{100\pi R^3}{81}.$$

## РАЗДЕЛ IV

# ТРИГОНОМЕТРИЯ*

**862.** Принимая во внимание, что

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;$$

$$\cos 3\alpha + \cos\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha,$$

получим

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}.$$

**863.**

$$\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)} + \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)\cos(\pi+\alpha)}{\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\alpha} + \frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos\alpha}{\csc\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}{\csc\alpha} = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

**864.**

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\sec^2\alpha-1} + \frac{1-\sin^2\alpha}{\csc^2\alpha-1} - (\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2 - \frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} +$$

$$+ \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha + 2 - \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+$$

$$+ 2 = 3-\operatorname{tg}^2\alpha.$$

---

* При тождественных преобразованиях тригонометрических функций рассматриваются только те значения аргумента, при которых эти преобразования имеют смысл на множестве действительных чисел, т. е. такие, при которых подкоренные выражения корней четной степени положительны, знаменатели дробей не равны нулю и т. п.

Читателю предлагается найти, при каких значениях аргумента имеет смысл каждое отдельное преобразование.

**865.** Заменяя $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через синус и косинус, а также принимая во внимание, что $\frac{1}{\csc 2\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\csc 2\alpha} = \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\, 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2.$$

**866.**

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{13}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{13}{2}\pi\right)} = \frac{-\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} =$$

$$= -\frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha} = \cos 2\alpha.$$

**867.**

$$\frac{1 + \sin\alpha - 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \sin\alpha - [1 - \cos(90° - \alpha)]}{4\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \sin\alpha - 1 + \sin\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

**868.** Раскрыв выражение $\cos(\alpha + \beta)$, получим

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

Но

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta,$$

поэтому данное выражение приводится к следующему виду:

$$(\sin\alpha\cos\beta)^2 + (\cos\alpha\sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = \sin^2(\alpha + \beta).$$

Принимая во внимание, что

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2\beta = \frac{1 - \cos 2\beta}{2};$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

получим

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta) =$$
$$= \frac{1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta}{2} + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta) =$$

$$= 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) =$$

$$= 1 - \cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)] =$$

$$= 1 - \cos^2(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta).$$

**869.** Преобразуем сначала первое слагаемое:

$$\sqrt{\sec^2\alpha + \csc^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}} = \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2\csc 2\alpha,$$

а затем второе:

$$\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos(90^\circ-\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{90^\circ-\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{90^\circ-\alpha}{2}\right)}} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Следовательно, все выражение можно записать в виде

$$2\csc 2\alpha + \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

**870.**

$$\frac{\sin(45^\circ+\alpha) - \cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha) - \cos(45^\circ+\alpha)} = \frac{\sin(45^\circ+\alpha) - \sin(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha) + \sin(45^\circ-\alpha)} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos 45^\circ}{2\cos\alpha\sin 45^\circ} = \operatorname{tg}\alpha.$$

**871.**

$$\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^4\alpha}{4(1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha\sec^2\alpha.$$

**872.**

$$\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8\cos 4\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{1+\cos 4\alpha}{1-\cos 4\alpha} - \frac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} -$$

$$- \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{(1+\cos 4\alpha)^2 - (1-\cos 4\alpha)^2}{1-\cos^2 4\alpha} - \frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{4\cos 4\alpha(1 - 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha)}{\sin^2 4\alpha} = \frac{4\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha}(\sin 4\alpha - \cos 4\alpha)^2 =$$

$$= \frac{8\cos 4\alpha}{\sin^2 4\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4\alpha\right)^2 = \frac{8\cos 4\alpha\sin^2\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2 4\alpha}.$$

Примечание. Для решения этого примера мы выразили $\operatorname{tg}^2 2\alpha$ по формуле

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

**873.** Указание. Разложить $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ на множители. *Ответ.* $-27\sin^6\alpha\cos^6\alpha$.

**874.** Указание. Заменить $C$ на $180^\circ-(A+B)$.

**875.** 1-й способ решения.

$$\sin\alpha+\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]+\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin\beta\cos(\alpha+\beta)+\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta.$$

2-й способ решения. Применяя формулу

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)],$$

получим

$$\sin\alpha+\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\frac{\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha}{2}=$$
$$=\frac{\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)}{2}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta.$$

**876.**

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)(1+\sin\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]}{\sin\varphi}=$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi}=\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi}=$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\operatorname{ctg}\varphi.$$

**877.**

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$
$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

**878.** Преобразуем левую часть тождества

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Группируя первое слагаемое со вторым, третье с четвертым и пользуясь формулой суммы и разности синусов, получим

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right).$$

Используя формулу разности косинусов, получим

$$4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2},$$

что и нужно было доказать.

**879.** Применяя формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

и принимая во внимание, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$, а $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}$, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -1,$$

или

$$\alpha+\beta = 135°.$$

**880.**

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin 2\alpha =$$

$$= \cos 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

**881.** Можно преобразовать левую часть по формуле

$$\sin x\cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2},$$

тогда получим

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2} = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta;$$

можно начать преобразование с правой части, тогда получим

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\beta}{2} = \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2} =$$

$$= \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$

что и требовалось доказать.

**882.** Принимая во внимание, что $\cos(\alpha + 30°) = \sin(60° - \alpha)$, и используя формулу для суммы синусов, получим

$$\sin(\alpha + 60°) + \cos(\alpha + 30°) = 2\sin 60° \cos\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha.$$

С другой стороны, преобразуя правую часть приведенного тождества, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{3}\cos\alpha.$$

Итак, тождество доказано.

Примечание. Можно решить этот пример, не преобразовывая правой части:

$$\sin(\alpha + 60°) + \cos(\alpha + 30°) = \sqrt{3}\cos\alpha\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

**883.**

$$\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)^3 - \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{1 + 3\cos 2\alpha + 3\cos^2 2\alpha + \cos^3 2\alpha - 1 + 3\cos 2\alpha - 3\cos^2 2\alpha + \cos^3 2\alpha}{8} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha\,(3 + \cos^2 2\alpha)}{4} = \frac{\cos 2\alpha\,(4 - \sin^2 2\alpha)}{4} = \cos 2\alpha\left(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{4}\right).$$

**884.**

$$\sqrt{\frac{(\sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha)(\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1 + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \sin^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

**885.**

$$\operatorname{tg} 142°30' = \operatorname{tg}(180° - 37°30') = -\operatorname{tg} 37°30' = -\operatorname{tg}\frac{75°}{2} =$$

$$= -\frac{1 - \cos 75°}{\sin 75°} = \frac{\cos(30° + 45°) - 1}{\sin(30° + 45°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4)(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{6 - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 2 + 4\sqrt{2}}{4} =$$

$$= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}.$$

886. Поскольку числа $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ и $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ положительны, то чтобы доказать их равенство, достаточно убедиться в равенстве их квадратов.

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}\right]^2=\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]^2.$$

Итак, числа $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ и $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ равны.

Теперь найдем $\sin\frac{\pi}{12}$:

Применяя формулу синуса половины угла, будем иметь

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Этот пример можно решить и так:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

887. Умножим и разделим левую часть тождества на $2\sin\frac{\pi}{7}$:

$$\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Воспользуемся формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность. Получим

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

888.

$$\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

**889.**

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}}=\frac{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+1}{\dfrac{\sin 2\alpha}{1}}=3.$$

**890.**

$$\frac{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}}{2\csc 2\alpha}=\frac{\left(\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin 2\alpha}{2\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\,2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\sin\alpha.$$

**891.**

$$\frac{\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}-$$

$$-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

**892.** 1-й способ решения.

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+$$

$$+\sin\alpha[\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha]=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)-$$

$$-\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\frac{\cos 2\beta-\cos(2\alpha+2\beta)}{2}=$$

$$=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)}{2}=\sin^2(\alpha+\beta).$$

2-й способ решения.

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta-$$

$$-\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha+$$

$$+2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2=\sin^2(\alpha+\beta).$$

**893.** $\sin^{10}x+\cos^{10}x=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^8x-\sin^6x\cos^2x+$

$$+\sin^4x\cos^4x-\sin^2x\cos^6x+\cos^8x)=\sin^8x-2\sin^4x\cos^4x+$$

$$+\cos^8 x - (\sin^6 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cos^4 x + \sin^2 x \cos^6 x) + 5\sin^4 x \cos^4 x =$$

$$= (\sin^4 x - \cos^4 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 5\sin^4 x \cos x =$$

$$= (\sin^2 x - \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x + \frac{5}{16}\sin^4 2x = \cos^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x +$$

$$+ \frac{5}{16}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) + \frac{5}{64}(1 - 2\cos 4x +$$

$$+ \cos^2 4x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{5}{64} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{5}{32}\right)\cos 4x + \frac{5}{64} \cdot \frac{1+\cos 8x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{5}{64} + \frac{5}{128} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{5}{32}\right)\cos 4x + \frac{5}{128}\cos 8x =$$

$$= \frac{63}{128} + \frac{15}{32}\cos 4x + \frac{5}{128}\cos 8x.$$

**894.**

$$\frac{\cos 4\beta - \cos \beta}{\sin \beta - \sin 4\beta} = \frac{-2\sin \frac{5}{2}\beta \sin \frac{3}{2}\beta}{-2\cos \frac{5}{2}\beta \sin \frac{3\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{5}{2}\beta.$$

**895.**

$$\frac{\sin(\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\gamma) - \sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{4\sin \frac{\beta-\alpha}{2}\sin \frac{\beta-\gamma}{2}\sin \frac{\gamma-\alpha}{2}}{8\sin \frac{\alpha-\beta}{2}\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}\sin \frac{\beta-\gamma}{2}\cos \frac{\alpha-\beta}{2}\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos \frac{\alpha-\beta}{2}\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

**896.**

$$\cos 80^\circ - 2\sin 30^\circ \sin 10^\circ = \cos 80^\circ - \sin 10^\circ = \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0.$$

**897.**

$$2\cos 48^\circ \sin 30^\circ - \cos 48^\circ = \cos 48^\circ - \cos 48^\circ = 0.$$

**898.**

$$(\sin\alpha + \csc\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\csc\alpha +$$

$$+ \csc^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sec\alpha + \sec^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 4 +$$

$$+ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 7.$$

**899.**

$$\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\sin^2\alpha\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+$$

$$+\cos^2\alpha\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

**900.**

$$\frac{1}{2}\left[2\cos^2\frac{7\alpha}{2}-2\sin^2\frac{3\alpha}{2}\right]=\frac{1}{2}(1+\cos 7\alpha-1+\cos 3\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 7\alpha+\cos 3\alpha)=\cos 5\alpha\cos 2\alpha.$$

**901.**

$$\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta-$$

$$-\cos\alpha\sin\beta=(\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)=$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta-\sin\beta)+\sin\alpha(\sin\beta-\cos\beta)=$$

$$=(\cos\beta-\sin\beta)(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

**902.**

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-$$

$$-\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)-\sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)=$$

$$=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\beta-\sin\beta).$$

**903.**

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha+1+\cos 2\beta)+$$

$$+\cos^2\gamma-1=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma-1=$$

$$=\cos(\pi n-\gamma)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma.$$

Если $n=2k$, то $\cos(\pi n-\gamma)=\cos(-\gamma)=\cos\gamma$, если $n=2k+1$, то $\cos(\pi n-\gamma)=\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$, следовательно, при любом $k$ имеем $\cos(\pi n-\gamma)=(-1)^n\cos\gamma$.

$$(-1)^n\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma=\cos\gamma[(-1)^n\cos(\alpha-\beta)+$$

$$+\cos\gamma]=\cos\gamma[(-1)^n\cos(\alpha-\beta)+\cos(\pi n-(\alpha+\beta)]=$$

$$=(-1)^n\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=(-1)^n 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

**904.**

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma=$$

$$=2\sin\left(\pi n-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Пусть $n = 2k$, тогда

$$\sin\left(\pi n - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = -\sin\frac{\gamma}{2};$$

пусть $n = 2k + 1$, тогда

$$\sin\left(\pi n - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Отсюда при любом $n$

$$\sin\left(\pi n - \frac{\gamma}{2}\right) = (-1)^{n-1}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Следовательно,

$$(-1)^{n-1}\,2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[(-1)^{n-1}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\left(\pi n - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[(-1)^{n-1}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - (-1)^{n-1}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= (-1)^{n-1}\,2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= (-1)^{n-1}\,4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

**905.**

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +\right.$$

$$\left. + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

**906.** $\sin\delta = \sin[2\pi - (\alpha+\beta+\gamma)] = -\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Тогда

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = (\sin\alpha + \sin\beta) + [\sin\gamma -$$

$$- \sin(\alpha+\beta+\gamma)] = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} \times$$

$$\times \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right] =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

**907.** $\delta = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, следовательно,

$$\cos^2 \delta = \cos^2 [2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)] = \cos^2 (\alpha + \beta + \gamma).$$

Тогда

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \delta = \frac{1}{2} \{1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta -$$

$$- [1 + \cos 2\gamma + 1 + \cos (2\alpha + 2\beta + 2\gamma)]\} = \frac{1}{2} \{(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) -$$

$$- [\cos 2\gamma + \cos (2\alpha + 2\beta + 2\gamma)]\} = [\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) -$$

$$- \cos (\alpha + \beta + 2\gamma) \cos (\alpha + \beta)] = \cos (\alpha + \beta) [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta +$$

$$+ 2\gamma)] = 2 \sin (\beta + \gamma) \sin (\alpha + \gamma) \cos (\alpha + \beta).$$

**908.** Используем формулу для $\cos x$:

$$\sec^2 x = 1 + \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{(\cos \alpha + \cos \beta)^2} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{(\cos \alpha + \cos \beta)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)}{(\cos \alpha + \cos \beta)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{(\cos \alpha + \cos \beta)^2},$$

откуда

$$\cos x = \pm \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta}.$$

Возьмем положительное значение корня и представим полученное равенство в виде пропорции

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha - \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha + \cos \beta} = \frac{(1 - \cos \beta) - \cos \alpha (1 - \cos \beta)}{(1 + \cos \alpha) + \cos \alpha (1 + \cos \beta)} =$$

$$= \frac{(1 - \cos \beta)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \beta)(1 + \cos \alpha)} = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

**909.**

$$a \left[\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}\right] = b \left[\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \operatorname{tg} \beta\right];$$

$$\frac{a \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{b \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta};$$

$$a \cos \beta = b \cos \alpha.$$

**910.** Пусть

$$l\sin(\vartheta-\beta)-m\cos(\vartheta-\alpha)=x.$$

Возводя в квадрат равенства

$$l\cos(\vartheta-\beta)-m\cos(\vartheta-\alpha)=n,$$
$$l\sin(\vartheta-\beta)-m\sin(\vartheta-\alpha)=x$$

и складывая результаты, получим

$$l^2+m^2-2lm[\cos(\vartheta-\beta)\cos(\vartheta-\alpha)+$$
$$+\sin(\vartheta-\beta)\sin(\vartheta-\alpha)]=x^2+n^2,$$

или

$$x^2=l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta),$$

откуда

$$x=\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)},$$

т. е.

$$l\sin(\vartheta-\beta)-m\sin(\vartheta-\alpha)=\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)}.$$

**911.** Пусть

$$a^4+\frac{a^2\cdot b^2}{a^2-1}=c^2. \quad (c>0)$$

$$\sec\alpha=\frac{c}{a-b}, \quad \sec\beta=\frac{c}{a+b};$$

$$\cos\alpha=\frac{a-b}{c}, \quad \cos\beta=\frac{a+b}{c};$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2+2ab}}{c}, \quad \sin\beta=\frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2-2ab}}{c},$$

или

$$\sin\alpha=\frac{a(a^2-1)+b}{c\sqrt{a^2-1}}, \quad \sin\beta=\frac{a(a^2-1)-b}{c\sqrt{a^2-1}};$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{a^2-b^2}{c^2}+\frac{a^2(a^2-1)^2-b^2}{c^2(a^2-1)}.$$

Вместо $c^2$ подставим его значение и после элементарных преобразований получим

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{1}=\frac{a^4-a^2-b^2}{a^4-a^2+b^2}.$$

Используя производную пропорцию, найдем

$$\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{1+\cos(\alpha-\beta)}=\frac{b^2}{a^4+a^2},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{b^2}{a^4-a^2},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{b}{a\sqrt{a^2-1}}.$$

**912.** Из первого и второго равенств получаем

$$\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}=\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\gamma\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}.$$

Возводим третье равенство в квадрат и подставляем найденные значения:

$$\frac{(1-\cos\alpha\cos\beta)(1-\cos\gamma\cos\beta)}{(1+\cos\alpha\cos\beta)(1+\cos\gamma\cos\beta)}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}.$$

Открыв скобки и написав производную пропорцию, получим равенство

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\gamma\cos^2\beta}=\cos\beta$$

($\cos\beta\neq 0$, ибо в противном случае пример теряет смысл; $\alpha$ и $\beta$ — произвольные),
откуда определяем

$$\cos^2\beta=\frac{\cos\alpha+\cos\gamma-1}{\cos\alpha\cos\gamma},$$

а следовательно,

$$\sin^2\beta=\frac{\cos\alpha\cos\gamma-\cos\alpha-\cos\gamma+1}{\cos\alpha\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\cos\alpha(\cos\gamma-1)-(\cos\gamma-1)}{\cos\alpha\cos\gamma}=\frac{\cos\gamma-1}{\cos\gamma}\cdot\frac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha}=$$

$$=(1-\sec\gamma)(1-\sec\alpha).$$

**913.** 1-й способ решения.

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0.$$

Преобразовываем данное выражение:

$$1-\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0;$$

$$(\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma)-$$

$$-\cos^2\beta\cos^2\gamma-\sin^2\beta-\sin^2\gamma+1=0;$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)^2-\cos^2\beta\cos^2\gamma-\sin^2\beta+\cos^2\gamma=0;$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)^2+\cos^2\gamma(1-\cos^2\beta)-\sin^2\beta=$$

$$=(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)^2+\cos^2\gamma\sin^2\beta-\sin^2\beta=$$

$$=(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)^2-\sin^2\beta(1-\cos^2\gamma)=$$

$$=(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)^2-\sin^2\beta\sin^2\gamma=$$

$$=(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)=$$

$$=[\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)][\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)]=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}=0,$$

а это возможно, если

1) $\alpha+\beta+\gamma=\pi(2k+1)$; 2) $\alpha+\beta-\gamma=\pi(2k+1)$;
3) $\alpha-\beta+\gamma=\pi(2k+1)$; 4) $\alpha-\beta-\gamma=\pi(2k+1)$.

Обобщив результат, получим

$$\alpha\pm\beta\pm\gamma=\pi(2k+1).$$

2-й способ решения.

$$2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta+2\sin^2\gamma-4-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0;$$

$$1-\cos 2\alpha+1-\cos 2\beta+2-2\cos^2\gamma-4-2[\cos(\alpha+\beta)+$$
$$+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma=0;$$

$$\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+\cos^2\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+$$
$$+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma=0;$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+$$
$$+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma=0;$$

$$\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]+\cos\gamma[\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)]=0;$$

$$[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma][\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma]=0;$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=0,$$

далее, как выше.

**914.** После некоторых преобразований получим

$$\operatorname{tg}2\alpha(1-\operatorname{ctg}2\beta\operatorname{ctg}2\gamma)-(\operatorname{ctg}2\beta+\operatorname{ctg}2\gamma)=$$
$$=\operatorname{tg}2\alpha(\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma-1)-(\operatorname{tg}2\gamma+\operatorname{tg}2\beta)=0,$$

или, деля на $1-\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma$,

$$-\operatorname{tg}2\alpha-\frac{\operatorname{tg}2\gamma+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma}=0;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=-\operatorname{tg}(2\beta+2\gamma)=\operatorname{tg}(-2\beta-2\gamma),$$

откуда

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi k,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}k.$$

**915.**

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)-\left(1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=0,$$

или, деля на $1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}-1=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)-1=0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right),$$

откуда

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi k,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi(2k+1).$$

**916.**

$$(1+\cos\alpha)+(1+\cos\beta)-(1+\cos\gamma)-4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\beta}{2}-2\cos^2\frac{\gamma}{2}-4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=2\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2+\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}-\cos^2\frac{\gamma}{2}\right]=$$

$$=2\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2-\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\right]=$$

$$=2\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\right]=$$

$$=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=8\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma-\beta-\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\gamma-\beta}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\right)=0.$$

Для того чтобы произведение равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из множителей был равен нулю.

Имеем:

1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma-\beta-\alpha}{4}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, т. е. $\gamma-\beta-\alpha=\pi(4k+1)$;

2) $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\gamma-\beta}{4}=\pi k$, т. е. $\alpha+\gamma-\beta=\pi(1-4k)$;

3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, т. е. $\beta+\gamma-\alpha=\pi(4k+1)$;

4) $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}=\pi k$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma=\pi(1-4k)$.

**917.**

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right] - \cos\gamma =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right] - \cos\gamma =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} - \cos\gamma = 0.$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos\gamma - \cos\gamma = 0,$$

или

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = 0,$$

откуда

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}(2k+1).$$

**918.** 1-й способ решения. По условию $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ или $\alpha+\beta = 180° - \gamma$, следовательно,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180° - \gamma) = \sin\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \operatorname{tg}\gamma =$$

$$= \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$$

$$= \operatorname{tg}\gamma\,\frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\gamma\,\frac{-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

2-й способ решения.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta -$$

$$- \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(-1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1) =$$

$$= \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

3-й способ решения. По условию $\alpha+\beta = 180°-\gamma$, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(180° - \gamma);$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma;$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Последний способ интересен тем, что показывает, каким образом можно доказать подобные тождества.

**919.**

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{b}{a}} + \sqrt{a}\sqrt{1-\frac{b}{a}} =$$

$$= \sqrt{a}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}} + \sqrt{1-\frac{b}{a}}\right).$$

Введем вспомогательный угол и, принимая во внимание, что $\frac{b}{a}$ — правильная дробь или единица, положим $\frac{b}{a} = \cos\varphi$.

Тогда при $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right) = \sqrt{2a}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2a}\left[\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right)\right] = 2\sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - 45°\right).$$

Вспомогательный угол $\varphi = \arccos\frac{b}{a}$ находим с помощью таблиц.

Если положить $\frac{3}{2}\pi < \varphi \leqslant 2\pi$ или $\frac{3}{4}\pi < \frac{\varphi}{2} \leqslant \pi$, то

$$\sqrt{a}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right) = \sqrt{2a}\left(\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt{a}\sin\left(\frac{\varphi}{2} - 45°\right);$$

$$\varphi = 2\pi - \arccos\frac{b}{a}.$$

**920.**

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

**921.**

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\,\sqrt{1+\cos\alpha}+$$

$$+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\,\sqrt{1-\cos\alpha}=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)=$$

$$=\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\left[\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right]=$$

$$=\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\cdot 2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

**922.**

$$\frac{(1-\sin^2\alpha)\cos\alpha-(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha\cos\alpha)}=\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha\cos\alpha)}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos 45^\circ\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

**923.**

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\operatorname{tg}\alpha)+(\sin\alpha+\cos\alpha)=$$

$$=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}+\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}(1+\cos\alpha)=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

**924.**

$$\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=$$

$$=(\sin\alpha+\sin 3\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$$

$$=2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$$

$$=\sin 2\alpha(2\cos\alpha+1)+\cos 2\alpha(2\cos\alpha+1)=$$

$$=(2\cos\alpha+1)(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=2(\cos\alpha+\cos 60^\circ)[\cos(90^\circ-2\alpha)+$$

$$+\cos 2\alpha]=4\cos\frac{\alpha+60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-60^\circ}{2}2\cos 45^\circ\cos(45^\circ-2\alpha)=$$

$$=4\sqrt{2}\cos\frac{\alpha+60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-60^\circ}{2}\cos(45^\circ-2\alpha).$$

**925.**

$$\sqrt{3}-2\cos 20^\circ=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 20^\circ\right)=$$

$$=2(\cos 30^\circ-\cos 20^\circ)=-4\sin 25^\circ\sin 5^\circ.$$

**926.**

$$\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B-C}{2}=\frac{1-\cos A}{2}-\frac{1-\cos(B-C)}{2}=$$

$$=\frac{\cos(B-C)-\cos A}{2}=\sin\frac{A+B-C}{2}\sin\frac{A+C-B}{2}=$$

$$=\sin\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right)\sin\left(\frac{A+B+C}{2}-B\right)=$$

$$=\sin(90^\circ-C)\sin(90^\circ-B)=\cos C\cos B.$$

**927.**

$$\sqrt{1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}=\sqrt{1+\frac{2}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha)=$$

$$=2\sin 45^\circ\cos(\alpha-45^\circ)=\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ).$$

**928.** Если воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

то выражение приобретет вид

$$(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}81^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}63^\circ)=$$

$$=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\cdot\cos 81^\circ}-\frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ\cos 63^\circ}=\frac{1}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{1}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}=$$

$$=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=2\,\frac{\sin 54^\circ-\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=4\,\frac{\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=4.$$

**929.** Воспользовавшись формулой

$$\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma},$$

получим

$$\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=\frac{5\cdot 8-1}{5+8}=3.$$

Так как $\operatorname{ctg}\alpha=3$, то

$$\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда

$$\beta+\gamma=\alpha.$$

Примечание. Из равенства $\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=\operatorname{ctg}\alpha$ следует, что $\beta+\gamma=\alpha+\pi k$, где $k$ — целое число или 0, но по условию $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; поэтому $0<\beta+\gamma<\pi$ и $k$ должно равняться 0.

**930.** 1-й способ решения. Воспользовавшись тождеством, которое легко доказать,

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha,$$

получим

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg}(60^\circ - 20^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 20^\circ) \operatorname{tg} 60^\circ =$$
$$= \operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ = 3.$$

Примечание. Приведем один из способов вывода следующих тригонометрических тождеств.

$$1.\quad 3 - 4\sin^2\alpha = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

С другой стороны,

$$3 - 4\sin^2\alpha = 3 - 2(1 - \cos 2\alpha) = 1 + 2\cos 2\alpha =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right) = 2(\cos 60^\circ + \cos 2\alpha) =$$
$$= 4\cos(30^\circ + \alpha)\cos(30^\circ - \alpha) = 4\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha).$$

Следовательно,

$$4\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha},$$

или

$$4\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha.$$

$$2.\quad 3 - 4\cos^2\alpha = \frac{3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}.$$

Но

$$3 - 4\cos^2\alpha = 3 - 2(1 + \cos 2\alpha) = 1 - 2\cos 2\alpha =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \cos 2\alpha\right) = 2(\cos 60^\circ - \cos 2\alpha) =$$
$$= -4\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha) = -4\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha).$$

Поэтому

$$4\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha},$$

или

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

3. Из доказанных двух тождеств следует третье

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

2-й способ решения.

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ} \operatorname{tg} 60^\circ =$$

$$= \frac{(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)\cos 10^\circ}{(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ)\sin 10^\circ} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right)\cos 10^\circ}{\left(\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\right)\sin 10^\circ} \operatorname{tg} 60^\circ =$$

$$= \frac{2\cos 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 10^\circ}{2\cos 20^\circ \sin 10^\circ + \sin 10^\circ} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 30^\circ - \sin 10^\circ + \sin 10^\circ} \operatorname{tg} 60^\circ =$$
$$= \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ = 3.$$

При решении примера вторым способом мы применили формулы преобразования произведения двух тригонометрических функций в алгебраическую сумму.

**931.** 1-й способ решения. Сгруппируем члены:

$$(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ) + (\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ).$$

Заменим сумму тангенсов:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\cos 30^\circ \cos 60^\circ} + \frac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{1}{\cos 30^\circ \cos 60^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{4\left(\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos 10^\circ} = \frac{4(\cos 10^\circ + \cos 30^\circ)}{\sqrt{3}\cos 10^\circ} = \frac{8\cos 20^\circ \cos 10^\circ}{\sqrt{3}\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}.$$

2-й способ решения.

$$\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin(30^\circ + 40^\circ)}{\cos 30^\circ \cos 40^\circ} + \frac{\sin(50^\circ + 60^\circ)}{\cos 50^\circ \cos 60^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 70^\circ}{\cos 30^\circ \cos 40^\circ} + \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ \sin 40^\circ} = \frac{4\sin 70^\circ (\sin 30^\circ \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cos 40^\circ)}{4\cos 30^\circ \sin 30^\circ \cos 40^\circ \sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 70^\circ \cos 10^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} = \frac{4\sin 70^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 80^\circ} = \frac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}.$$

**932.**

$$\cos 30^\circ + \cos 10^\circ - 2\cos 30^\circ + \sin 40^\circ = \cos 10^\circ - \cos 30^\circ +$$

$$+ \sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \sin 10^\circ + 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = 2\sin 20^\circ (\sin 10^\circ +$$

$$+ \sin 70^\circ) = 2\sin 20^\circ \, 2\sin 40^\circ \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\sin 20^\circ \sin 40^\circ.$$

**933.**

$$\frac{1}{2\sin 5^\circ}(2\sin 5^\circ \sin 10^\circ + 2\sin 5^\circ \sin 20^\circ + 2\sin 5^\circ \sin 30^\circ +$$

$$+ 2\sin 5^\circ \sin 40^\circ + 2\sin 5^\circ \sin 50^\circ) = \frac{1}{2\sin 5^\circ}(\cos 5^\circ - \cos 15^\circ +$$

$$+ \cos 15^\circ - \cos 25^\circ + \cos 25^\circ - \cos 35^\circ + \cos 35^\circ - \cos 45^\circ +$$

$$+ \cos 45^\circ - \cos 55^\circ) = \frac{1}{2\sin 5^\circ}(\cos 5^\circ - \cos 55^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2\sin 5^\circ} 2\sin 30^\circ \sin 25^\circ = \sin 25^\circ \sin 30^\circ \csc 5^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 25^\circ \csc 5^\circ.$$

**934.**

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \cos 79^\circ - \cos 65^\circ =$$
$$= 2\sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2\sin 18^\circ \cos 7^\circ = 2\cos 7^\circ (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) =$$
$$= 4\cos 7^\circ \cos 36^\circ \sin 18^\circ = 4\cos 7^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ.$$

**935.**

$$(\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 + 3\sin^2\cos^2\alpha =$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) +$$
$$+ 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha =$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$$

**936.** Достаточно показать, что

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} > 1.$$

**937.**

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\alpha)}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2\alpha}}} = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2\alpha}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

**938.** 1-й способ решения. Преобразуем правую часть тождества, используя формулу $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = 1 + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$:

$$\operatorname{ctg}30^\circ \operatorname{ctg}40^\circ = 1 + \operatorname{ctg}70^\circ(\operatorname{ctg}30^\circ + \operatorname{ctg}40^\circ) =$$
$$= 1 + \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}\cdot\frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ \sin 40^\circ} = 1 + \frac{\cos 70^\circ}{\frac{1}{2}\,2\sin 20^\circ\cos 20^\circ} =$$
$$= 1 + \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ\cos 20^\circ} = 1 + \sec 20^\circ.$$

2-й способ решения.

$$1 + \sec 20^\circ = \frac{\cos 20^\circ + 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ + 2\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2\sin 30^\circ\cos 10^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} =$$
$$= \frac{\cos 10^\circ + \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2\cos 40^\circ\cos 30^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} =$$
$$= \operatorname{ctg}30^\circ \operatorname{ctg}40^\circ.$$

**939.** Перепишем данное уравнение:

$$a\cos x - c = -b\sin x;$$

обе части возведем в квадрат:

$$a^2\cos^2 x - 2ac\cos x + c^2 = b^2\sin^2 x,$$

или

$$(a^2 + b^2)\cos^2 x - 2ac\cos x + c^2 - b^2 = 0.$$

Получим квадратное уравнение относительно $\cos x$. Так как по условию задачи значения $x = \alpha$ и $x = \beta$ преобразуют заданное уравнение в тождество, то очевидно, что корнями уравнения будут

$$\cos\alpha \quad \text{и} \quad \cos\beta.$$

На основании свойств корней приведенного квадратного уравнения можно заключить, что

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2ac}{a^2 + b^2}; \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Имеем

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} = (1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta) =$$

$$= 1 + (\cos\alpha + \cos\beta) + \cos\alpha\cos\beta = 1 + \frac{2ac}{a^2 + b^2} + \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{(a + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

**940.**

$$\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{2};$$

исходя из предыдущего примера,

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Для нахождения $\sin\alpha\sin\beta$ поступаем так: $b\sin x - c = -a\cos x$; после возведения в квадрат имеем

$$(a^2 + b^2)\sin^2 x - 2bc\sin x + c^2 - a^2 = 0,$$

откуда

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом,

$$\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right] = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

**941.** Задача решается аналогично предыдущим:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{1-\dfrac{c^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2-a^2}{a^2+b^2}}{1+\dfrac{c^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{c^2-a^2}{a^2+b^2}}=\frac{a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2-b^2-c^2+a^2}=\frac{b^2}{a^2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{b}{a}.$$

Вторую часть задачи доказать самостоятельно.

**942.**

$$\frac{\sin\vartheta+\sin\varphi}{\cos\vartheta+\cos\varphi}=\frac{b}{a};$$

$$\frac{2\sin\dfrac{\vartheta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\vartheta-\varphi}{2}}{2\cos\dfrac{\vartheta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\vartheta-\varphi}{2}}=\frac{b}{a},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta+\varphi}{2}=\frac{b}{a},$$

или

$$\cos(\vartheta+\varphi)=\frac{1-\dfrac{b^2}{a^2}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

$$\sin(\vartheta+\varphi)=\frac{2\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

так как были использованы формулы

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

**943.** Возведя оба данных уравнения в квадрат и сложив их, получим

$$1+2\cos\vartheta\cos\varphi+2\sin\vartheta\sin\varphi+1=a^2+b^2,$$

откуда

$$\cos(\vartheta-\varphi)=\frac{a^2+b^2-2}{2},$$

$$\sin(\vartheta-\varphi)=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-2}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(4-a^2-b^2)}.$$

**944.** Так как

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\beta+b\sin\beta,$$

то

$$a(\cos\alpha-\cos\beta)=b(\sin\beta-\sin\alpha);$$

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{b}{a}.$$

Но

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}.$$

Следовательно,

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

**945.**

$$\sqrt{b^2+c^2+2bc-2bc-2bc\cos\alpha}=\sqrt{(b+c)^2-2bc(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\sqrt{(b+c)^2-2bc\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=(b+c)\sqrt{1-\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=(b+c)\sqrt{1-\sin^2\varphi}=(b+c)\cos\varphi,$$

где

$$\varphi=\arcsin\frac{2\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Примечание. $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}=\frac{\sqrt{bc}}{\frac{b+c}{2}}\leqslant 1$, так как среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического; $\cos\frac{\alpha}{2}<1$. Поэтому $\frac{2\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}<1$.

**946.**

$$x = \frac{a\dfrac{\sin\alpha}{b\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta}{a\dfrac{\cos\alpha}{b\cos\beta} - 1}.$$

Обозначим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sin\alpha}{b\cos\beta},$$

тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\varphi,$$

а следовательно,

$$\frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\varphi\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$x = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\alpha - 1} = \frac{(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin(\varphi-\beta)\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)\cos\beta},$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a\sin\alpha}{b\cos\beta}\right).$$

**947.** $a^2 \geqslant 4b$, откуда

$$x = \frac{1}{2}\left(a + a\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right) = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{1-\cos\varphi}) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{a}{2}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sin 45° + \sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= a\sqrt{2}\cdot\sin\left(22°30' + \frac{\varphi}{4}\right)\cos\left(22°30' - \frac{\varphi}{4}\right),$$

где $\varphi = \arccos\dfrac{4b}{a^2}$ $\left(\dfrac{4b}{a} \leqslant 1\right.$, ибо в противном случае под квадратным радикалом было бы отрицательное число).

**948.**

$$x = 8\sin(45° - \alpha) + 15\sin(45° + \alpha) =$$

$$= 8\left\{\sin(45° - \alpha) + \frac{15}{8}\cos[90° - (45° + \alpha)]\right\} =$$

$$= 8\left[\sin(45° - \alpha) + \frac{15}{8}\cos(45° - \alpha)\right] =$$

$$= 8[\sin(45° - \alpha) + \operatorname{tg}\varphi\cos(45° - \alpha)] =$$

$$= \frac{8}{\cos\varphi}[\cos\varphi \sin(45^\circ - \alpha) + \sin\varphi \cos(45^\circ - \alpha)] =$$

$$= \frac{8}{\cos\varphi} \sin(45^\circ - \alpha + \varphi),$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{15}{8}$.

**949.**

$$\sqrt{\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}} + \sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} + \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\sec^2\frac{\varphi}{2}.$$

**950.**

$$x = \sqrt{\frac{7 \csc^2\alpha \sec^2\beta}{\sin^2\gamma} - 1} = \sqrt{\sec^2\varphi - 1} = \operatorname{tg}\varphi,$$

где

$$\varphi = \operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{7}\csc\alpha\sec\beta}{\sin\gamma}\right);$$

$$\left|\frac{\sqrt{7}\csc\alpha\sec\beta}{\sin\gamma}\right| > 1, \quad \sin\gamma \neq 0.$$

**951.**

$$x = \operatorname{ctg}^2 5\alpha - \operatorname{ctg}^2\varphi = (\operatorname{ctg} 5\alpha - \operatorname{ctg}\varphi)(\operatorname{ctg} 5\alpha + \operatorname{ctg}\varphi) =$$

$$= \frac{\sin(\varphi - 5\alpha)\sin(5\alpha + \varphi)}{\sin^2\varphi \sin^2 5\alpha},$$

где

$$\varphi = \operatorname{arcctg}(\sqrt{3}\sin\beta\sec\gamma).$$

**952.**

$$x = a\cos\alpha\sqrt{1 + \left(\frac{b\sin\beta}{a\cos\alpha}\right)^2} = a\cos\alpha\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} =$$

$$= a\cos\alpha\sec\varphi,$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b\sin\beta}{a\cos\alpha}\right)$.

**953.**

$$x = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - q},$$

причем $\left(\frac{P}{2}\right)^2 > q$.

$$x = -\frac{P}{2} \pm \frac{P}{2}\sqrt{1 - \frac{4q}{P^2}} = -\frac{P}{2}(1 \mp \sqrt{1 - \sin^2\varphi}) =$$

$$= -\frac{P}{2}(1 \mp \cos\varphi),$$

откуда

$$x_1 = -\frac{P}{2}(1 - \cos\varphi) = -P\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$x_2 = -\frac{P}{2}(1 + \cos\varphi) = -P\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

954. Очевидно, что допустимыми значениями для $x$ следует считать такие, при которых $\operatorname{tg}(45° + x)$ больше или равно нулю, но не больше 2 (максимальное значение правой части уравнения равно 2).

Применяя формулу для тангенса суммы, запишем данное выражение в виде

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$$

или

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 1 + \sin 2x.$$

Умножим числитель и знаменатель левой части на

$$\cos x - \sin x \neq 0,$$

тогда получим

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 1 + \sin 2x;$$

$$\cos^2 2x - \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x(\cos 2x - 1) = 0.$$

Имеем:

1. $\cos 2x = 0$, откуда $2x = 90° + 180°n$ и, следовательно, $x = 45° + 90°n$.

Здесь возможны два случая:

а) $n$ — четное число, т. е. $n = 2k$, тогда $x = 45° + 180°k$; в этом случае левая часть данного уравнения теряет смысл, а правая равна 2, следовательно, эти корни являются посторонними;

б) $n$ — нечетное число, т. е. $n = 2k + 1$, тогда $x = 45° + 90°(2k + 1) = 135° + 180°k$.

2. $\cos 2x = 1$, тогда $2x = 360°n$ и, следовательно, $x = 180°n$.

Итак, решение данного уравнения

$$x = 135° + 180°k*$$

или $x = 180°k$, где $k$ — любое целое число.

* В этом примере и во всех последующих $n$, $m$ и $k$ означают произвольные целые числа ($k$, $m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots$).

Примечание. Приведем еще способы решения этого примера.

Обратим внимание, что $\operatorname{tg}(45^\circ + x)$ не существует при $45^\circ + x = 90^\circ + 180^\circ n$, или при $x = 45^\circ + 180^\circ n$;

$$1)\ \operatorname{tg}(45^\circ + x) = 1 + \sin 2x;$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + x) = 1 - \cos(90^\circ + 2x);$$

$$\frac{\sin(45^\circ + x)}{\cos(45^\circ + x)} = 2\sin^2(45^\circ + x),$$

откуда

а) $\sin(45^\circ + x) = 0;\quad x + 45^\circ = 180^\circ n;\quad x = -45^\circ + 180^\circ n;$

б) $\dfrac{1}{\cos(45^\circ + x)} = 2\sin(45^\circ + x);\quad \cos 2x = 1;\quad 2x = 360^\circ k;\quad x = 180^\circ k;$

$$2)\ \operatorname{tg}(45^\circ + x) = 1 + \sin 2x;\quad \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = (\cos x + \sin x)^2.$$

Следовательно,

$$\cos x + \sin x = 0;\quad \operatorname{tg} x = -1;\quad x = -45^\circ + 180^\circ n;\quad \cos 2x = 1;$$
$$x = 180^\circ k.$$

**955.** Упростим левую часть уравнения:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 2\sin 2x\cos x + \sin 2x =$$
$$= \sin 2x(2\cos x + 1) = 2\sin x\cos x(2\cos x + 1).$$

Проведем упрощения в правой части уравнения:

$$1 + \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x = \cos x(2\cos x + 1).$$

Следовательно, данное уравнение можно записать в виде

$$2\sin x\cos x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1),$$

или

$$\cos x(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0.$$

Таким образом,

1) $\cos x = 0$, откуда

$$x = 90^\circ + 180^\circ n, \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n + 1);$$

2) $2\cos x + 1 = 0;\quad \cos x = -\dfrac{1}{2}$, откуда

$$x = 360^\circ n \pm 120^\circ \text{ или } x = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1);$$

3) $2\sin x - 1 = 0;\quad \sin x = \dfrac{1}{2}$, откуда

$$x = 180^\circ n + 30^\circ(-1)^n,$$

или

$$x = \pi n + \frac{\pi}{6}(-1)^n.$$

**956.** Очевидно, что $x \neq 45° + 180°n$. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg} x)}{1-\operatorname{tg} x} = 1,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$x = 180°n + \operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{2}).$$

**957.** Запишем данное уравнение в виде

$$\sin(x-\alpha) - [\sin(x-\beta) + \sin(\beta-\alpha)] = 0.$$

Применяя формулы для синуса двойного угла и суммы синусов, получим

$$2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2} - 2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x-2\beta+\alpha}{2} = 0;$$

$$\sin\frac{x-\alpha}{2}\left(\cos\frac{x-\alpha}{2} - \cos\frac{x-2\beta+\alpha}{2}\right) = 0.$$

Тогда

1) $\sin\frac{x-\alpha}{2} = 0$, откуда $\frac{x-\alpha}{2} = 180°n$ и, следовательно, $x = \alpha + 360°n$; $x = \alpha + 2\pi n$;

2) $\cos\frac{x-\alpha}{2} - \cos\frac{x-2\beta+\alpha}{2} = 0$, или

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{x-\beta}{2} = 0.$$

Принимая во внимание, что $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$,

найдем

$$\sin\frac{x-\beta}{2} = 0,$$

откуда

$$\frac{x-\beta}{2} = 180°n$$

и, следовательно,

$$x = \beta + 360°n; \quad x = \beta + 2\pi n.$$

Примечание. Можно применить формулы разности двух синусов для первых двух выражений, а для третьего — формулу синуса двойного аргумента.

**958.** Применяя формулу

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2},$$

получим

$$\sin(3x+3) - \sin(x+1) = \sin(7x+7) - \sin(x+1);$$

$$\sin(7x+7) = \sin(3x+3);$$

$$7x_{\text{I}} + 7 = 3x_{\text{I}} + 3 + 2\pi k;$$

$$7x_{\text{II}} + 7 = \pi - 3x_{\text{II}} - 3 + 2\pi k;$$

$$4x_{\text{I}} = 2\pi k - 4;$$

$$10x_{\text{II}} = 2\pi k + \pi - 10;$$

$$x_{\text{I}} = \frac{\pi k}{2} - 1;$$

$$x_{\text{II}} = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{10} - 1 = \frac{\pi}{10}(2k+1) - 1.$$

Но первый ответ можно представить в виде $x_{\text{I}} = \frac{\pi}{10} 5k - 1$. Если $k$ число нечетное, то все значения $x_{\text{I}}$ входят в $x_{\text{II}}$, поэтому их необходимо исключить из первого ответа, оставив там лишь четные значения $k$, а именно: $k = 2m$. Следовательно, окончательно имеем

$$x_{\text{I}} = \pi m - 1;$$

$$x_{\text{II}} = \frac{\pi}{10}(2k+1) - 1^{*}.$$

**959.** 1-й способ решения. Преобразуем уравнение так:

$$\left(\frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos\frac{2x}{3}}{2}\right)^2 = \frac{5}{8};$$

$$1 - 2\cos\frac{2x}{3} + \cos^2\frac{2x}{3} + 1 + 2\cos\frac{2x}{3} + \cos^2\frac{2x}{3} = \frac{5}{2};$$

$$2 + 2\cos^2\frac{2x}{3} = \frac{5}{2};$$

$$\cos^2\frac{2x}{3} = \frac{1}{4},$$

откуда или

$$\cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{2x}{3} = 360°n \pm 60°; \quad x = 540°n \pm 90°,$$

или

$$\cos\frac{2x}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{2x}{3} = 360°n \pm 120°; \quad x = 540°n \pm 180°.$$

---

* В этом примере слагаемое «1» означает один радиан.

2-й способ решения.

$$\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8};$$

$$\sin^4\frac{x}{3}+2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}-2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}=\frac{5}{8};$$

$$\left(\sin^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{2x}{3}=\frac{5}{8};$$

$$1-\frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{4x}{3}\right)=\frac{5}{8};$$

$$\cos\frac{4x}{3}=-\frac{1}{2},$$

откуда

$$\frac{4x}{3}=\pm 120^\circ+360^\circ n.$$

*Отв.* $x=\pm 90^\circ+270^\circ n.$

**960.** Очевидно, что $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$ из области допустимых значений неизвестного следует исключить.

Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{2\cos x-\sin x}{\cos x};$$

$$2\sin x\cos x+2\cos x=1+\sin x;$$

$$2\cos x(\sin x+1)=1+\sin x,$$

или

$$(\sin x+1)(2\cos x-1)=0,$$

откуда, принимая во внимание, что $\sin x+1\neq 0$, получим

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$x=360^\circ n\pm 60^\circ=60^\circ(6n\pm 1);\quad x=\frac{\pi}{3}(6n\pm 1).$$

**961.** Очевидно, что уравнение могут удовлетворять только такие значения неизвестного $x$, при которых

$$|\operatorname{tg}3x|\leqslant 1. \qquad (1)$$

Имеем

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x}-2\sin 3x\cos 3x=0$$

или по условию (1)

$$\sin 3x(1-2\cos^2 3x)=0,$$

откуда находим

1) $\sin 3x = 0$, следовательно, $x = \frac{\pi n}{3}$;

2) $\cos 6x = 0$, следовательно, $x = \frac{\pi}{12}(2n + 1)$.

**962.** Очевидно, что $\cos x \neq 0$ (при $\cos x = 0$ правая часть уравнения теряет смысл). Тогда

$$2^{2\sin x} = 2^{\frac{1}{\cos x}};$$

$$2\sin x = \frac{1}{\cos x},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4}(4n + 1).$$

**963.**

$$\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{2}\cos^3\left(2x - \frac{\pi}{4}\right);$$

тогда

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos^3\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

или

$$\cos^3\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда

$$1)\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$2)\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1.$$

Учитывая, что $\cos\alpha$ принимает значения 1, 0 и $-1$, когда $\alpha$ кратно $\frac{\pi}{2}$, общее решение уравнения можно записать в виде

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}n, \text{ или } x = \frac{\pi}{8}(2n + 1).$$

**964.** 1-й способ решения. Запишем данное уравнение в виде

$$\cos 2x = \cos x\cos 45° + \sin x\sin 45°;$$

$$\cos 2x - \cos(x - 45°) = 0.$$

Тогда

$$\sin\frac{3x - 45°}{2}\sin\frac{x + 45°}{2} = 0,$$

откуда

1) $\sin\frac{3x-45^\circ}{2}=0$ и, следовательно, $\frac{3x-45^\circ}{2}=180^\circ n$; $x=$ $=15^\circ+120^\circ n$; $x=\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{12}$;

2) $\sin\frac{x+45^\circ}{2}=0$ и, следовательно, $\frac{x+45^\circ}{2}=180^\circ n$; $x=-$ $-45^\circ+360^\circ n$.

Таким образом, $x_1=\frac{\pi}{12}(8n+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(8n-1)$.

2-й способ решения.

$$\cos 2x=\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2}};$$

$$\cos 2x=\frac{\cos x+\cos(90^\circ-x)}{\sqrt{2}};$$

$$\cos 2x=\cos(45^\circ-x);$$

$$2x_{\text{I}}=45^\circ-x_{\text{I}}+360^\circ n;$$

$$2x_{\text{II}}=-45^\circ+x_{\text{II}}+360^\circ n.$$

$$x_{\text{I}}=15^\circ+120^\circ n;$$

$$x_{\text{II}}=-45^\circ+360^\circ n.$$

**965.**

$$2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\left(\cos\frac{x}{2}\cos 45^\circ+\sin\frac{x}{2}\sin 45^\circ\right);$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right);$$

$$\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0,$$

откуда

1) $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно $x=4\pi n\pm\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0$; $1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$ $\left(\text{так как } \cos\frac{x}{2}\neq 0\right)$, и, следовательно

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n-1); \quad x=90^\circ(4n-1).$$

Примечание. Можно также свести левую часть уравнения к виду, удобному для логарифмирования, а затем уже легко решить уравнение.

**966.** 1-й способ решения. Если уравнение имеет корень, то $x \neq \frac{\pi}{2} n$.

Исключив значение $x = \frac{\pi}{2} n$ из области допустимых значений неизвестного, запишем данное уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x;$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \cos x (\sin x + \cos x);$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \sin x \cos x (\sin x + \cos x);$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - \sin x \cos x) = 0,$$

откуда

1) $\cos x + \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = -1$, т. е. $x = -45° + 180° n$, или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$;

2) $\cos x - \sin x = \sin x \cos x$.

Возведем правую и левую части этого равенства в квадрат:

$$1 - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x \cos^2 x;$$

$$\sin^2 2x + 4 \sin 2x - 4 = 0,$$

откуда $\sin 2x = -2 + \sqrt{8}$ (решение $|-2 - \sqrt{8}| > 1$ отбрасываем);

$$2x = \pi n + (-1)^n \arcsin(-2 + \sqrt{8}),$$

т. е.

$$x = \frac{\pi}{2} n + \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin(-2 + \sqrt{8}).$$

Так как возведение правой и левой частей уравнения в квадрат могло привести к нарушению эквивалентности, то полученные решения необходимо проверить.

2-й способ решения.

$$\cos x - \sin x = \sin x \cos x;$$

$$1 + 2(\sin x - \cos x) = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x;$$

$$1 + 2(\sin x - \cos x) = (\sin x - \cos x)^2;$$

$$(\sin x - \cos x)^2 - 2(\sin x - \cos x) - 1 = 0$$

(имеем квадратное уравнение относительно $\sin x - \cos x$).

Следовательно,

$$\sin x - \cos x = 1 - \sqrt{2};$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2};$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-1;$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2});$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pi n+(-1)^{n+1}\arcsin\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)\right];$$

$$x=\pi n+(-1)^{n+1}\arcsin\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)\right]+\frac{\pi}{4}.$$

**967.** 1-й способ решения. Воспользовавшись формулой для косинуса двойного угла и заменив $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$, получим уравнение

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0,$$

откуда

$$1)\ \sin x=\frac{1}{2},\ \text{или}\quad x=\frac{\pi}{6}(-1)^n+\pi n;$$

$$2)\ \sin x=-1,\quad \text{или}\quad x=2\pi n-\frac{\pi}{2}.$$

2-й способ решения.

$$\sin x=\cos 2x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 2x,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2}-x_1=2x_1+2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{2}-x_2=-2x_2+2\pi n,$$

поэтому

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k, \tag{1}$$

$$x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi n. \tag{2}$$

Но если взять $k=3n-1$, то из уравнения (1) получим

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}(3n-1)=\frac{\pi}{6}+2\pi n-\frac{2}{3}\pi=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

т. е. уравнение (2). Таким образом, ответ (2) входит в ответ (1), и окончательно

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k.$$

Докажем тождество ответов, полученных при решении примера первым и вторым способами.

При $k = 3n$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \cdot 3n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;$$

при $k = 3n + 1$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}(3n + 1) = \frac{\pi}{6} + 2\pi n + \frac{2}{3}\pi =$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi + 2\pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1);$$

при $k = 3n - 1$ см. выше значения $x_2$ из уравнения (2).

Следовательно,

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k.$$

**968.** Считая исключенными из множества допустимых значений неизвестного $x$ значения $x = \pi n$, при которых данное уравнение теряет смысл, получим

$$\frac{1}{\sin x} - \sin x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

или, умножая левую и правую части на $2\sin x \neq 0$,

$$2\cos^2 x - \cos x = 0;$$

$$\cos x(2\cos x - 1) = 0,$$

откуда

1) $\cos x = 0$ и, следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$.

Окончательно

$$x_1 = \frac{\pi}{2}(2n + 1); \quad x_2 = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1).$$

**969.** Очевидно, что $x \neq \frac{\pi}{2} n$. Имеем

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{3}\sin 2x,$$

или

$$-\cos 2x = \frac{2}{3}\sin^2 2x.$$

Заменяя $\sin^2 2x$ через $1 - \cos^2 2x$, получим уравнение

$$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0,$$

откуда $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, и тогда

$$2x = 360°n \pm 120°;$$

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1).$$

**970.** Прежде всего заметим, что $\operatorname{tg} x \neq 1$. Применяя формулу для тангенса суммы, получим

$$\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} x} = 2,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$x = 180°n + \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}).$$

**971.**

$$\cos 2x - \cos x = \sin x - \sin 2x;$$

$$\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2};$$

$$\sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) = 0;$$

$$\sin \frac{x}{2} \sin \left( \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

откуда

1) $\sin \frac{x}{2} = 0$ и, следовательно, $\frac{x}{2} = \pi n$, $x = 2\pi n$;

2) $\sin \left( \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$, и, следовательно, $\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n$,

$$x = \frac{\pi}{6}(4n + 1).$$

Примечание. Уравнение $\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = 0$ можно решить как однородное.

Поделив левую и правую части на $\cos \frac{3}{2} x \neq 0$, получим

$$\operatorname{tg} \frac{3}{2} x = 1, \quad \text{или} \quad \frac{3}{2} x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{6}(4n + 1).$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\pi}{6}(4n + 1);$$

$$x_2 = 2\pi n.$$

**972.**

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{9}{8}.$$

Применяя формулу $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, получим

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)}{2}\right]^2 + \left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2}\right]^2 = \frac{9}{8};$$

$$(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = \frac{9}{2};$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x +$$

$$+ 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x = \frac{9}{2};$$

$$4 - 2\cos 2x + \sin^2 2x = \frac{9}{2};$$

$$-2\cos 2x + 1 - \cos^2 2x = \frac{1}{2};$$

$$\cos^2 2x + 2\cos 2x - \frac{1}{2} = 0,$$

откуда

1) $\cos 2x = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$ (решений нет);

2) $\cos 2x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$; $\quad 2x = 2k\pi \pm \arccos\frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$.

Таким образом,

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{-2 + \sqrt{6}}{2}.$$

**973.**

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16};$$

$$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \frac{7}{16};$$

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{7}{16};$$

$$1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x + 1 + 3\cos 2x +$$

$$+ 3\cos^2 2x + \cos^3 2x = \frac{7}{2};$$

$$2\cos^2 2x = \frac{1}{2};$$

$$1 + \cos 4x = \frac{1}{2};$$

$$\cos 4x = -\frac{1}{2},$$

откуда

$$4x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}.$$

**974.**

$$3\operatorname{tg}^4 x + 4\operatorname{tg}^3 x - 6\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Поделим обе части уравнения на $\operatorname{tg}^2 x \neq 0$ и сгруппируем:

$$3\operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\operatorname{tg}^2 x} + 4\operatorname{tg} x - \frac{4}{\operatorname{tg} x} - 6 = 0;$$

$$3\left(\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right) + 4\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) - 6 = 0.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = u$, тогда $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = u^2 + 2$.

Получим

$$3(u^2 + 2) + 4u - 6 = 0;$$

$$3u^2 + 4u = 0,$$

откуда

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\frac{4}{3}.$$

Следовательно,

1) $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$; $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = \pm 1$, $x = \pm 45° + 180°n$;

2) $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{4}{3}$,

или

$$3\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Решая полученное уравнение, найдем

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+9}}{3};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Отсюда

$$x_{2,3} = -\operatorname{arctg} \frac{\mp \sqrt{13} - 2}{3} + 180°n.$$

**975.**

$$3 \sin x = 2 \cos^2 x.$$

Представим данное уравнение в виде

$$3 \sin x = 2 (1 - \sin^2 x),$$

или

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0,$$

откуда

$$\sin x = -2 \text{ (решения нет)}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$x = k\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

**976.**

$$\sin (\pi \cos x) - \cos (\pi \sin x) = 0.$$

Представим данное уравнение в виде

$$\sin (\pi \cos x) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \pi \sin x \right),$$

откуда

$$\pi \cos x + \frac{\pi}{2} - \pi \sin x = (2k + 1) \pi,$$

или

$$\pi \cos x - \frac{\pi}{2} + \pi \sin x = 2k\pi.$$

После соответствующих преобразований найдем

1) $\cos x - \sin x = 2k + \frac{1}{2}$; $\sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 2k + \frac{1}{2}$;

$\cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$;

2) $\cos x + \sin x = 2k + \frac{1}{2}$; $\sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 2k + \frac{1}{2}$;

$\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$.

Но

$$\left|\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}\right| \leqslant 1 \text{ при } k=0,$$

следовательно,

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ и } \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

откуда

$$x_1 = 2m\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}$$

и

$$x_2 = 2m\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

**977.**

$$(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

Представим данное уравнение в виде

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2 - \frac{1}{4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{5}{4} = 0,$$

или

$$4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0,$$

откуда

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = -1;$$

$$x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

Второе решение $x=\frac{5}{4}$ квадратного уравнения $4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$ не рассматриваем, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$.

**978.**

$$\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2.$$

Представим левую часть данного уравнения так:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)} = \frac{1+\cos x}{\sin x\,(1+\cos x)}.$$

Принимая во внимание, что $1+\cos x \neq 0$, сокращаем дробь на $1+\cos x$:

$$\frac{1}{\sin x} = 2, \text{ или } \sin x = \frac{1}{2},$$

откуда

$$x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

Примечание. При сокращении дроби мы приняли во внимание, что $1+\cos x \neq 0$, и если бы мы получили решение, для которого $\cos x = -1$, то оно не удовлетворяло бы условию.

При $\sin x = \frac{1}{2}$ величина $\cos x \neq -1$, что очевидно.

**979.**

$$\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sec x - \cos x}{2\sin x}.$$

Представим правую часть данного уравнения в виде

$$\frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{2\sin x} = \frac{1-\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x}.$$

Сократим дробь на $\sin x$. При этом предполагается, что $\sin x \neq 0$. Так что если будет получено такое решение, для которого $\sin x = 0$, то его нужно отбросить. Данное уравнение после применения к левой его части формул приведения примет вид

$$\sin x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x;$$

$$\sin x + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x = 0,$$

или

$$\sin x\left(1 + \frac{1}{2\cos x}\right) = 0,$$

откуда

$$1)\ \sin x = 0;$$

$$2)\ 1 + \frac{1}{2\cos x} = 0.$$

Первое уравнение, как уже было сказано выше, дает посторонние решения.

Таким образом,

$$x = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1).$$

**980.**

$$\sec x + \csc x = 2\sqrt{2};$$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2};$$

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x;$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\sin 2x;$$

$$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0.$$

или

$$2\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0,$$

откуда

$$1)\ \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2}x\right)=0;\ \frac{3}{2}x+\frac{\pi}{8}=\frac{2k+1}{2}\pi;$$

$$\frac{3}{2}x=\frac{8k+3}{8}\pi,\ \text{следовательно,}\ x_1=\frac{8k+3}{12}\pi;$$

$$2)\ \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0;\quad \frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}=k\pi;$$

$$\frac{x}{2}=\frac{8k+1}{8}\pi,\ \text{следовательно,}\ x_2=\frac{8k+1}{4}\pi.$$

Но при $k=3n$ $x_1=\frac{8n+1}{4}\pi=x_2$, поэтому все решения данного уравнения содержатся в $x=\frac{8k+3}{12}\pi$.

**981.**

$$\operatorname{tg}\frac{3}{5}x\operatorname{ctg}\frac{5}{3}x=1-\sec\frac{3}{5}x\csc\frac{5}{3}x;$$

$$\frac{\sin\frac{3}{5}x\cos\frac{5}{3}x}{\cos\frac{3}{5}x\sin\frac{5}{3}x}=1-\frac{1}{\cos\frac{3}{5}x\sin\frac{5}{3}x};$$

$$\cos\frac{3}{5}x\sin\frac{5}{3}x-\sin\frac{3}{5}x\cos\frac{5}{3}x=1;$$

$$\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{3}{5}x\right)=1,$$

откуда

$$\sin\frac{16}{15}x=1;\quad \frac{16}{15}x=2k\pi+\frac{\pi}{2};\quad \frac{16}{15}x=\frac{4k+1}{2}\pi.$$

Следовательно,

$$x=\frac{15}{32}(4k+1)\pi.$$

**982.**

$$\sin x+\cos x\sin 2x=1;$$

$$2\sin x+2\cos x\sin 2x=2;$$

$$2\sin x+\sin 3x+\sin x=2;$$

$$3\sin x+\sin 3x=2.$$

Сделав подстановку $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, получим

$$3\sin x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 2;$$

$$6\sin x - 4\sin^3 x = 2;$$

$$2\sin^3 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$2\sin^3 x - 2\sin x - \sin x + 1 = 0;$$

$$2\sin x(\sin^2 x - 1) - (\sin x - 1) = 0;$$

$$(\sin x - 1)[2\sin x(\sin x + 1) - 1] = 0.$$

Отсюда

$$1)\ \sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$2)\ 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение, найдем

$$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{1+2}}{2}$$

или $\sin x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (второй корень по абсолютной величине превышает 1). Следовательно,

$$x_2 = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \pi n.$$

**983.**

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Представим данное уравнение в виде

$$2\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 2x \cos 2x;$$

$$\sin 2x(2\sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$2\sin x \sin 3x = \cos 2x - \cos 4x,$$

находим

$$\sin 2x \cos 4x = 0,$$

откуда

$$\sin 2x = 0; \quad \cos 4x = 0$$

Таким образом,

$$x = k\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{8}.$$

**984.**

$$1 - \frac{2(\sin 2x - \cos 2x \operatorname{tg} x)}{\sqrt{3}\sec^2 x} = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

Представим дробь левой части данного уравнения в виде

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x - \cos 2x \operatorname{tg} x)\cos^2 x =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x)\cos x =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x.$$

Правую часть данного равенства представим так:

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Тогда исходное уравнение будет

$$(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = 0,$$

или

$$2 \sin^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$x = 180°n; \quad x = 180°n + 30°.$$

**985.**

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

$$(\sin x + \sin 3x) - (\cos x + \cos 3x) + (\sin 2x - \cos 2x) = 0;$$

$$2 \sin 2x \cos x - 2 \cos 2x \cos x + (\sin 2x - \cos 2x) = 0;$$

$$(2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0,$$

откуда следует

1) $2 \cos x + 1 = 0; \quad \cos x = -\frac{1}{2}; \quad x = \pi n \pm \frac{2}{3}\pi;$

2) $\sin 2x - \cos 2x = 0.$

Разделив последнее уравнение почленно на $\cos 2x \neq 0$, получим

$$\operatorname{tg} 2x = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{8}(4n + 1).$$

Примечание. Можно также группировать следующим образом:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x;$$

$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x - (2 \cos 2x \cos x + \cos 2x) = 0;$$

$$\sin 2x (2 \cos x + 1) - \cos 2x (2 \cos x + 1) = 0;$$

$$(\sin 2x - \cos 2x)(2 \cos x + 1) = 0.$$

Далее, как выше.

986.

$$\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x;$$

$$\cos 7x + \cos x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0;$$

$$2\cos 4x \cos 3x - \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x (2\cos 3x - 1) = 0.$$

Из полученного уравнения следует

1) $\cos 4x = 0$; $4x = \frac{2n+1}{2}\pi$, откуда $x = \frac{2n+1}{8}\pi$;

2) $2\cos 3x - 1 = 0$; $\cos 3x = \frac{1}{2}$; $3x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, откуда $x = \frac{2}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{9}$.

987.

$$\sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x \sin x;$$

$$\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}.$$

После соответствующих преобразований получим

$$\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}.$$

или

$$\frac{1}{2}\sin 2x (-\cos 2x) = \frac{1}{4},$$

или

$$-\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{4};$$

$$\sin 4x = -1,$$

откуда

$$4x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ или } 4x = \frac{4n-1}{2}\pi.$$

Следовательно,

$$x = \frac{4n-1}{8}\pi.$$

988.

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

Представим данное уравнение в виде

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x};$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2}{\cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x};$$

$$\frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1)}{\cos x} = 0;$$

$$\frac{(\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1)}{\cos x} = 0,$$

или

$$(1 + \operatorname{tg} x)(\cos 2x - 1) = 0.$$

Отсюда следует

1) $1 + \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = -1; \quad x = \frac{4n-1}{4}\pi;$

2) $\cos 2x - 1 = 0; \quad \cos 2x = 1; \quad 2x = 2n\pi; \quad x = n\pi.$

**989.** Так как синус любого угла не превышает единицы, то уравнение $\sin x + \sin 5x = 2$ возможно лишь в том случае, когда

$$\sin x = 1 \quad \text{и} \quad \sin 5x = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}.$$

Из множества значений $x$ как в первом, так и во втором равенстве нужно выбрать равные между собой значения, если они существуют, т. е.

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5};$$

$$\frac{2}{5} = 2\left(\frac{n}{5} - k\right)$$

или

$$n = 5k + 1.$$

Таким образом, давая $n$ значения $5k + 1$, получим множество значений $x$, удовлетворяющих первому равенству. Следовательно,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

**990.**

$$3 \sin x = 2(1 - \cos x).$$

$$3 \sin x = 4 \sin^2 \frac{x}{2};$$

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 4 \sin^2 \frac{x}{2};$$

$$\sin \frac{x}{2}\left(3 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Отсюда следует

1) $\sin \frac{x}{2} = 0; \quad x = 2n\pi;$

2) $3 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} = 0, \quad x = 2n\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{2}.$

**991.**

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2};$$

$$\cos 2x - \cos 4x - 1 = 0;$$

$$\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0;$$

$$\cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

1) $\cos 2x = 0$, откуда

$$2x = \frac{2n+1}{2}\pi; \quad x = \frac{2n+1}{4}\pi;$$

2) $1 - 2\cos 2x = 0; \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$, откуда

$$2x = \frac{6n \pm 1}{3}\pi; \quad x = \frac{6n \pm 1}{6}\pi.$$

**992.**

$$\operatorname{tg}(x + 30°)\operatorname{tg}(x - 60°) = 1.$$

Преобразовывая данное уравнение, находим, что

$$\operatorname{tg}(x + 30°)\operatorname{tg}(x - 60°) = \operatorname{ctg}[90° - (x + 30°)]\operatorname{tg}(x - 60°) = \operatorname{ctg}(60° - x)\operatorname{tg}(x - 60°).$$

Левая часть уравнения при всех допустимых значениях $x$ должна равняться $-1$, следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

**993.**

$$\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x.$$

Сделаем преобразования

$$\cos(x + 60°) = \cos[90° - (30° - x)] = \sin(30° - x)$$

и

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$\sin(x + 30°) + \sin(30° - x) = 2\cos^2 x.$$

Воспользуемся формулой суммы синусов:

$$\sin 30° \cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 0.$$

Отсюда следует

1) $\cos x = 0; \quad x = 90°(2n + 1);$

2) $\frac{1}{2} - \cos x = 0; \quad x = 60°(6n \pm 1).$

**994.**

$$\sin\left(45^\circ + \frac{3}{2}x\right) = 3\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

Преобразовываем левую часть уравнения:

$$\sin\left(45^\circ + \frac{3}{2}x\right) = \sin\left[180^\circ - \left(45^\circ + \frac{3}{2}x\right)\right] = \sin 3\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

Применяя формулу синуса тройного угла ($\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$), запишем данное уравнение в виде

$$\sin^3\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = 0,$$

т. е.

$$45^\circ - \frac{x}{2} = 180^\circ n,$$

или

$$x = 90^\circ(4k + 1), \text{ где } k = -n.$$

**995.**

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2};$$

$$4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{2};$$

$$4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + \sin^2 x = \frac{3}{2};$$

$$4\sin^2 x - 4\sin^4 x + \sin^2 x = \frac{3}{2};$$

$$4\sin^4 x - 5\sin^2 x + \frac{3}{2} = 0$$

или

$$8\sin^4 x - 10\sin^2 x + 3 = 0.$$

Пусть $\sin^2 x = y$, тогда

$$8y^2 - 10y + 3 = 0;$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{8} = \frac{5 \pm 1}{8}; \quad y_1 = \frac{3}{4}; \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Теперь находим

1) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$; $\sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm 60^\circ (-1)^m + 180^\circ n = 180^\circ n \pm 60^\circ$;

2) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \pm 45° + 180°n$.

Примечание. Данное уравнение можно решить и другим путем.

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2};$$

$$2(1 - \cos^2 2x) + 1 - \cos 2x = 3;$$

$$2\cos^2 2x + \cos 2x = 0,$$

откуда

1) $\cos 2x = 0$;

2) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Из первого уравнения получаем

$$2x = 90° + 180°m;$$

$$x = 45° + 90°m.$$

Из второго уравнения получаем

$$2x = \pm 120° + 360°n;$$

$$x = \pm 60° + 180°n.$$

Ответы $x = 45° + 90°m$ и $x = \pm 45° + 180°n$ равнозначны. Действительно, из второго ответа находим

$$x_1 = 45° + 90° \cdot 2n;$$

$$x_2 = -45° + 90° \cdot 2n = 45° + 90°(2n - 1).$$

В обоих случаях к 45° необходимо прибавить 90°, умноженные на произвольное целое число (или нуль), которое мы обозначили через $m$.

**996.**

$$\operatorname{tg} 7x + \operatorname{tg} 3x = 0;$$

$$\frac{\sin 10x}{\cos 7x \cos 3x} = 0,$$

откуда при условии $\cos 7x \neq 0$ и $\cos 3x \neq 0$ следует, что

$$\sin 10x = 0; \quad 10x = \pi n; \quad x = \frac{\pi}{10} n.$$

Так как $\cos 7x \neq 0$, то

$$7x \neq \pi m + \frac{\pi}{2};$$

$$7x \neq \frac{\pi}{10}(10m + 5) = \frac{\pi}{10} 5(2m + 1);$$

$$x \neq \frac{\pi}{10} \quad \frac{5(2m + 1)}{7}.$$

Точно так же $\cos 3x \neq 0$, т. е. $3x \neq \pi l + \frac{\pi}{2}$, где $l$ — целое число или 0.

$$x \neq \frac{\pi}{10} \cdot \frac{5(2l+1)}{3}.$$

Таким образом,

$$x = \frac{\pi}{10} n,$$

где $n$ — любое целое число или нуль, кроме нечетных чисел, кратных 5, т. е. $5(2k+1)$, и делящихся на 7 или 3.

**997.**

$$\sec x + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x \operatorname{tg} \frac{\pi + x}{2};$$

$$\frac{1}{\cos x} + 1 = \sin x + \cos x \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$$

$$\frac{1 + \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x \sin \frac{x}{2} + \cos x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$\frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \cos x \cos \frac{x}{2} = 0$$

или

$$\cos \frac{x}{2} (\sin x - \cos x) = 0.$$

Отсюда

1) $\cos \frac{x}{2} = 0; \quad \frac{x}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2}; \quad x = 2\pi n + \pi;$

2) $\sin x - \cos x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x = \pi n + \frac{\pi}{4}.$

При этих значениях $x$

$$\cos x \neq 0 \text{ и } \operatorname{tg} \frac{x}{2} \neq 0.$$

**998.**

$$2\cos^2 x + \cos 5x - 1 = 0.$$

После подстановки в исходное уравнение $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ получим

$$\cos 2x + \cos 5x = 0;$$

$$2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0,$$

откуда

1) $\cos\frac{7x}{2} = 0;\quad \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi;\quad x = \frac{\pi}{7}(1 + 2n);$

2) $\cos\frac{3x}{2} = 0;\quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi;\quad x = \frac{\pi}{3}(1 + 2n),$

где $1 + 2n$ не кратное 3, так как в этом случае значения $x$, входящие во второй ответ, будут входить и в первый.

**999.** Указание. Преобразования приводят к уравнению

$$(1 - \sin x)^5 = 0.$$

*Ответ.* $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$, или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

**1000.** Указание. Преобразования приводят к уравнению

$$\sin^3 2x + 3\sin^2 2x - 4 = 0,$$

левую часть которого следует разложить на множители.

*Ответ.* $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$.

**1001.** Указание. Составить уравнение $\frac{\pi}{2} - x = 2n\pi \pm \frac{1}{x}$.

*Ответ.* $x = \frac{-\pi(4n-1) \pm \sqrt{\pi^2(4n-1)^2 \pm 16}}{4}$; при $n = 0$ следует взять под корнем только знак «+».

**1002.**

$$\sin x + \cos x < \sqrt{2};$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$$

Неравенство выполняется при всех значениях $x$, кроме

$$x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

или

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

При этих значениях неравенство обращается в равенство

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

**1003.**

$$\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x;$$

$$\sin 2x \cos x < \sin 3x \cos x;$$

$$\cos x (\sin 2x - \sin 3x) < 0;$$

$$\cos x \cos \frac{5}{2} x \sin \frac{x}{2} > 0.$$

Рассмотрим первый случай решения полученного неравенства:

$$\cos x > 0; \quad \cos \frac{5}{2} x > 0; \quad \sin \frac{x}{2} > 0.$$

Из последних неравенств при $x$, $\frac{5}{2}x$ и $\frac{x}{2}$, не превышающих по абсолютной величине $2\pi$,

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{\pi}{5} < x < \frac{\pi}{5}; \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Отсюда

$$0 < x < \frac{\pi}{5},$$

следовательно, для множества всех допустимых значений $x$

$$2\pi k < x < 2\pi k + \frac{\pi}{5}.$$

Остальные три возможных случая решения полученного неравенства предлагаем рассмотреть читателю.

**1004.** Заметим, прежде всего, что $\sin y \neq 0$; $\cos y \neq 0$; $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$ и $x \neq y$.

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \sin y; \\ \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos y. \end{cases}$$

Возведем левые и правые части этих уравнений в квадрат и сложим:

$$2(1 - \cos^2 y) + \frac{2}{3} \cos^2 y = 1;$$

$$\cos^2 y = \frac{3}{4},$$

откуда

$$\cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$y = 180°n \pm 30°.$$

Подставляя во второе уравнение системы $\cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, получим

т. е.
$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x = 180°n \pm 45°.$$

Принимая во внимание, что в результате возведения в квадрат левой и правой частей уравнений данной системы могла быть нарушена эквивалентность, полученные решения необходимо проверить.

Сделав указанную проверку, делаем вывод, что систему удовлетворяют найденные решения

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{4} \text{ и } y = \pi n \pm \frac{\pi}{6}.$$

**1005.** Применив формулу $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, запишем второе уравнение следующим образом:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = m.$$

Заменив $\cos x \cos y$ на $\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$ и $x+y$ на $\alpha$, получим

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(x-y)} = m;$$

$$\cos(x-y) = \frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha.$$

Отсюда следуют уравнения

1) $x - y = 2\pi n + \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right)$;

2) $x - y = 2\pi n - \arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right)$.

Присоединяя к каждому из них уравнение $x + y = \alpha$, получим две системы уравнений, решениями которых будут

$$x_1 = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right);$$

$$y_1 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right);$$

$$x_2 = \pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right);$$

$$y_2 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha\right),$$

где

$$\left|\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right|\leqslant 1.$$

**1006.** Преобразуем второе уравнение следующим образом:

$$\frac{\cos y}{1}=\frac{\cos x-n}{1-n\cos x};\quad (n\neq 1);$$

$$\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=\frac{(1+n)(1-\cos x)}{(1-n)(1+\cos x)};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=\frac{1+n}{1-n}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+n}{1-n}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{m}{2n}(n-1\pm\sqrt{1-n^2});$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{m}{2n}(n+1\mp\sqrt{1-n^2}).$$

Таким образом,

$$x=2\left[k\pi+\operatorname{arctg}\frac{m}{2n}(n-1\pm\sqrt{1-n^2})\right];$$

$$y=2\left[k\pi+\operatorname{arctg}\frac{m}{2n}\left(n+1\mp\sqrt{1-n^2}\right)\right].$$

**1007.**

$$\begin{cases}\cos\pi x\cdot\cos\pi y=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\\ x+y=\dfrac{1}{4};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\pi x\cdot\cos\pi y=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\\ \pi x+\pi y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Из второго уравнения системы получим

$$\cos(\pi x+\pi y)=\cos\frac{\pi}{4};$$

$$\cos\pi x\cdot\cos\pi y-\sin\pi x\sin\pi y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

или, принимая во внимание первое уравнение,

$$\sin \pi x \cdot \sin \pi y = 0.$$

Поэтому

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0; \\ x + y = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \pi y = 0; \\ x + y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решим полученные системы.

$$\begin{cases} \pi x = \pi k; \\ x + y = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

откуда $x = k$, $y = \frac{1}{4} - k$.

Аналогично

$$\begin{cases} \pi y = \pi m; \\ x + y = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad y = m, \quad x = \frac{1}{4} - m.$$

**1008.** Возведя обе части первого равенства в квадрат, получим

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = x^2; \quad |x| \leqslant 2, \ |y| \leqslant 2,$$

откуда

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Возведя обе части того же равенства в куб, получим

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) = x^3;$$

принимая во внимание второе из данных равенств, находим

$$y + \frac{3(x^2 - 1)}{2} x = x^3;$$

$$3x - 2y = x^3.$$

**1009.** 1-й способ решения.

$$\begin{cases} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha = m; \ |m| \leqslant 1; \\ \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = n; \ |n| \leqslant 1, \end{cases}$$

откуда

$$\cos \beta \cos \alpha = \frac{m + n}{2};$$

$$\sin \beta \sin \alpha = \frac{n - m}{2},$$

следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{m + n}{2 \cos \beta}; \quad \sin \alpha = \frac{n - m}{2 \sin \beta}.$$

Возведя обе части каждого из последних равенств в квадрат и складывая их, находим искомое соотношение:

$$1 = \frac{(m+n)^2}{4\cos^2\beta} + \frac{(n-m)^2}{4\sin^2\beta};$$

$$\frac{(m+n)^2}{\cos^2\beta} + \frac{(n-m)^2}{\sin^2\beta} = 4.$$

2-й способ решения. Поскольку $\beta + \alpha + \beta - \alpha = 2\beta$, то

$$\cos[(\beta+\alpha)+(\beta-\alpha)] = \cos 2\beta;$$

$$\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha) - \sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \cos 2\beta$$

и

$$mn \pm \sqrt{(1-m^2)(1-n^2)} = \cos 2\beta.$$

**1010.** Возведя левые и правые части первых двух равенств в квадрат и складывая их, получим

$$x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\beta) + y^2(\sin^2\beta + \cos^2\alpha) = a^2 + b^2$$

или

$$(x^2+y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\beta) = a^2 + b^2.$$

Складывая почленно это уравнение с третьим, находим

$$(x^2+y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha + \cos^2\beta) = a^2 + b^2 + 2ab;$$

$$2(x^2+y^2) = (a+b)^2.$$

**1011.** Возведя обе части первого равенства в квадрат, получим

$$x^2 = 1 - \sin 2t,$$

откуда

$$\sin 2t = 1 - x^2$$

и

$$t = \frac{1}{2}\arcsin(1-x^2).$$

Подставив эти значения во второе равенство, получим искомый результат исключения

$$y = \frac{1}{2}\arcsin(1-x^2) + 1 - x^2.$$

**1012.**

$$\operatorname{tg} x = \frac{m}{a}, \quad \sin 2x = \frac{n}{b}.$$

Известно, что

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\sin 2x = \frac{2\frac{m}{a}}{1+\frac{m^2}{a^2}} = \frac{2am}{a^2+m^2},$$

откуда

$$\frac{n}{b} = \frac{2am}{a^2 + m^2}.$$

Уравнение

$$n(a^2 + m^2) = 2abm$$

является результатом исключения $x$.

**1013.**

$$x = a\cos^3 t + 3a\cos t \sin^2 t;$$

$$y = a\sin^3 t + 3a\cos^2 t \sin t.$$

Сложим и вычтем эти равенства:

$$x + y = a(\cos t + \sin t)^3;$$

$$x - y = a(\cos t - \sin t)^3.$$

Возведем левую и правую части полученных уравнений в степень $\frac{2}{3}$:

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos t + \sin t)^2;$$

$$(x - y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos t - \sin t)^2,$$

или

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(1 + \sin 2t);$$

$$(x - y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(1 - \sin 2t).$$

Отсюда

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

**1014.** Из данных уравнений получаем

$$a = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x};$$

$$b = \sec x - \frac{1}{\sec x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sec x},$$

откуда

$$a^2 b = \sec^3 x,$$

$$ab^2 = \operatorname{tg}^3 x.$$

Так как

$$\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

то

$$(a^2b)^{\frac{2}{3}} - (ab^2)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

$$a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} = 1.$$

**1015.**

$$\frac{y}{a} = 2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2};$$

$$\frac{z}{b} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Возводим в квадрат и складываем:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 4\cos^2\frac{x}{2}.$$

Уравнение $\frac{y}{a} = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$ может быть переписано так:

$$\frac{y}{a} = 2\cos\frac{x}{2}\left(4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2}\left(4\cos^2\frac{x}{2} - 3\right).$$

Окончательно

$$\frac{2y}{a} = \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right)\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 3\right).$$

**1016.** Из двух первых уравнений видно, что $x$ и $y$ различные значения угла $\alpha$, удовлетворяющего уравнению

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = 2c$$

или

$$2c - a\cos\alpha = b\sin\alpha;$$

$$4c^2 - 4ca\cos\alpha + a^2\cos^2\alpha = b^2\sin^2\alpha;$$

$$(a^2 + b^2)\cos^2\alpha - 4ac\cos\alpha + 4c^2 - b^2 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни

$$\cos x \text{ и } \cos y,$$

откуда

$$\cos x + \cos y = \frac{4ac}{a^2 + b^2};$$

$$\cos x\cos y = \frac{4c^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Третье уравнение после возвышения в квадрат дает

$$1 = 4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2} = (1 - \cos x)(1 - \cos y) =$$

$$= 1 - (\cos x + \cos y) + \cos x\cos y,$$

откуда

$$\cos x + \cos y = \cos x \cos y,$$

или

$$\frac{4ca}{a^2 + b^2} = \frac{4c^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

откуда

$$b^2 = 4c^2 - 4ac = 4c(c - a).$$

**1017.** Обозначив искомый период через $T$, получим

$$\cos n(x + T) = \cos nx;$$

$$\cos n(x + T) - \cos nx = 0;$$

$$-2 \sin\left(nx + \frac{nT}{2}\right) \sin\frac{nT}{2} = 0,$$

откуда

$$\sin\frac{nT}{2} = 0$$

Таким образом,

$$T = \frac{2k\pi}{n}.$$

Наименьший период функции при $k = 1$ будет

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Примечания. 1) $\sin\left(nx + \frac{nT}{2}\right) \neq 0$ при любом значении $x$; 2) если учесть, что период функции $\cos x$ известен, а именно $2\pi$, то $\cos nx = \cos(nx + 2\pi) = \cos n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)$. Таким образом, искомый период $T = \frac{2\pi}{n}$.

**1018.** Период функции $\sin 2x$ будет $T = \pi$, а функции $\cos 5x$ равен $T = \frac{2\pi}{5}$.

Так как наименьшее общее кратное для чисел 5 и 2 есть $10\left(\pi = 5\frac{\pi}{5}\right.$ и $\left.\frac{2\pi}{5} = 2\frac{\pi}{5}\right)$, то число $10\frac{\pi}{5} = 2\pi$ и является периодом функции

$$y = \sin 2x - \cos 5x.$$

**1019.** В связи с тем, что $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, период данной функции $T = \pi$.

**1020.**

$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x \frac{1+\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{\cos x + \cos x \cdot \cos 2x}{2} = \frac{\cos x + \frac{\cos 3x + \cos x}{2}}{2} = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

*Отв.* $2\pi$ (см. решение примера 1022).

**1021.** *Отв.* $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

**1022.** Для того чтобы найти период функции, надо найти периоды каждого слагаемого отдельно, а затем найти наименьшее общее кратное полученных периодов:

1) $\sin 4x$ имеет период

$$T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$

2) $\sin 5x$ имеет период

$$T_2 = \frac{2\pi}{5};$$

3) $\cos\left(\frac{x}{3} + 3\right)$ имеет период

$$T_3 = 6\pi.$$

Общий период

$$T = 6\pi.$$

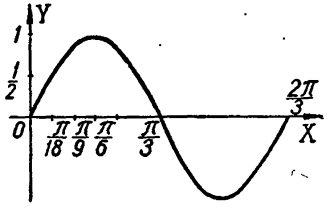



Рис. 229.

**1023.**

$$y = \cos^2 4x = \frac{1+\cos 8x}{2},$$

следовательно, периодом функции будет

$$T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

**1024.**

$$y = \cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right).$$

Для $\cos 2x$ период $T_1 = \pi$, для $\cos 4x$ период $T_2 = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $T = \pi$.

**1025.** График функции $y = \sin 3x$ можно получить с помощью сжатия обыкновенной синусоиды $y = \sin x$ в три раза (рис. 229) вдоль оси $OX$.

Строим таблицу значений:

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | +0,7... | +1 | +0,7... | 0 | −1 | 0 | +1 |

**1026.** График функции строим так же, как в примере 1025.

**1027.** График функции $y = 2\cos 4x$ можно получить с помощью двух преобразований, а именно: построением графика функции $y = \cos 4x$ с помощью сжатия обыкновенной косинусоиды $y = \cos x$ в четыре раза вдоль оси $OX$ и построением графика функции $y = 2\cos 4x$ с помощью растяжения косинусоиды $y = \cos 4x$ в два раза вдоль оси $OY$.

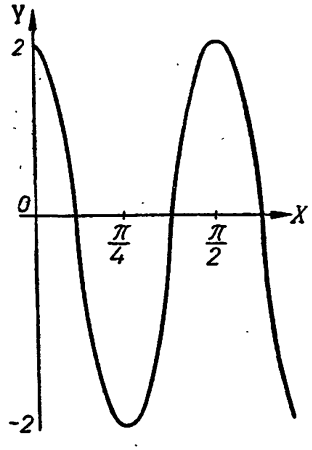



Рис. 230.

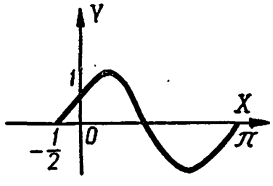



Рис. 231.

На рис. 230 построен график путем составления таблицы значений аргумента и функций

$$y_1 = \cos 4x;$$

$$y_2 = 2\cos 4x:$$

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{16}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{3}{16}\pi$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3}{8}\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5}{8}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 0,7 | 0 | −0,7 | −1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 2 | 1,4 | 0 | −1,4 | −2 | 0 | 2 | 0 |

**1028.** Если вынесем число 2 за скобки, то

$$y = \sin 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

График функции (рис. 231) получаем с помощью двух преобразований: 1) переносом начала координат в точку $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ обыкновенной синусоиды $y=\sin x$, т. е. сдвигом ее влево; 2) сжатием полученного графика в два раза вдоль оси $OX$.

**1029.** График функции $y=\frac{1+\cos 2x}{2}$ получаем с помощью трех преобразований:

1. Строим график функции $y_1=\cos 2x$. Он получается из обыкновенной косинусоиды с помощью сжатия в два раза вдоль оси $OX$.

2. Строим график функции $y_2=\frac{1}{2}\cos 2x$, который получаем сжатием графика функции $\cos 2x$ в два раза вдоль оси ординат.

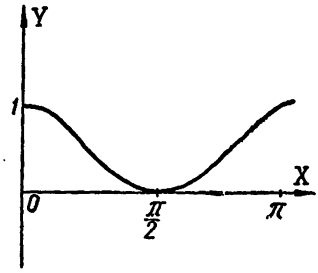



Рис. 232.

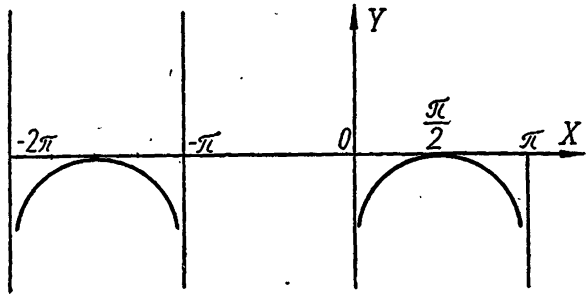



Рис. 233.

3. $y_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$ получаем с помощью прибавления к каждой ординате графика $y_2=\frac{1}{2}\cos 2x$ значения $\frac{1}{2}$.

Таблицу значений построить самим (рис. 232).

**1030.** У к а з а н и е. $y=\sin^2 x$ представим в виде

$$y=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Предлагаем построить график читателю.

**1031.** Периодом функции будет $T=2\pi$. Функция существует для тех значений $x$, для которых $\sin x>0$, т. е. в промежутке $(2k\pi;\ (2k+1)\ \pi)$.

Наибольшее значение функция $y=\lg\sin x$ имеет при $x=\frac{\pi}{2}$, т. е. при $y=0$, а когда $x$ стремится к 0 или к $\pi$, то $y$ неограниченно уменьшается, оставаясь все время отрицательным; $\lg\sin x\leqslant 0$ (рис. 233).

**1032.** У к а з а н и е. Представим уравнение в виде

$$y=-\lg\sin x.$$

Предлагаем построить график читателю.

**1033.** Предлагаем построить график читателю.

**1034.** График $y = |\sin x|$ строится из графика $y = \sin x$ заменой отрицательных значений $y$ положительными (рис. 234).

**1035.** Пусть $\operatorname{arcctg} a = \beta$, тогда $\operatorname{ctg}\beta = a$ и $0 < \beta < \pi$. Таким образом, задача заключается в нахождении $\cos\beta$, причем угол $\beta$ находится в промежутке $(0,\pi)$.

$$\operatorname{ctg}\beta = a,$$

откуда

$$\cos\beta = a\sin\beta. \qquad (1)$$

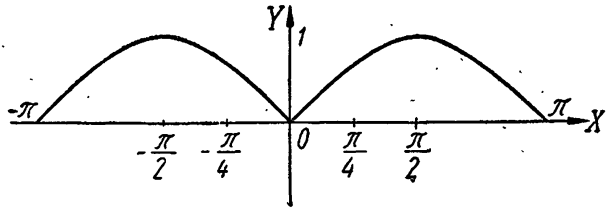



Рис. 234.

Возведя левую и правую части равенства (1) в квадрат и заменяя $\sin^2\beta$ через $1 - \cos^2\beta$, получим

$$\cos^2\beta + a^2\cos^2\beta = a^2,$$

откуда

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Перед радикалом оставляем только знак «+», так как знак $\cos\beta$ определяется знаком $a$. Действительно, при $a \geqslant 0$ $0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\cos\beta \geqslant 0$. Если же $a < 0$, т. е. $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, то $\cos\beta < 0$.

**1036.** $\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2{,}4)\right] = \cos\left[-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2{,}4\right] =$

$$= \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2{,}4\right).$$

Допустим, $\operatorname{arctg} 2{,}4 = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Задача заключается в нахождении $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Поскольку $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$, то $\sec\alpha = \frac{13}{5}$ ($\alpha$ — угол первой четверти), $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, а так как $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Итак,

$$\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2{,}4)\right] = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

**1037.** Пусть $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{так как } \frac{3}{4} > 0\right)$.

Задача заключается в нахождении $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; при этом очевидно, что $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$.

Возведя в квадрат левую и правую части уравнения $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, получим

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{9}{16};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{9}{25},$$

отсюда

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

найдем, что

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Таким образом,

$$\sin 2\alpha = 2\,\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

Примечание. Как известно, все тригонометрические функции угла $2\alpha$ определяются рационально через $\operatorname{tg}\alpha$.

Поэтому

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{24}{25}.$$

**1038.** Пусть

$$\arcsin\frac{3}{5} = \alpha;$$

$$\arcsin\frac{8}{17} = \beta,$$

тогда

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\sin\beta = \frac{8}{17}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Нужно вычислить

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

Найдем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, принимая во внимание, что по условию $\alpha$ и $\beta$ находятся в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$.

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{4}{5};$$

$$\cos\beta = \frac{15}{17}.$$

Таким образом,

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right) = \frac{77}{85}.$$

**1039.** Пусть

$$\arcsin\frac{2}{7} = \alpha.$$

Тогда

$$\sin\alpha = \frac{2}{7} \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Нужно вычислить

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Сделав соответствующие вычисления, найдем, что

$$\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right) = \frac{41}{49}.$$

**1040.** Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \alpha$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \beta$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$$

Из формулы тангенса суммы двух углов находим

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

Поскольку $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha + \beta = \operatorname{arctg} 1$.

**1041.** По условию $x > 0$ и $xy > 1$, откуда $y > 0$. Если обозначить $\operatorname{arctg} x = \alpha$ и $\operatorname{arctg} y = \beta$, то $\operatorname{tg}\alpha = x$; $\operatorname{tg}\beta = y$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

В связи с тем, что $0 < \alpha + \beta < \pi$, $\alpha + \beta$ остается главным значением обратной тригонометрической функции только для $\arccos a$ или $\operatorname{arcctg} a$, поэтому вычислим $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$.

$$\alpha + \beta = \operatorname{arcctg}\frac{1 - xy}{x + y} = \pi - \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1 - xy}{x + y}\right) =$$

$$= \pi - \operatorname{arcctg}\frac{xy - 1}{x + y}.$$

Поскольку

$$\frac{xy - 1}{x + y} > 0,$$

то

$$\operatorname{arcctg}\frac{xy - 1}{x + y} = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{xy - 1}.$$

Итак,

$$\alpha + \beta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{x + y}{xy - 1} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy},$$

что и требовалось доказать.

**1042.** Запишем тождество в виде

$$\arccos\frac{1}{2} + \pi - \arccos\frac{1}{7} = \pi - \arccos\frac{13}{14},$$

или

$$\frac{\pi}{3} + \arccos\frac{13}{14} = \arccos\frac{1}{7}.$$

Пусть

$$\arccos\frac{13}{14} = \alpha,$$

тогда

$$\cos\alpha = \frac{13}{14}.$$

Принимая во внимание, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$, т. е. $\sin\alpha > 0$, найдем

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{169}{196}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Применяя формулу косинуса суммы двух углов, получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{14} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{7}.$$

Итак,

$$\frac{\pi}{3}+\alpha=\arccos\frac{1}{7},$$

так как $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+\alpha<\frac{\pi}{2}$.

**1043.** Очевидно, что $ax>0$ и $\sqrt{\frac{x}{a}}>0$, поэтому, если обозначить $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}=\alpha$, будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{x}{a}} \text{ и } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Нужно доказать, что

$$2\alpha=\arccos\frac{a-x}{a+x}.$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2}{\sec^2\alpha}-1=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-1=$$

$$=\frac{2}{1+\frac{x}{a}}-1=\frac{2a}{a+x}-1=\frac{a-x}{a+x};$$

поскольку $0<2\alpha<\pi$, то

$$2\alpha=\arccos\frac{a-x}{a+x}.$$

**1044.** Представим равенство в виде

$$2\operatorname{arctg}\frac{8}{15}=\arcsin\frac{240}{289}.$$

Пусть $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Нужно доказать, что $2\alpha=\arcsin\frac{240}{289}$.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sec^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\frac{8}{15}}{1+\frac{64}{225}}=\frac{240}{289}.$$

Поскольку $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $2\alpha=\arcsin\frac{240}{289}$, что и требовалось доказать.

**1045.** Пусть $\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})=x$, т. е. $\operatorname{tg}x=3+2\sqrt{2}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=y$, т. е. $\operatorname{tg}y=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $0<y<\frac{\pi}{2}$ и $x>y$.

Имеем

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{3+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(3+2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}=1.$$

Таким образом,

$$x-y=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

так как

$$0<x-y<\frac{\pi}{2}.$$

**1046.** Пусть

$$\arcsin\frac{4}{5}=\alpha;\quad \arcsin\frac{5}{13}=\beta,$$

тогда

$$\sin\alpha=\frac{4}{5};\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$$

$$\sin\beta=\frac{5}{13};\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

Теперь находим

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=$$

$$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}\sqrt{1-\frac{25}{169}}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{20}{65}=\frac{16}{65}.$$

Поскольку $0<\alpha+\beta<\pi$, то $\alpha+\beta=\arccos\frac{16}{65}$.

Таким образом, левая часть тождества

$$\arccos\frac{16}{65}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

**1047.** Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

Поскольку $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$, то $\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$. Вычисляем $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}.$$

Итак,

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2});$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}),$$

что и требовалось доказать.

**1048.** Докажем сначала тождество $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, если $xy < 1$.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)] +$$

$$+ \varepsilon\pi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} + \varepsilon\pi =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi.$$

Докажем, что $\varepsilon = 0$ при условии $xy < 1$ ($\varepsilon$ — целое число или 0, причем не превышает по абсолютной величине 1).

Рассмотрим 4 случая ($x \neq 0$, $y \neq 0$):

1. $x > 0$, $y > 0$.

$$0 < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$0 < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2};$$

$$0 < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi;$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда видно, что $\varepsilon = 0$.

2. $x < 0$, $y < 0$.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < 0;$$

$$-\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} < 0.$$

Следовательно, $\varepsilon = 0$.

3. $x > 0$, $y < 0$.

$$0 < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2};$$

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} < \frac{\pi}{2} \text{ при } x > |y|$$

или

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} < 0 \text{ при } x < |y|.$$

В обоих этих случаях $\varepsilon = 0$.

4. Аналогично доказывается и четвертый случай, а именно, если $x < 0$, $y > 0$.

При $x$ и $y$, равных одновременно нулю или поочередно, тождество очевидно.

Теперь рассмотрим данный пример. Согласно проведенному исследованию необходимо, чтобы

$$\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} \cdot \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} < 1 \ (a \neq 0, \ b \neq 0);$$

$$\frac{4ab - 2b^2 - 2a^2 + ab}{3ab} < 1;$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{a^2+b^2-ab}{ab}\right) > 0;$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 > 0.$$

Если $a$ и $b$ разных знаков, то последнее неравенство несправедливо. Если же $a$ и $b$ одного знака, то, как известно, $\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \geqslant 2$. Поэтому $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 1$, и неравенство выполняется. Таким образом, данное ограничение множества допустимых значений параметров удовлетворяют выводам исследования. Итак,

$$\operatorname{arctg} \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \frac{2b-a}{a\sqrt{3}}}{1 - \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} \cdot \frac{2b-a}{a\sqrt{3}}} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\frac{2a^2 - ab + 2b^2 - ab}{ab\sqrt{3}}}{\frac{3ab - 4ab + 2b^2 + 2a^2 - ab}{3ab}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

**1049.** Пусть

$$\operatorname{arctg}(1+x)=\alpha, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\alpha=1+x \text{ и } -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg}(1-x)=\beta, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\beta=1-x \text{ и } -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

По условию $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1;$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1;$$

$$\frac{1+x+1-x}{1-(1+x)(1-x)}=1,$$

откуда

$$x=\pm\sqrt{2}.$$

**1050.** Очевидно, что $0<x<1$. Обозначим

$$\arcsin x=\alpha, \text{ т. е. } \sin\alpha=x, \text{ где } 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin\frac{x}{2}=\beta, \text{ т. е. } \sin\beta=\frac{x}{2}, \text{ где } 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

Тогда по условию

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \text{ или } \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

и, следовательно,

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Но

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\sin\beta=\frac{x}{2}.$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{x}{2},$$

откуда

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

**1051.**

$$\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \frac{\pi}{6}.$$

Так как $3^x > 0$ и $3^{-x} > 0$, то

$$0 < \operatorname{arctg} 3^x < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \operatorname{arctg} 3^{-x} < \frac{\pi}{2},$$

причем согласно условию

$$\operatorname{arctg} 3^x > \operatorname{arctg} 3^{-x}$$

и, следовательно, $x > 0$. Поэтому

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6};$$

$$\frac{3^x - 3^{-x}}{1 + 3^x \cdot 3^{-x}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$3^x - \frac{1}{3^x} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$3 \cdot 3^{2x} - 2\sqrt{3} \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$3^x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3+9}}{3}; \quad 3^x > 0;$$

$$3^x = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+2);$$

$$3^x = \sqrt{3}.$$

Отсюда $x = \frac{1}{2}$.

**1052.** Очевидно, что $0 \leqslant |x| \leqslant 1$. Обозначим

$$\arcsin \frac{3x}{5} = \alpha, \text{ т. е. } \sin\alpha = \frac{3x}{5} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin \frac{4x}{5} = \beta, \text{ т. е. } \sin\beta = \frac{4x}{5} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin x = \gamma, \text{ т. е. } \sin\gamma = x \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\alpha + \beta = \gamma; \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma;$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\gamma$$

или окончательно

$$\frac{3x}{5}\sqrt{1 - \left(\frac{4x}{5}\right)^2} + \frac{4x}{5}\sqrt{1 - \left(\frac{3x}{5}\right)^2} = x.$$

Полученное уравнение имеет решения $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

**1053.**

$$\arcsin x \cdot \arccos x = a^2.$$

Так как правая часть уравнения неотрицательное число, то $\arcsin x$ и $\arccos x$ должны быть одного знака (или одно из них равняться 0 при $a = 0$).

Принимая во внимание главные значения $\arccos x$ и $\arcsin x$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi,$$

приходим к заключению, что $\arccos x$ и $\arcsin x$ числа только неотрицательные, так как $\arccos x \geqslant 0$.

Учитывая тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, которое предлагаем доказать читателю, получим следующее квадратное уравнение:

$$\arcsin x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = a^2;$$

$$2(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x + 2a^2 = 0.$$

Решая его, найдем

$$\arcsin x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16a^2}}{4},$$

что имеет смысл (в области действительных чисел) при $|a| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Отсюда

$$x_1 = \sin\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 16a^2}}{4} = \cos\frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 16a^2}}{4};$$

$$x_2 = \sin\frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 16a^2}}{4} = \cos\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 16a^2}}{4}.$$

**1054.** Согласно условию задачи

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\operatorname{arcctg} x).$$

Пусть $\operatorname{arcctg} x = z$, тогда $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = x$; $0 < z < \pi$; $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ $\leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $x > 0$.

Имеем

$$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 z}}{\sin z} = x;$$

$$1 - \sin^2 z = x^2 \sin^2 z.$$

Итак,

$$\sin z = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad 0 < z < \pi.$$

Поэтому $x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, или $x(\sqrt{1+x^2}) = 1$; $x > 0$. Если возвести обе части уравнения в квадрат, то получим $x^4 + x^2 - 1 = 0$, откуда

$$x_1 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}};$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}};$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

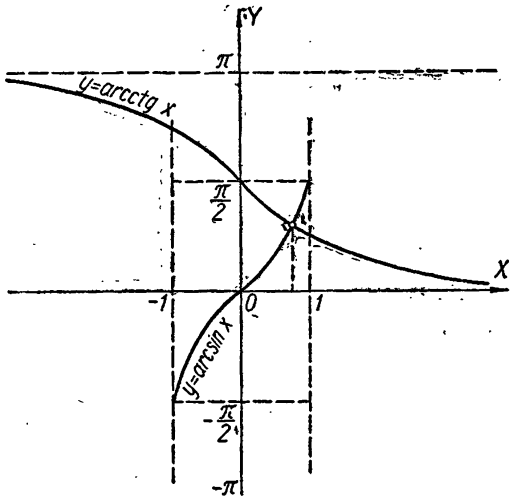



Рис. 235.

Корни $x_3$ и $x_4$ не удовлетворяют условию примера как комплексные числа, а $x_2$ не может быть корнем уравнения как число отрицательное.

Данное уравнение удовлетворяет только

$$x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(рис. 235).

**1055.** Из условия следует, что

$$\sin(\arccos 4x) = \sin(\arcsin 3x).$$

Но $0 \leqslant \arccos 4x \leqslant \pi$; $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin 3x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому $x > 0$.

Пусть $\arccos 4x = z$, тогда $\cos z = 4x$. Таким образом,

$$\sin z = \sqrt{1-16x^2}, \ (0 \leqslant z \leqslant \pi),$$

откуда

$$z = \arcsin\sqrt{1-16x^2};$$

$$\sin(\arcsin\sqrt{1-16x^2}) = 3x;$$

$$\sqrt{1-16x^2} = 3x;$$

$x_1 = \frac{1}{5}$; $x_2 = -\frac{1}{5} < 0$ не удовлетворяет исходному уравнению (рис. 236).

**1056.**

$$\sin(2\arcsin x) = \sin(\arcsin 2x); \quad |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Левую часть равенства преобразуем так:

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) =$$
$$= 2x\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

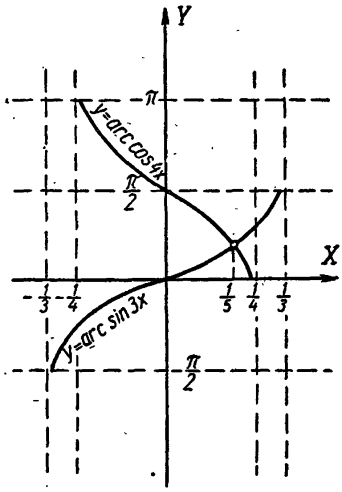



Рис. 236.

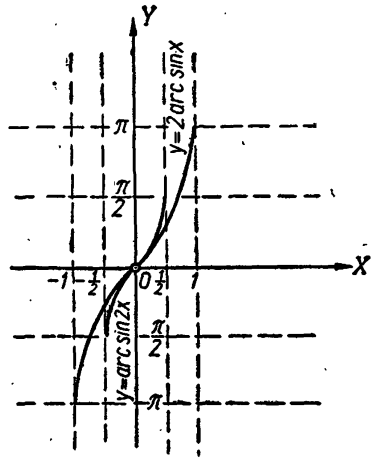



Рис. 237.

В правой части будет $\sin(\arcsin 2x) = 2x$.

Поэтому $2x\sqrt{1 - x^2} = 2x$; $\sqrt{1 - x^2} - 1 = 0$; $x_1 = 0$; $\sqrt{1 - x^2} = 1$; $1 - x^2 = 1$; $x_{2,3} = 0$ (рис. 237).

Примечание. При вычислении $\cos(\arcsin x)$ перед радикалом взят положительный знак. Действительно,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin 2x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а принимая во внимание условие примера, и

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

При этих ограничениях $\cos(\arcsin x) > 0$.

**1057.** $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = -\operatorname{ctg}(5\operatorname{arctg} x)$; $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 5\operatorname{arctg} x\right)$, откуда

$$2\operatorname{arctg} x + k\pi = 5\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$$

или

$$3\operatorname{arctg} x = k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Принимая во внимание, что $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, получим для $k$ значения 0; 1. Итак, имеем два уравнения:

$$3\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \text{ и } 3\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Из первого получим, что $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{6}$; $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; из другого найдем $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**1058.** Принимая во внимание, что $1 + \sin x \geqslant 0$ и $1 - \sin x \geqslant 0$, получаем

$$0 < \operatorname{arctg}(1 + \sin x) < 90°;$$

$$0 < \operatorname{arcctg} 2(1 - \sin x) < 90°.$$

Преобразовываем правую часть уравнения:

$$\operatorname{arcctg} 2(1 - \sin x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2(1 - \sin x)}.$$

Итак,

$$\operatorname{arctg}(1 + \sin x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2(1 - \sin x)},$$

отсюда

$$1 + \sin x = \frac{1}{2(1 - \sin x)};$$

$$(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \frac{1}{2};$$

$$1 - \sin^2 x = \frac{1}{2};$$

$$2\sin^2 x - 1 = 0;$$

$$\cos 2x = 0;$$

$$x = 45° + 90°n.$$

**1059.** Из данного соотношения находим

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi - \operatorname{arctg} z; \quad x > 0; \quad y > 0; \quad z > 0.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y) = \operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} z);$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z);$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = -z;$$

$$x + y = -z + xyz,$$

откуда $x + y + z = xyz$.

**1060.** Областью допустимых значений для функции, которая находится в левой части неравенства, является

$$-1 \leqslant x \leqslant 1,$$

для функции правой части неравенства

$$-1 \leqslant 1 - x \leqslant 1.$$

Из последнего неравенства находим

$$2 \geqslant x \geqslant 0.$$

Сопоставляя неравенства

$$-1 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$0 \leqslant x \leqslant 2,$$

получим

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

В связи с тем что функции $\arcsin x$ и $\arcsin(1 - x)$ находятся в интервале монотонности, из условия следует

$$x < 1 - x; \quad x < \frac{1}{2}.$$

Рассматривая систему неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

окончательно находим, что

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2}.$$

*РАЗДЕЛ V*

## РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

**1061.** Обозначим число сотен искомого числа через $x$, число десятков — через $y$, число единиц — через $z$, тогда искомое число будет равно $100x + 10y + z$.

Согласно условию задачи составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 100z + 10y + x + 198 = 100x + 10y + z; \\ x + y + z = 12; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 74. \end{cases}$$

В первых двух уравнениях выражаем $x$ и $y$ через $z$:

$$99x = 99z + 198; \quad x = z^2 + 2;$$

$$z + 2 + y + z = 12; \quad y = 10 - 2z.$$

Подставляем найденные значения $x$ и $y$ в третье уравнение:

$$(z + 2)^2 + (10 - 2z)^2 + z^2 = 74;$$

$$z^2 - 6z + 5 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 5 \quad z_2 = 1.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 = 7; \\ y_1 = 0; \\ z_1 = 5, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = 3; \\ y_2 = 8; \\ z_2 = 1. \end{cases}$$

*Отв.* Искомое число равно 705 или 381.

**1062.** Исследование. 1. Функция имеет смысл при всех действительных значениях $x$, кроме $x = 0$.

Область существования функции

$$-\infty < x < 0 \text{ и } 0 < x < \infty.$$

2. При замене $x$ на $-x$ значение функции не изменяется. Следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси $OY$.

3. При всех допустимых значениях $x$ функция сохраняет положительный знак, кроме значения $x = \pm 1$.

4. При $x = \pm 1$ $\log_2^2 |x|$ обращается в нуль. Очевидно, что при $x = \pm 1$ функция имеет наименьшее значение.

5. При приближении $x$ к нулю как со стороны положительных значений $x$, так и со стороны отрицательных, функция неограниченно возрастает, оставаясь все время положительной:

$$\lim_{|x| \to 0} \log_2^2 |x| = \infty;$$

ось $OY$ — вертикальная асимптома кривой.

6. Так как данная функция четная, то достаточно построить ее график для $x > 0$, а затем симметрично продолжить для отрицательных значений $x$.

Пусть $x_2$ и $x_1$ два значения аргумента, удовлетворяющие условию

$$0 < x_1 < x_2 < 1,$$

тогда

$$\log_2^2 x_2 - \log_2^2 x_1 < 0.$$

При

$$1 < x_1 < x_2 < \infty$$

$$\log_2^2 x_2 - \log_2^2 x_1 > 0.$$

В интервале $0 < x < 1$ функция монотонно убывает, а в интервале $1 < x < \infty$ монотонно возрастает.

7. Проследим изменение разности $d = x - \log_2^2 x$:

при $x = \frac{1}{2}$ $d = -\frac{1}{2} < 0$;

при $x = 1$ $d = 1 > 0$;

при $x = 2$ $d = 1 > 0$;

при $x = 4$ $d = 0$;

при $x = 8$ $d = -1 < 0$;

при $x = 16$ $d = 0$;

при $x > 16$ $d > 0$.

Полученные значения разности свидетельствуют о том, что кривая $y = \log_2^2 |x|$ 1) находится выше прямой $y = x$ в интервале $0 < x < x_3 < 1$; 2) в точке $x = x_3$ пересекает прямую; 3) в интервале $x_3 < x < 4$ находится ниже прямой; 4) в интервале $4 < x < 16$ — выше прямой, а в интервале $16 < x < \infty$ — снова ниже прямой.

В точках $x = x_3$, $x = 4$ и $x = 16$ кривая пересекает прямую.

Построение графика (рис. 238). Предварительно вычерчиваем графики функций $y = \log_2 x$, $y = x$ и $y = x^2$.

Выбираем произвольную точку $A_1$ на графике функции $y = \log_2 x$. Проводим прямую $A_1A_2 \parallel OX$ до пересечения с прямой $y = x$ в точке $A_2$, далее проводим прямую $A_2A_3 \parallel OY$ до пересечения в точке

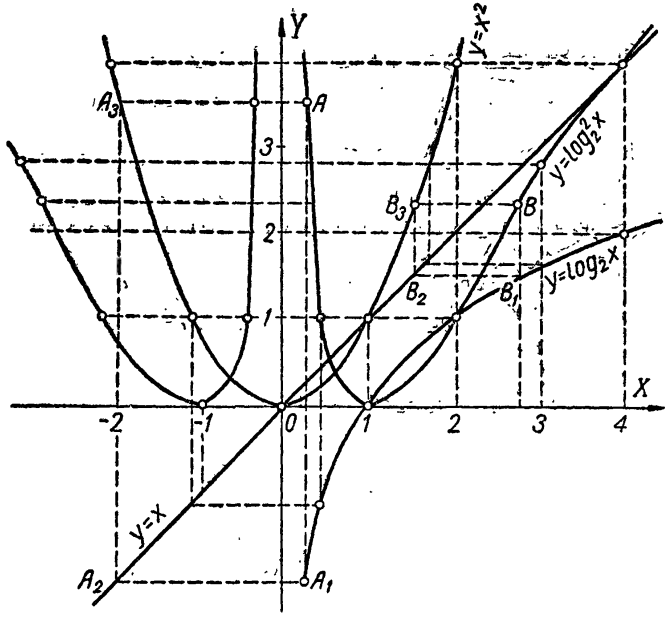



Рис. 238.

$A_3$ с параболой $y = x^2$, затем чертим прямую $A_3A \parallel OX$ до пересечения в точке $A$ с прямой $A_1A \parallel OY$. $A$ — одна из точек искомого графика.

Аналогично фиксируем произвольную точку $B_1$ на графике функции $y = \log_2 x$, проводим $B_1B_2 \parallel OX$ до пересечения в точке $B_2$ с прямой $y = x$, вычерчиваем прямую $B_2B_3 \parallel OY$ до пересечения в точке $B_3$ с кривой $y = x^2$, а затем проводим $B_3B \parallel OX$ до пересечения в точке $B$ с прямой $B_1B \parallel OY$. Тогда $B$ лежит на графике функции $y = \log_2^2 |x|$.

Построив таким образом ряд точек, соединим их плавной кривой, а затем последнюю продолжим симметрично оси $OY$.

Доказательство. Проводя $B_1B_2$, мы находим на прямой $y = x$ точку $B_2$, ордината которой, а следовательно, и абсцисса равны $\log_2 x_{B_1}$ ($x_{B_1}$ — абсцисса точки $B_1$), точка $B_3$ имеет ординату, равную $\log_2^2 x_{B_1}$ (графическое возведение в квадрат).

Точка $B$ имеет абсциссу, равную абсциссе точки $B_1$, а ординату — равную $\log_2^2 x_{B_1}$.

При построении графика замечаем, что в точке $x \approx 2{,}8$ кривая от вогнутости (вверх) переходит к выпуклости (вверх). Точка с абсциссой $x \approx 2{,}8$ называется *точкой перегиба кривой*. При $x \approx$ $\approx -2{,}8$ кривая имеет также точку перегиба, переходя в этой точке от выпуклости (вверх) к вогнутости (вверх).

**1063.** Исследование. 1. Функция $y = 2^{\operatorname{tg} x}$ периодическая, с периодом, равным $\pi$. Поэтому достаточно исследовать ее в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

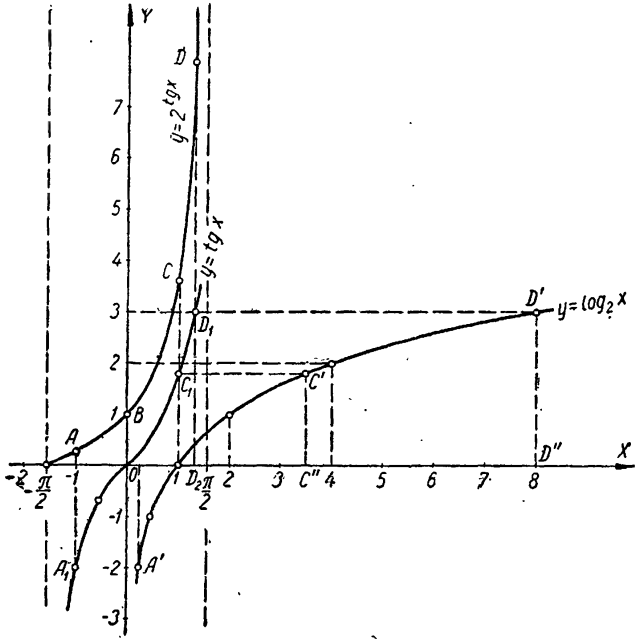



Рис. 239.

2. Данная функция при $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ не имеет смысла. Но если существует конечный предел функции $2^{\operatorname{tg} x}$ при $x \to -\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то можно $2^{\operatorname{tg} x}$ при $x = -\frac{\pi}{2}$ определить равным ее предельному значению:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} 2^{\operatorname{tg} x} = 0; \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Поэтому $2^{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ определим равным 0.

3. $2^{\operatorname{tg} x} > 0$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, т. е. график данной функции расположен над осью $OX$.

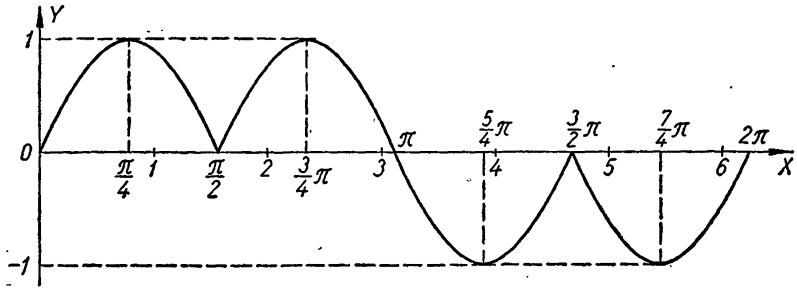
Укажем на один из способов вычерчивания графика.

Так как $y = 2^{\operatorname{tg} x}$, то

$$\log_2 y = \operatorname{tg} x.$$

Поэтому вычерчиваем предварительно графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \log_2 x$ (рис. 239).

Берем произвольную точку $D_1$ на графике функции $y = \operatorname{tg} x$, отыскиваем значение $\log_2 y$, соответствующее выбранному значению




Ри. 240.

$\operatorname{tg} x_{D_1}$, для этого проводим прямую $D_1D' \parallel OX$ до пересечения ее в точке $D'$ с графиком функции $y = \log_2 x$; $D''D' = \operatorname{tg} x_{D_1} = \log_2 y_D$, если обозначить точку искомого графика через $D$.

Отрезок $OD'' = y_D$ (графическое потенцирование). Затем через точку $D_1$ проводим прямую $D_2D_1 \parallel OY$ и откладываем на ней отрезок $D_2D = OD''$. $D$ — одна из точек искомого графика.

Таким образом, находим ряд точек $A$, $B$, $C$ и $D$. Соединяя их плавной кривой и повторяя последнюю в интервалах $\left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ и т. д. (на чертеже не указано), получим искомый график данной функции.

**1064.** Указание. Период функции $2\pi$. Точки пересечения с осью $OX$ на сегменте $[0, 2\pi]$: $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$; $x = \frac{3}{2}\pi$; $x = 2\pi$.

Там, где $\sin x > 0$, график расположен над осью $OX$, а где $\sin x < 0$ — под осью $OX$ (рис. 240).

**1065.** Если алгебраическое уравнение (с действительными коэффициентами) имеет комплексный корень $a + bi$, то оно имеет также сопряженный ему корень $a - bi$. Следовательно, нам известны два корня заданного уравнения: $3 + i\sqrt{6}$ и $3 - i\sqrt{6}$. По

следствию из теоремы Безу левая часть уравнения должна делиться без остатка на выражения $x-(3+i\sqrt{6})$ и $x-(3-i\sqrt{6})$, а следовательно, — и на произведение этих выражений, т. е. на

$$[(x-3)-i\sqrt{6}]\,[(x-3)+i\sqrt{6}]=x^2-6x+15.$$

Разлагая левую часть данного уравнения на множители (путем деления), получим

$$4x^4-24x^3+57x^2+18x-45=(x^2-6x+15)(4x^2-3).$$

Приходим к уравнениям

$$x^2-6x+15=0;$$
$$4x^2-3=0.$$

Решая первое уравнение, получаем

$$x_1=3+i\sqrt{6} \text{ и } x_2=3-i\sqrt{6}.$$

Корнями второго уравнения являются $x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

*Отв.* $x_1=3+i\sqrt{6}$; $x_2=3-i\sqrt{6}$; $x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**1066.** Общий член ряда равен

$$k(m-k+1)=k(m+1)-k^2,$$

поэтому

$$m+2\cdot(m-1)+3(m-2)+\ldots+k(m-k+1)+\ldots+$$
$$+(m-2)\cdot 3+(m-1)2+m\cdot 1=[1(m+1)-1^2]+[2\cdot(m+1)-$$
$$-2^2]+[3\cdot(m+1)-3^2]+\ldots+[k(m+1)-k^2]+\ldots+$$
$$+[(m-2)(m+1)-(m-2)^2]+[(m-1)(m+1)-(m-1)^2]+$$
$$+[m(m+1)-m^2]=(1+2+3+\ldots+m)(m+1)-$$
$$-(1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2)=\frac{(1+m)\,m\,(m+1)}{2}-\frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}=$$
$$=m(m+1)\left(\frac{m+1}{2}-\frac{2m+1}{6}\right)=m(m+1)\frac{3m+3-2m-1}{6}=$$
$$=\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{6}.$$

**1067.** Произведя замену $z^3=x^2z-y^2z$, получим

$$x^3-y^3-z^3=x^3-y^3-x^2z+y^2z=x^3-x^2y-y^3+$$
$$+x^2y-x^2z+y^2z=x^2(x-y)+y(x^2-y^2)-z(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2-xz-yz)=(x-y)[x(x-z)+$$
$$+y(x-z)+x^2-z^2]=(x-y)[x(x-z)+y(x-z)+$$
$$+(x-z)(x+z)]=(x-y)(x-z)(2x+y+z).$$

**1068.** Представим $x$, $y$ и $z$ в виде

$$x = \alpha + 5N_1;$$
$$y = \beta + 5N_2;$$
$$z = \gamma + 5N_3,$$

где $N_1$, $N_2$ и $N_3$ — целые числа или нули, а $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — целые числа, принимающие значения 1, 2, 3 и 4.

Возведя эти равенства в пятую степень, получим (каждое из слагаемых после возведения их в пятую степень, кроме $\alpha^5$, $\beta^5$ и $\gamma^5$, содержит множитель 25)

$$x^5 = \alpha^5 + 25M_1;$$
$$y^5 = \beta^5 + 25M_2;$$
$$z^5 = \gamma^5 + 25M_3,$$

где $M_1$, $M_2$ и $M_3$ — целые числа или 0.

Вычтя из первого равенства сумму двух других, найдем $x^5 - y^5 - z^5 = \alpha^5 - \beta^5 - \gamma^5 + 25M$; $M$ — целое число или 0. Так как $25M$ делится на 25, то вопрос делимости $x^5 - y^5 - z^5$ на 25 сводится к делимости $\alpha^5 - \beta^5 - \gamma^5$ на 25. Легко убедиться, что при любом значении $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ последнее выражение на 25 не делится.

**1069.** Предположим, что уравнению

$$x^2 = y^2 + z^2 \tag{1}$$

удовлетворяют целые числа $x$, $y$, $z$ и ни одно из них не делится на 3. Тогда

$$x = \alpha + 3N_1, \tag{2}$$

где $N_1$ — целое число или 0, $\alpha = 1,2$ (остаток);

$$y = \beta + 3N_2, \tag{3}$$

где $N_2$ — целое число или 0, $\beta = 1,2$ (остаток);

$$z = \gamma + 3N_3, \tag{4}$$

где $N_3$ — целое число или 0, $\gamma = 1,2$ (остаток).

Учитывая (2), (3), (4), из (1) следует, что

$$(\alpha + 3N_1)^2 = (\beta + 3N_2)^2 + (\gamma + 3N_3)^2;$$

$$\alpha^2 + 2 \cdot 3\alpha N_1 + 9N_1^2 = \beta^2 + 2 \cdot 3\beta N_2 + 9N_2^2 + \gamma^2 +$$
$$+ 2 \cdot 3\gamma N_3 + 9N_3^2;$$

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 3\left[(2\beta N_2 + 3N_2^2) + (2\gamma N_3 + 3N_3^2) - (2\alpha N_1 + 3N_1^2)\right]. \tag{5}$$

Обозначив в равенстве (5)

$$\left[(2\beta N_2 + 3N_2^2) + (2\gamma N_3 + 3N_3^2) - (2\alpha N_1 + 3N_1^2)\right] = N,$$

где $N$ — целое число или 0, получим

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 3N. \tag{6}$$

Поскольку правая часть равенства (6) делится на 3, то и левая часть должна делиться на 3.

Поступая совершенно так же, как в решении примера 1068, убеждаемся, что левая часть равенства (6) на 3 не делится. Поэтому наше допущение, что ни одно из чисел $x$, $y$ и $z$ на 3 не делится, привело к противоречию. Этим теорема доказана.

**1070.** $N^k - 1 - k(N-1) = (N-1)(N^{k-1} + N^{k-2} + \ldots + 1 - k)$. $N^{k-1} + N^{k-2} + \ldots + 1 - k$ делится на $N-1$, что можно проверить, применяя следствие теоремы Безу. Частное от деления будет равно $N^{k-2} + 2N^{k-3} + 3N^{k-4} + \ldots + k - 1$.

Поэтому

$$N^k - 1 - k(N-1) = (N-1)^2 [N^{k-2} + 2N^{k-3} + \ldots + (k-2)N + k - 1].$$

*ПРИЛОЖЕНИЕ 1*

## СОДЕРЖАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ, КОТОРЫЕ БЫЛИ ПРЕДЛОЖЕНЫ НА КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗЫ УССР

*Львовский государственный университет им. Ивана Франко*

1. Четыре замечательные точки в треугольнике.
2. Вывести формулы $\sin(\alpha \pm \beta)$.
3. Состоялся шахматный турнир, в котором приняли участие несколько игроков, каждый из которых играл со всеми остальными по одной партии. Всего состоялось 45 партий. Сколько было всех игроков?

* * *

1. Доказать, что если числа $a_1$; $a_2$;...;$a_n$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

2. Центры двух равных шаров лежат на диагонали куба. Каждый шар касается трех граней куба, сходящихся в одном из концов указанной диагонали и другого шара. Найти отношение радиуса шара к ребру куба.
3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=a; \\ \cos x+\cos y=b. \end{cases}$$

*Киевский ордена Ленина государственный университет им. Т. Г. Шевченко*

1. Доказать неравенство

$$5(x-1)<x^5-1<5x^4(x-1), \text{ если } x-1>0.$$

2. Круговой сегмент, дуга которого равна $\alpha$ ($\alpha<180°$), вращается вокруг диаметра, проведенного из конца дуги. Определить поверхность тела вращения, если радиус дуги равен $R$.

3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma,$$

если $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

* * *

1. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
2. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
3. Решить уравнение

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

*Днепропетровский государственный университет им. 300-летия воссоединения Украины с Россией*

1. Два куска латуни весят $a$ *кг*. В первом куске чистой меди содержится $p\%$, во втором $q\%$, при этом в первом куске чистой меди на $b$ *кг* больше, чем во втором. Сколько весит каждый кусок латуни? Исследовать решения уравнения.
2. Куб вписан в конус с углом $\alpha$ при вершине в осевом сечении и радиусом основания $r$. Вычислить площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середины его шести ребер.
3. Решить уравнение

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

* * *

1. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу один другому из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми равно 28 *км*. Через час езды они встретились и, не останавливаясь, продолжали ехать с той же скоростью. Первый прибыл в пункт $B$ на 35 *мин* раньше, чем второй прибыл в пункт $A$. Какова скорость каждого велосипедиста?
2. Радиус основания конуса равен $R$, угол между образующей и плоскостью основания конуса равен $\alpha$. Найти объем и полную поверхность конуса.
3. Преобразовать в произведение и упростить

$$\sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B - C}{2},$$

если $A + B + C = 180°$.

*Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова*

1. В шар радиуса $R$ вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой образует с плоскостью основания угол $\alpha$.

Вычислить объем пирамиды.

2. При каких действительных значениях $x$ выражение $\sqrt{1-\lg(x^2-5x+16)}$ принимает действительные значения?

3. Решить уравнение

$$2\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\cos 2x-3\cos x}.$$

* * *

1. Найти без таблиц точное значение cos 9999°.

2. Дано квадратное уравнение $x^2+px+q=0$. Составить другое квадратное уравнение, корни которого были бы равны четвертым степеням корней данного квадратного уравнения.

3. Через точку, взятую на поверхности шара, проведены две плоскости: касательная и делящая поверхность шара в среднем и крайнем отношении. Определить угол между ними.

*Черновицкий государственный университет*

1. По окружности радиуса $R$ одновременно из одной точки в противоположных направлениях начали двигаться два тела. Через $t$ *сек* эти тела встречаются. Определить угловую скорость движения каждого тела, если известно, что расстояние $l$ по окружности первое тело проходит скорее второго на $h$ *сек*.

2. Образующая прямого кругового конуса наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. В конусе проведена плоскость через его вершину под углом $\varphi$ к высоте. Найти угол между образующими, по которым эта плоскость пересекается с конусом.

3. Сколькими способами можно 5 различных монет разложить до двум карманам?

* * *

1. Найти $n$ из уравнения

$$1+3+5+\ldots+(2n+1)+$$

$$+\left(3{,}5+5+6{,}5+\ldots+\frac{7+3n}{2}\right)=105.$$

2. Вокруг шара описан прямой параллелепипед, объем которого в $m$ раз больше объема шара. Определить двугранные углы параллелепипеда.

3. Упростить выражение

$$\frac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha-\cos^3\alpha}.$$

*Харьковский государственный университет им. А. М. Горького*

1. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести влево (т. е. поместить вначале), то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найти это число.

2. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к данной окружности, были данной длины.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1.$$

* * *

1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} > 3; \\ x+2 > 4. \end{cases}$$

2. Объем параллелепипеда.

3. Формулы решения прямоугольных треугольников.

*Ужгородский государственный университет*

1. Доказать теорему о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника.

2. Прологарифмировать выражение $\sqrt{\dfrac{x^5 \sqrt[3]{y}}{L^3}}$.

3. Чему равен $\arccos(-1)$?

* * *

1. По кругу движутся два тела; первое тело проходит круг на *d сек* скорее, чем второе. Если тела движутся в одном направлении, то они встречаются каждые *m сек*. Какую часть круга проходит каждое тело в секунду?

2. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность, лежащая диаметром на гипотенузе. Определить градусную и радианную меру дуги между точками касания.

3. Решить уравнение

$$\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$$

*Киевский ордена Ленина политехнический институт*

1. Несколькими подъемными кранами одинаковой мощности выгружен груз из 96 вагонов. Если бы таких кранов было на 2 больше, то каждым краном пришлось бы выгружать на 8 вагонов меньше. Сколько было подъемных кранов?

2. Треугольник вращается вокруг его стороны, прилежащей к углам $\alpha$ и $\beta$. Найти поверхность тела вращения, если сторона треугольника, лежащая против угла $\alpha$, равна $a$.

3. Доказать тождество

$$\sin\alpha\,(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin 3\alpha.$$

* * *

1. При каком значении $x$ выражение

$$(ax + b)^2 + (cx + d)^2$$

имеет наименьшее значение? Найти это наименьшее значение.

2. В пространстве даны четырехгранный угол и точка $P$. Провести через $P$ плоскость, которая рассекает угол по параллелограмму.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x = \sin 6x.$$

*Львовский политехнический институт*

1. Решить уравнение

$$\lg 2 - \lg(y^2 - 4y + 5) = 1 - 2\lg\sqrt{y^2 + 4y + 5}.$$

2. Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме второго катета и гипотенузы.

3. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 1.$$

* * *

1. Ученик взял из библиотеки книгу, имеющую 480 страниц. Рассчитав, сколько он должен прочитывать ежедневно, чтобы сдать книгу в срок, он решил читать ежедневно на 20 страниц больше, чтобы сдать книгу на 4 дня раньше. На какой срок была взята книга из библиотеки?

2. Доказать тождество

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha.$$

3. Вычислить

$$\frac{(3{,}1+1{,}9734):(0{,}078\cdot 0{,}(3))}{\left(\frac{1}{8}+3\frac{2}{3}\right):0{,}015}-\frac{2:\frac{1}{8}}{3\frac{4}{5}:0{,}8}.$$

*Одесский политехнический институт*

1. Доказать равенство $C_m^n = C_m^{m-n}$.

2. Три признака равенства треугольников. Поверхность шарового сегмента и пояса.

3. Упростить выражение

$$\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

* * *

1. От швеллерной балки отрезали часть, составляющую 72% ее длины. Вес оставшейся части равен 45,2 *кг*. Сколько весит отрезанная часть швеллерной балки?

2. Решить уравнение

$$x^{\log_x 9}=4^{x^2}.$$

3. По ребру $a$ найти объем правильного тетраэдра.

4. Решить уравнение

$$\sin x=\cos 2x.$$

*Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина*

1. Подобие треугольников.

2. Логарифмы. Логарифмическая функция.

3. В зрительном зале $a$ стульев, расположенных рядами с одинаковым числом стульев в каждом. Если в каждый ряд добавить по $b$ стульев, а число рядов уменьшить на $c$, то общее число мест в зрительном зале увеличится на $\frac{1}{10}$ прежнего количества стульев. Сколько было стульев в каждом ряду?

4. Представить в тригонометрической форме числа: 1) $-i$; 2) $-1+i$; 3) $-1$.

* * *

1. Решить уравнение $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}=39$.

2. Доказать, что $\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\cos 2\alpha$.

3. Свойства средней линии трапеции (сформулировать и доказать).

*Донецкий ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт*

1. Три признака равенства треугольников.
2. Формула числа сочетаний.
3. Железный полый шар, внешний радиус которого равен 0,154 *м*, плавает в воде, погружаясь в нее наполовину. Вычислить толщину оболочки этого шара, зная, что плотность железа равна 7,7.

***

1. Теорема Безу о делимости целого полинома на $(x - a)$ и ее применение к разложению многочленов на множители.
2. В сектор радиуса $R$ с центральным углом $\alpha$ вписан круг. Определить его радиус.
3. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1.$$

*Киевский институт гражданского воздушного флота*

1. Теорема о параллельных плоскостях.
2. Из аэродрома $A$ на аэродром $B$ вылетел пассажирский самолет, а через $a$ *ч* из аэродрома $B$ на аэродром $A$ вылетел реактивный самолет. Оба самолета встретились в пункте $C$. От пункта $C$ пассажирский самолет летел $b$ *ч* до пункта $B$, а реактивный самолет до пункта $A$ летел $c$ *ч*. Сколько времени затратил каждый самолет на весь путь?
3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x)\operatorname{tg}(2\pi x) = 1.$$

***

1. Доказать, что логарифм произведения (по какому угодно основанию) равен сумме логарифмов сомножителей.
2. Решить уравнение

$$\sqrt[x-65]{32^{2x-60}} - \sqrt[4]{4^{3x+40}} = 0.$$

3. На сторонах ромба описаны, как на диаметрах, полуокружности, обращенные внутрь. Диагонали ромба равны $a$ и $b$. Определить площадь полученной розетки.

*Харьковский горный институт*

1. Формула бинома Ньютона (вывод).
2. Найти четвертый член разложения

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{b-a} + \sqrt[3]{\frac{b^2-a^2}{a}}\right)^n,$$

если коэффициент третьего члена равен 21.

3. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

* * *

1. За выгрузку товара уплачено $a$ руб. Так как рабочих явилось на 3 меньше, то каждый из них получил на 3 руб. больше, чем предполагалось. Сколько намечалось рабочих на выгрузку товара?
2. Вокруг круга, площадь которого равна $Q$, описан ромб, тупой угол которого равен $\alpha$. Определить площадь ромба.
3. Преобразовать в произведение и упростить

$$\sqrt{1 + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

*Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени горный институт им. Артема*

1. Теорема о средней линии трапеции.
2. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\lg(x-9) + \lg\sqrt{2x-1} = 1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos x = 0.$$

* * *

1. Найти значение $a$ и $b$ в двучлене $y = ax + b$ при условии, что $y = -11$, если $x = -2$, и $y = 1$, если $x = 2$.
2. Вычислить радиус окружности, вписанной в основание правильной четырехугольной пирамиды, ребро которой образует с высотой угол $\alpha$, а объем равен $V$.
3. Привести к виду, удобному для логарифмирования,

$$\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60°.$$

*Харьковский инженерно-экономический институт*

1. Вывести формулу для вычисления площади правильного треугольника.
2. Решить уравнение $ax^4 + b = 0$.
3. Привести к виду, удобному для логарифмирования,

$$1 - \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x.$$

* * *

1. Основные допущения об объемах. Объем прямоугольного параллелепипеда.

2. Из листа железа прямоугольной формы сделали коробку (без крышки) объемом 750 *см*$^3$. Для этого по углам листа вырезали квадраты со стороной в 5 *см* и получившиеся края загнули.

Найти размеры листа железа, если одна из его сторон на 5 *см* больше другой.

3. Доказать тождество

$$\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

*Одесский институт инженеров морского флота*

1. Признаки равенства треугольников.
2. Логарифмы и их свойства.
3. Теоремы косинусов.
4. Решить уравнение

$$5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140.$$

5. Проверить тождество

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 1 + \cos\alpha.$$

* * *

1. Двучленные уравнения.
2. Первый признак равенства треугольников.
3. Теорема синусов.
4. Решить уравнение

$$\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5.$$

*Одесское высшее инженерное морское училище*

1. Выражение стороны квадрата, правильного шестиугольника и треугольника через радиус вписанного и описанного кругов.
2. Привести к виду, удобному для логарифмирования,

$$\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha.$$

3. Найти неизвестный член пропорции

$$\frac{a^2+a-6}{a^2+3a+9} : \frac{a-2}{10a^3-270} = x : \left(\frac{a+3}{a-3} + \frac{a-3}{a+3} - 2\right).$$

* * *

1. Доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right).$$

2. От морской пристани одновременно отходят два парохода по взаимно перпендикулярным направлениям. После отхода паро-

ходов прошло $\frac{3}{4}$ *ч* и один из них находился от пристани на 4,5 *км* дальше второго, причем эта разница расстояний пароходов от пристани составляет 30% расстояния между пароходами за 15 *мин* до этого времени. Определить скорость пароходов.

3. Построить окружность, которая касалась бы данной прямой и данной окружности и проходила бы через данную точку.

*Днепропетровский химико-технологический институт им. Ф. Э. Дзержинского*

1. Найти двузначное число, зная, что сумма его цифр равна 10; если цифры числа переставить и полученное число умножить на первоначальное, то получится 2944.

2. Вычисление площади треугольника и трапеции.

3. Формулы приведения для аргумента $\frac{3}{2}\pi + \alpha$.

4. Вычислить sin (—1020°).

* * *

1. Иррациональные уравнения. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{3x+19} - \sqrt{x+2}.$$

2. Свойства равнобедренного треугольника.

3. Доказать тождество

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{32}{43}.$$

*Николаевский кораблестроительный институт им. адмирала С. А. Макарова*

1. Формула бинома Ньютона и ее применение.

2. Сосуд, наполняемый последовательно двумя жидкостями, плотности которых равны $d$ и $D$, весит соответственно $q$ и $Q$ *кг*, включая сюда и вес самого сосуда. Найти вес сосуда и его объем.

3. При каком значении $x$ (угла 3-й четверти) выражение $\frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ имеет наибольшее значение?

* * *

1. Доказать известные теоремы о логарифмировании при помощи логарифмического тождества $a^{\log_a N} = N$.

2. Все грани пирамиды — правильные треугольники. Найти ее двугранные углы.

3. Разложить на линейные множители выражение

$$11x - 3x^2 + 70.$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x = \sin 6x.$$

*Одесский технологический институт*

1. Теорема Виета.
2. Два элеватора принимают зерно. Пропускная способность первого на $Nm$ в час больше второго. Определить, сколько тонн зерна принимает в час каждый элеватор, если для принятия $n$ $m$ зерна первому нужно на $t$ ч меньше времени, чем второму.
3. Теорема о трех перпендикулярах.
4. Найти период функции

$$y = \cos^2 x.$$

* * *

1. Натуральные числа. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель. Жизнь и деятельность П. Л. Чебышева. Разложить на множители

$$a^2 - x^2 - 4a + 4x.$$

2. Градусное и радианное измерение углов.
3. Сечение шара плоскостью. Касательная плоскость к шару. Поверхность шара, шарового сегмента и пояса. Объем шарового сектора и шара.

*Киевский технологический институт пищевой промышленности*

1. Доказать, что ряд $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \ldots$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и найти предел суммы ее членов.
2. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$, а высота равна $h$. Определить объем и полную поверхность конуса ($\alpha = 62°40'$; $h = 1{,}876$ *м*).
3. Решить уравнение

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x.$$

* * *

1. Вывод формулы для числа сочетаний из $m$ элементов по $n$.
2. Поверхность и объем шара.

3. Упростить выражение

$$\left\{\frac{1}{2}[(1+\sqrt{p})^5+(1-\sqrt{p})^5]-(p\sqrt{5}-1)^2\right\}:2p^2$$

при $p=5-\sqrt{5}$.

*Запорожский машиностроительный институт им. В. Я. Чубаря*

1. Поверхность шара и его частей.
2. Построение отрезка $x$ по формулам $x=\frac{ab}{c}$; $x=\frac{a^2}{c}$; $x=\sqrt{ab}$.
3. Преобразование обыкновенных дробей в десятичные.
4. Внешний диаметр пустотелого шара равен 18 *см*, толщина стенок 3 *см*. Найти объем.

* * *

1. Значение математики для естествознания и техники.
2. Вычислить величину выражения

$$3^{-\lg_3 5}+2^{\frac{1}{2}+\lg_6 3}.$$

3. Вычислить $\sin\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

*Киевский автомобильно-дорожный институт*

1. Доказать, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы.
2. Два автомобиля выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Первый автомобиль едет со скоростью 40 *км/ч*, а скорость второго составляет 125% скорости первого. Через 30 *мин* из того же пункта и в том же направлении выехал третий автомобиль, который обогнал второй на 1,5 *ч* позже, чем первый. Какова скорость третьей автомашины?
3. Исключить $x$ из системы уравнений

$$\begin{cases} m\operatorname{ctg}x=a; \\ n\csc 2x=b. \end{cases}$$

* * *

1. Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{x+a\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{a}{2}\sqrt{5}+x}=\sqrt{\frac{a\sqrt{5}}{2}-x}.$$

2. Боковая поверхность цилиндра в развертке представляет собой прямоугольник, диагональ которого равна $d$ и составляет с основанием угол $\alpha$. Найти объем цилиндра.

3. Исключить $t$ из системы уравнений

$$\begin{cases} x = \sin t - \cos t; \\ y = t + \sin 2t. \end{cases}$$

*Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта*

1. От станции $A$ отправился поезд, который идет со скоростью 30 *км/ч*; через некоторое время за ним отправился второй поезд со скоростью 40 *км/ч*. Оба поезда должны были прибыть на станцию $B$ в одно и то же время. Но когда первый прошел $\frac{2}{3}$ расстояния между станциями, скорость его уменьшилась вдвое. Поэтому второй догнал его, не доезжая до станции $B$ 8 *км*. Определить расстояние между станциями $A$ и $B$.

2. Теоремы об измерении стороны, лежащей против острого и тупого угла в треугольнике.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \alpha; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m. \end{cases}$$

* * *

1. Объем треугольной пирамиды.

2. Тангенс двойного угла.

3. Решить уравнение $\lg(x - \sqrt{x}) - \lg\sqrt{x} = \lg 2 + \frac{1}{2}\lg(\sqrt{x}-1)$.

*Киевский инженерно-строительный институт*

1. Поверхность шара и его частей.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 10; \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

* * *

1. На прямой $a$ взят отрезок $KL$. Найти на прямой $N$, лежащей с прямой $a$ в одной плоскости, точку, из которой отрезок $KL$ виден под наибольшим углом.

2. Какое максимальное число слонов одного цвета можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не угрожали друг другу, и сколькими способами их можно расставить?

3. При какой зависимости между углами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ будет верна формула

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

*Полтавский инженерно-строительный институт*

1. Высота колхозной плотины равна 2 *м*; средняя скорость течения воды составляет 80 *см/сек*. Средняя глубина реки перед плотиной равна 150 *см*; ширина реки равна 5 *м*. Определить полезную мощность в лошадиных силах водяной турбины, действующей под напором падающей воды, если ее полезное действие составляет 75% мощности воды.

2. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно $a$, боковая сторона составляет $\frac{3}{4}$ меньшего основания и наклонена к большему основанию под углом $\alpha$. Определить объем тела, полученного вращением трапеции вокруг меньшего основания.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1.$$

* * *

1. Фотоаппарат после двукратного снижения цен на 15 и 20% стоит 60 руб. Сколько он стоил до снижения?

2. Решение косоугольных треугольников по углу и двум сторонам.

3. Можно ли построить угол, синус которого равен $\sqrt{3}$?

4. Решить уравнение $3^{2x-2} - 6 \cdot 3^x = 243$.

*Львовский торгово-экономический институт*

1. Доказать теорему о квадрате стороны, лежащей против тупого угла в треугольнике.

2. Два трактора одновременно выехали из РТС в колхоз. Первый проходит за один час на километр больше второго и успевает прийти на час раньше. Расстояние от РТС до колхоза равно 56 *км*. Какова скорость тракторов?

3. Решить уравнение

$$\lg(3x^2 + 7) - \lg(3x^2) = 1.$$

*Одесский кредитно-экономический институт*

1. Найти геометрическую прогрессию, зная, что

$$a_3 - a_1 = 16 \text{ и } a_5 - a_3 = 144.$$

2. Радиус окружности равен $r$. Определить площадь правильного вписанного шестиугольника.

3. Начертить график функции

$$3x + y = 5.$$

* * *

1. Площадь круга как предел площадей правильных вписанных и описанных многоугольников.

2. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = \cos 2x.$$

*Украинская Академия сельскохозяйственных наук*

1. За $n$ *ч* трактор вспахивает на $p$ *га* больше лошади. Сколько гектаров вспахивает за $n$ *ч* лошадь и сколько трактор, если трактор пашет 1 *га* на $t$ *ч* быстрее лошади?

2. Объем конуса равен $V$. Образующая наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Найти боковую поверхность конуса ($V = 256{,}4$ *см*$^3$; $\alpha = 37°5'$).

3. Если $\cos\vartheta + \cos\varphi = a$ и $\sin\vartheta + \sin\varphi = b$, то найти, чему равно

$$\cos(\vartheta - \varphi) \quad \text{и} \quad \sin(\vartheta - \varphi).$$

* * *

1. Доказать теорему, на основании которой находится логарифм дроби.

2. Теорема о сумме внутренних и внешних углов всякого многоугольника.

3. Найти $y$ из такого равенства: $\frac{k}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{2y}{\sqrt{c}} = 3x + w$.

4. В каком многоугольнике число всех диагоналей равно 119?

*Мелитопольский институт механизации сельского хозяйства*

1. Комплексные числа в алгебраической форме и четыре действия над ними.

2. Объем шара.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}(1 + x) + \operatorname{arctg}(1 - x) = \frac{\pi}{4}.$$

*Донецкий педагогический институт*

1. Самолет должен был прибыть из города $A$ в город $B$, расстояние между которыми равно 1800 *км*, через 7 *ч* после вылета. Пролетев 960 *км*, самолет должен был увеличить скорость на

40 *км/ч*, чтобы прибыть в назначенный срок. Какова была первоначальная скорость самолета?

2. В основании четырехугольной призмы лежит ромб со стороной $a$ и острым углом $\alpha$, боковые ребра этой призмы равны $b$ и наклонены к плоскости основания призмы под углом $\beta$. Определить объем призмы.

3. Решить уравнение

$$x^{2(\lg 10^x)-\frac{3}{2}\lg 10^x} = \sqrt{10}.$$

4. Доказать тождество

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 3\alpha.$$

*Нежинский педагогический институт им. Н. В. Гоголя*

1. Определить объем и поверхность тела, образованного вращением правильного восьмиугольника вокруг апофемы. Сторона восьмиугольника равна $a$.

2. Решить уравнение $0{,}01\ x^{\lg x-1} = 100$.

3. Решить неравенство

$$\frac{x+3}{x^2+1} > 2.$$

*Одесский педагогический институт им. К. Д. Ушинского*

1. Логарифмическая функция, ее свойства и график.

2. Теорема «Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы».

3. Тригонометрические функции отрицательного угла.

4. Решить показательное уравнение

$$\sqrt{4^{\frac{x-4}{2}}+6} = 2^{x-3}.$$

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, ЗАДАННЫЕ ВО ВРЕМЯ УСТНЫХ КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В ВУЗЫ УССР

1. Натуральный ряд чисел. Числа простые и составные. Их свойства.

2. Разложение чисел на множители. Признаки делимости чисел.

3. Общий наибольший делитель. Нахождение его. Общее наименьшее кратное. Нахождение его.

4. Основные действия над целыми числами, их свойства.

5. Простые дроби и действия над ними.

6. Десятичные дроби и действия над ними. Периодические дроби.

7. Пропорции арифметическая и геометрическая. Среднее арифметическое и среднее геометрическое. Пропорциональное деление.

8. Проценты. Три типа задач.

9. Числовая прямая. Действительные числа. Абсолютная величина действительного числа и ее основные свойства.

10. Одночлен и многочлен. Определения и четыре действия над ними.

11. Формулы сокращенного умножения и деления.

12. Вычислить сокращенным способом $97^2$ и $43^2$.

13. Разложение многочленов на множители.

14. Теорема Безу и ее применение к разложению на множители многочленов.

15. Алгебраические дроби и действия над ними.

16. Тождество и уравнение, их свойства (решение и исследование).

17. Решение и исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

18. Возведение в степень и извлечение корня из чисел. Иррациональные числа. Извлечение квадратного корня из чисел.

19. Действия с радикалами. Уничтожение иррациональности в знаменателе или в числителе.

20. Уравнение второй степени. Решение и исследование.

21. Зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

22. Сформулировать теорему Виета.

23. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если один из корней $2 + \sqrt{3}$.

24. Комплексные числа в алгебраической форме и четыре действия над ними.

25. Комплексное число в тригонометрической форме.

26. Можно ли сравнивать комплексные числа по величине?

27. Чему равен модуль и аргумент чисел $-2$; $3i$; $\sqrt{a}$ $(a > 0$; $a = 0)$?

28. Если один корень квадратного уравнения с вещественными коэффициентами комплексный, то какой второй?

29. Исследовать корни квадратного уравнения по его дискриминанту и коэффициентам.

30. Биквадратные уравнения.

31. Чему равны сумма и произведение корней биквадратного уравнения?

32. Решение простейших двучленных уравнений 3-й, 4-й и 6-й степени и трехчленных уравнений.

33. Почему при решении уравнений иногда получаются посторонние корни?

34. Понятие о величинах постоянных и переменных, зависимых и независимых.

35. Понятие о функции и аргументе.

36. Понятие о функциональной зависимости.

37. Графическое представление функциональной зависимости.

38. Простейшие функции (линейные, квадратные, показательные, логарифмические и тригонометрические) и их свойства.

39. Дать геометрическую интерпретацию решениям уравнений и систем.

40. Какие значения аргумента $x$ допустимы для функции $y = \sqrt{1-x}$?

41. Какие значения аргумента $x$ допустимы для функции $y = \sqrt{x-8}$?

42. При каких значениях $x$ имеет место равенство $\sqrt{x^2} = x$?

43. Неравенства и их основные свойства.

44. Доказать, что если $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

45. Понятие числовой последовательности. Примеры. Общий член числовой последовательности.

46. Предел числовой последовательности.

47. Арифметическая прогрессия. Вычисление любого члена арифметической прогрессии и суммы ее членов.

48. Геометрическая прогрессия. Вычисление любого члена геометрической прогрессии и суммы ее членов.

49. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма ее членов.

50. Логарифмы. Возникновение их и определение.

51. Общие свойства логарифмов.

52. Свойства десятичных логарифмов.

53. Таблица десятичных логарифмов (четырехзначных).

54. Доказать тождество $a^{\log_a N} = N$.

55. Логарифм произведения, частного, степени и корня. Потенцирование.

56. Доказать известные теоремы о логарифмировании при помощи логарифмического тождества $a^{\log_a N} = N$.

57. Показательные и логарифмические уравнения и способы их решения.

58. Размещения и перестановки.

59. Сочетания.

60. Какими числами являются $A_m^n$; $P_n$; $C_m^n$?

61. Доказать справедливость формулы $C_m^n = C_m^{m-n}$.

62. Произведение биномов, отличающихся вторыми членами.

63. Формула бинома Ньютона и ее применение.

64. Прямая, луч, отрезок, точка. Сумма и разность отрезков. Угол и определение его. Сложение и вычитание углов. Измерение углов. Перпендикуляр.

65. Данный отрезок разделить пополам.

66. Данный угол разделить пополам.

67. Восстановить перпендикуляр к данной прямой из данной на ней точки.

68. Опустить перпендикуляр на данную прямую из данной вне ее точки.

69. Построить треугольник по трем сторонам, по двум сторонам и углу.

70. Построить параллелограмм по данным диагоналям и углу между ними.

71. Разделить прямой угол на три равные части.

72. Найти центр окружности, описанной около треугольника.

73. Провести касательную к окружности.

74. Вокруг какого параллелограмма можно описать окружность?

75. Какова должна быть трапеция, чтобы около нее можно было описать окружность?

76. Какая из хорд, проходящих через точку внутри круга, наименьшая?

77. В какой параллелограмм можно вписать окружность?

78. Построить сегмент, вмещающий данный угол.

79. Подобие треугольников. *Лемма.*

80. Признаки подобия треугольников.

81. Признаки подобия прямоугольных треугольников.

82. Признаки подобия многоугольников.

83. Свойство биссектрисы угла треугольника.

84. Теорема о перпендикуляре, опущенном из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу.

85. Теорема Пифагора.

86. Теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого и тупого углов в треугольнике.

87. Длина окружности. Две леммы.

88. Площадь параллелограмма.

89. Формула Герона.

90. Площадь круга.

91. Площадь сектора.

92. Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.

93. Построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов.

94. Построить треугольник (многоугольник), подобный данному, по данной стороне его.

95. Найти геометрическое место точек, расстояния от которых до сторон угла относятся как $m : n$.

96. Построить отрезки $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; $x = \frac{ab}{c}$; $x = \frac{a^2}{c}$; $x = \sqrt{4a^2 - 3b^2}$.

97. Прямая и плоскость, параллельные между собой.

98. Теоремы о параллельных плоскостях.

99. Теоремы о перпендикуляре и наклонных к плоскости.

100. Теорема о трех перпендикулярах.

101. Свойства параллельных сечений в пирамиде.
102. Боковая поверхность полной и усеченной пирамид.
103. Объем усеченной пирамиды.
104. Объем усеченного конуса.
105. Поверхность шарового сегмента.
106. Поверхность и объем шара.
107. Найти геометрическое место точек в пространстве, одинаково удаленных от трех данных точек.
108. Каким свойством обладает угол прямой с плоскостью?
109. Во всякий ли параллелепипед можно вписать сферу?
110. Определение тригонометрических функций.
111. Какая величина обратна $\cos x$ и какая функция обратна функции $\cos x$?
112. Как понимать $\sin 2$; $\sin 3$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$; $\sin \frac{\sqrt{2}}{2}$?
113. Чему равен $\operatorname{tg} 90°$; $\operatorname{tg} 0°$? Как объяснить равенство $\operatorname{tg} 90° = \pm \infty$?.
114. Значение $\sin 45°$; $\sin 60°$; $\sin 30°$.
115. Формулы зависимости тригонометрических функций одного и того же угла.
116. Формулы $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \alpha + \cos \beta$; $\sin \alpha + \sin \beta$; $\operatorname{tg} 2\alpha$; $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\sin (\alpha + \beta)$.
117. Верны ли формулы тригонометрии для любого угла?
118. Определить границы, между которыми может изменяться выражение $\sin(\cos x)$ при изменении угла $x$ от $-\infty$ до $+\infty$.
119. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ — это тождество или уравнение?
120. Что является решением тригонометрического уравнения?
121. Графики функций $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$.
122. Определение обратных тригонометрических функций.
123. Как по графикам прямых тригонометрических функций получить графики обратных тригонометрических функций?
124. Каково главное значение $\operatorname{arcctg} x$?
125. Дайте геометрическую интерпретацию уравнения $\arcsin x = \operatorname{arcctg} x$, если оно имеет положительный корень.
126. Отличаются ли по значению выражения $\sin (\arcsin x)$ и $\sin (\operatorname{Arcsin} x)$?
127. Теоремы синусов, косинусов и тангенсов.
128. Случаи решения косоугольных треугольников.
129. Отличается ли период функции $y = \sin 2x$ от периода функции $y = \sin x$?
130. Прологарифмировать $1 + \cos\alpha$.
131. В каких границах в промежутке $(0; 2\pi)$ должен изменяться аргумент $x$ в неравенстве $\sin x - \frac{1}{2} \geqslant 0$?

132. Какой знак имеет $\sin 35°$?

133. В каких четвертях справедливо неравенство $\sin x \cos x > 0$?

134. Краткие биографические данные великого русского ученого-математика Н. И. Лобачевского.

135. Краткие биографические данные великого русского ученого-математика П. Л. Чебышева.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### I. ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Aa* — а | *Hh* — аш | *Oo* — о | *Vv* — ве |
| *Bb* — бе | *Ii* — и | *Pp* — пе | *Ww* — дубль-ве |
| *Cc* — це | *Jj* — йот | *Qq* — ку | *Xx* — икс |
| *Dd* — де | *Kk* — ка | *Rr* — эр | *Yy* — игрек |
| *Ee* — э | *Ll* — эль | *Ss* — эс | *Zz* — зет |
| *Ff* — эф | *Mm* — эм | *Tt* — те | |
| *Gg* — ге | *Nn* — эн | *Uu* — у | |

### II. ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

| | | |
|---|---|---|
| Αα — альфа | Ιι — иота | Ρϱ — ро |
| Ββ — бета | Κϰ — каппа | Σσ — сигма |
| Γγ — гамма | Λλ — ламбда | Ττ — тау |
| Δδ — дельта | Μμ — ми | Υυ — ипсилон |
| Εε — эпсилон | Νν — ни | Φφ — фи |
| Ζζ — дзета | Ξξ — кси | Χχ — хи |
| Ηη — эта | Οο — омикрон | Ψψ — пси |
| Θϑ — тета | Ππ — пи | Ωω — омега |

## III. ОСНОВНЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО АЛГЕБРЕ

### Формулы сокращенного умножения многочленов

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
2. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.
4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

5. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$ справедливо при всяком целом положительном $n$.

6. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$; справедливо при целом положительном нечетном $n$.

## Геометрическая пропорция

Пусть дана пропорция $a:b = c:d$, тогда будут справедливы следующие равенства:

$$ad = bc; \qquad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d};$$
$$d:b = c:a; \qquad$$
$$a:c = b:d; \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+b}{c-d}.$$
$$d:c = b:a; \qquad$$

## Действия со степенями

1. $(abcd\ldots)^n = a^n b^n c^n d^n \ldots$
2. $a^n b^n c^n d^n \ldots = (abcd\ldots)^n$.
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.
4. $a^m a^n = a^{m+n}$.
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
6. $(a^m)^n = a^{mn}$.

## Действия с корнями

Знак $\sqrt{\ }$ обозначает абсолютную величину корня.

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$.
2. $\sqrt[n]{abcd\ldots} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d}\ldots$
3. $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$.
4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

## Квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$ — общий вид неприведенного квадратного уравнения с одним неизвестным.

Неприведенное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ решается по формуле

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Характер корней определяется знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ следующим образом:

а) $b^2 - 4ac > 0$ — корни уравнения действительны и различны;

б) $b^2 - 4ac = 0$ — корни уравнения действительны и равны между собой.

в ) $b^2 - 4ac < 0$ — корни уравнения комплексные.

$x^2 + px + q = 0$ — приведенное квадратное уравнение, где $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

Если дано приведенное квадратное уравнение, то

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Уравнение

$$ax^2 + 2\beta x + c = 0$$

может быть решено по формуле:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}.$$

Корни квадратного уравнения имеют следующие свойства:

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a} = \frac{2\beta}{a}; \quad x_1 x_2 = q = \frac{c}{a}.$$

Примечание. Каждая из входящих в уравнение букв может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому знак минус в формуле означает знак, обратный тому, который имеет соответствующий коэффициент.

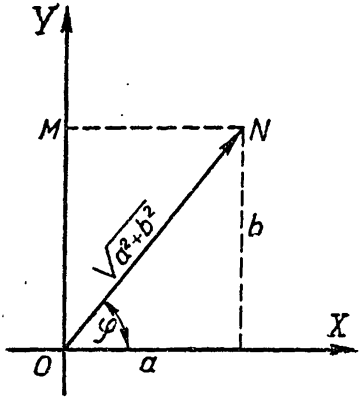



Рис. 241.

## Комплексные числа

$a + bi$ — комплексное число, где $a$ и $b$ действительные числа, а $i$ — мнимая единица.

Число $a$ выражает абсциссу, а $b$ — ординату комплексного числа $a + bi$ в геометрическом изображении.

Произведение $ii$ всегда равно минус единице, т. е. $i^2 = -1$.

Модуль комплексного числа $a + bi$ обозначается так:

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а аргумент через $\varphi$ (рис. 241).

Сопряженные комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ имеют один и тот же модуль.

Всякое комплексное число $a + bi$ может быть изображено в тригонометрической форме, т. е.

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ и $r \geqslant 0$.

Формула Муавра

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где $n$ — целое положительное число. Эта формула также справедлива и для целого отрицательного показателя $n$ и для $n = 0$.

Извлечение корня из комплексного числа выполняется по формуле

$$\sqrt[m]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{360°k}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{360°k}{m}\right)\right],$$

где $\sqrt[m]{r} > 0$ и $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

## Арифметическая прогрессия

Любой член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

где $a_1$ — первый член прогрессии, $d$ — разность прогресии, $n$ — число членов, $a_n$ — $n$-й член прогрессии.

Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}.$$

## Геометрическая прогрессия

Любой член геометрической прогрессии находится по формуле

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

где $q$ — знаменатель прогрессии.

Сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

Сумма бесконечно убывающей прогрессии равна

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

## Обобщение понятия о показателе степени

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

## Логарифмы

Логарифмом числа $N$ при основании $a$ называется показатель степени $x = \log_a N$, в который нужно возвысить $a$, чтобы получить число $N$.

$$\log_a N = x \quad \text{или} \quad a^x = N \,(a \neq 1; \quad a > 0), \quad \text{или} \quad a^{\log_a N} = N.$$

1. $\log(ab) = \log a + \log b$ — логарифм произведения.
2. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ — логарифм частного.
3. $\log a^n = n \log a$ — логарифм степени.
4. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$ — логарифм корня.
5. $\log_a 1 = 0$.
6. $\log_a a = 1$.

Отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют.

Если за основание логарифмов принято число $e$ ($e = 2{,}71828183$), то логарифмы называются натуральными.

Вместо $\log_e x$ обычно пишут $\ln x$.

Величина $\lg e = 0{,}43429$ называется модулем десятичных логарифмов и обозначается через $M$, так что $\ln Q = \frac{1}{M} \lg Q$.

Чтобы по известному натуральному логарифму числа $Q$ найти его десятичный логарифм, необходимо помножить натуральный логарифм на модуль десятичных логарифмов $M = \lg e$;

$$\lg Q = \lg e \ln Q = M \lg Q \approx 0{,}43429 \ln Q.$$

## Соединения

Если переставлять $m$ различных элементов всевозможными способами, оставляя неизменным их число и меняя лишь их порядок, то каждое из получающихся соединений будет называться перестановкой.

Число возможных перестановок из $n$ элементов обозначается $P_n$ и вычисляется по формулам

$$P_n = P_{n-1} n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)\, n.$$

Размещениями из $n$ элементов по $k$ называются такие группировки, каждая из которых содержит $k$ элементов, взятых из данных $n$ элементов, и отличается от другой или элементами, или порядком расположения элементов.

$$A_n^k = A_n^{k-1}(n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Сочетаниями из $n$ элементов по $k$ называются такие группировки по $k$ элементов в каждой, которые отличаются одна от другой хотя бы одним элементом; порядок расположения элементов не учитывается.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots k}.$$

### Бином Ньютона

Формула разложения бинома

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n\,(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \ldots + a^n,$$

где 1, $n$, $\frac{n\,(n-1)}{2!}$, $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}$ и т. д., называются биномиальными коэффициентами.

Формула общего члена разложения

$$T_{m+1} = C_n^m a^m x^{n-m}.$$

## IV. ОСНОВНЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

### Планиметрия

Сумма внутренних углов треугольника равна $2d$.

Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника равна $4d$.

Сумма внутренних углов выпуклого $n$-угольника равна $2d(n-2)$.

Центральный угол $\alpha = n^\circ$, если его дуга содержит $n^\circ$.

Вписанный угол $\alpha = \left(\frac{n}{2}\right)^\circ$, если его дуга содержит $n^\circ$.

Описанный угол $\alpha = \frac{n^\circ - m^\circ}{2}$, если дуги, заключенные между его сторонами, равны $n^\circ$ и $m^\circ$.

Угол, вершина которого лежит внутри круга, $\alpha = \frac{n^\circ + m^\circ}{2}$, где $n^\circ$ и $m^\circ$ — дуги, из которых одна заключена между сторонами угла, а другая — между продолжениями сторон.

Угол, вершина которого вне окружности, $\alpha = \frac{n^\circ - m^\circ}{2}$, если дуги, находящиеся между сторонами угла, равны $n^\circ$ и $m^\circ$.

Высота треугольника, опущенная на сторону $b$, обозначается $h_b$ и через стороны треугольника вычисляется так:

$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}}{b},$$

где $p = \frac{b+c+a}{2}$.

Медианы треугольника всегда пересекаются внутри треугольника в одной точке, являющейся центром тяжести треугольника.

Через стороны треугольника медиана выражается так:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Биссектрисы треугольника пересекаются внутри треугольника в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

Через стороны треугольника биссектриса выражается так:

$$\beta_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)},$$

где $p$ — полупериметр треугольника.

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, где $a$ и $b$ — катеты; $c$ — гипотенуза прямоугольного треугольника. Сторону косоугольного треугольника можно найти по формуле

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bc_b,$$

где $c_b$ — проекция стороны $c$ на сторону $b$; знак «+» имеет место, если $a$ лежит против тупого угла, знак «—»—если $a$ лежит против острого угла.

Площадь параллелограмма $S = ah$, где $a$ — сторона; $h$ — высота, опущенная на сторону $a$.

Свойство диагоналей параллелограмма выражается формулой

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

где $a$ и $b$ — стороны параллелограмма; $d_1$ и $d_2$ — его диагонали.

Площадь прямоугольника

$$S = ab,$$

где $a$ и $b$ — стороны прямоугольника.

Площадь квадрата

$$S = a^2,$$

где $a$ — сторона квадрата.

Теорема Птоломея:

$$d_1 d_2 = ac + bd,$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — стороны вписанного четырехугольника, а $d_1$ и $d_2$— его диагонали.

Площадь ромба

$$S = ah = \frac{d_1 d_2}{2},$$

где $d_1$ и $d_2$ — диагонали ромба.

Площадь трапеции

$$S = \frac{(a+b)h}{2},$$

где $a$ и $b$ — основания трапеции, $h$ — ее высота.

Площадь правильного многоугольника

$$S = pk,$$

где $p$ — полупериметр, а $k$ — апофема.

Апофема правильного многоугольника

$$k = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

где $R$ — радиус описанного круга, $a_n$ — сторона многоугольника.

Сторона правильного многоугольника с удвоенным числом сторон $a_{2n}$ через сторону $a_n$ данного $n$-угольника вычисляется по формуле

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2Rk},$$

где $k = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$.

Сторона описанного правильного многоугольника $b_n$ через сторону вписанного одноименного многоугольника $a_n$ находится по формуле

$$b_n = \frac{a_n r}{k},$$

где $r$ — радиус круга, $k$ — апофема вписанного многоугольника

Длина окружности

$$L = 2\pi R.$$

Длина дуги в $n°$

$$l = \frac{2\pi R n°}{360°} = \frac{\pi R n°}{180°}.$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2.$$

Площадь сектора

$$S = \frac{\pi R^2 n°}{360°} = \frac{\pi R n}{180°} \cdot \frac{R}{2} = \frac{lR}{2},$$

где $l$ — длина дуги сектора.

Площадь сегмента равна разности площадей соответствующего сектора и треугольника, составленного хордой и радиусами:

$$S = \frac{\pi R^2 n°}{360°} - \frac{R^2 \sin n°}{2} = R^2\left(\frac{\pi n°}{360°} - \frac{\sin n°}{2}\right).$$

Радиус вписанного круга всегда выражается через стороны $a$, $b$, $c$ треугольника так:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$,

а радиус описанного круга так:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

## Стереометрия

Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра, т. е.

$$S_{бок} = Pl,$$

где $P$ — периметр перпендикулярного сечения, а $l$ — длина ребра.

Объем призмы

$$V = Sh,$$

где $S$ — площадь основания, а $h$ — высота.

Объем наклонной призмы можно также найти как произведение ребра на площадь сечения, перпендикулярного к ребрам.

Параллелепипед есть призма, следовательно, объем параллелепипеда будет

$$V = Sh,$$

где за основание может быть взята любая грань.

Прямоугольный параллелепипед имеет объем

$$V = abc,$$

где $a$, $b$ и $c$ —ребра.

Диагональ прямоугольного параллелепипеда через три его измерения выражается так:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Объем куба

$$V = a^3,$$

где $a$ — ребро куба.

Объем любой пирамиды

$$V = \frac{Sh}{3},$$

где $S$ — площадь основания, $h$ — высота пирамиды.

Боковая поверхность правильной пирамиды

$$S_{бок} = pk,$$

где $p$ — полупериметр основания, $k$ — апофема.

Объем любой усеченной пирамиды

$$V = \frac{h}{3}(S + s + \sqrt{Ss}),$$

где $h$ — высота, $S$ — площадь нижнего основания, $s$ — площадь верхнего основания.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды

$$S_{\text{бок}} = \frac{(P_1 + P_2)k}{2},$$

где $P_1$ и $P_2$ — периметры верхнего и нижнего оснований, $k$ — апофема.

Объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

где $a$ и $b$ — стороны квадратов, лежащих в основаниях.

Боковая поверхность круглого цилиндра

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh.$$

Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 h.$$

Боковая поверхность круглого конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl,$$

где $l$ — образующая.

Боковая поверхность усеченного конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r),$$

где $l$ — образующая, а $R$ и $r$ — радиусы оснований.

Объем конуса

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Объем усеченного конуса

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Поверхность шара

$$S = 4\pi R^2,$$

где $R$ — радиус шара.

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Объем сферического сектора

$$V = \frac{SR}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где $S$ — поверхность сегмента (или шарового пояса), $R$ — радиус шара, а $h$ — высота сегмента или шарового пояса, служащего основанием сектора.

Объем сферического сегмента

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h),$$

где $R$ — радиус шара, $h$ — высота сегмента, а $r$ — радиус основания сегмента.

Полная поверхность сферического сегмента

$$S = 2\pi Rh + \pi r^2.$$

Объем сферического слоя

$$V = \frac{1}{2}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{h^2}{3}\right),$$

где $h$ — высота слоя, а $r_1$ и $r_2$ — радиусы оснований слоя.

Боковая поверхность шарового слоя

$$S = 2\pi Rh.$$

## V. ОСНОВНЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

### Градусные и радианные меры

| Углы в градусах | 360 | 180 | 90 | 60 | 45 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Углы в радианах | $2\pi$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

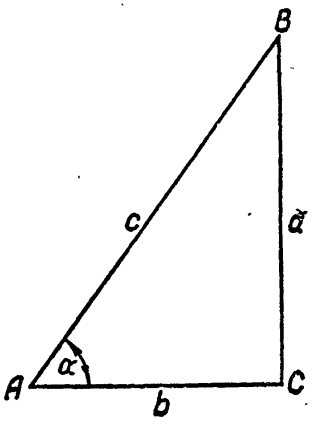



Рис. 242.

### Тригонометрические функции острого угла (рис. 242)

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \sec\alpha = \frac{c}{b};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{csc}\alpha = \frac{c}{a}.$$

### Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{csc}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \sin\alpha \csc\alpha = 1;$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \quad \cos\alpha \sec\alpha = 1;$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

**Значения тригонометрических функций некоторых углов**

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\csc\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 1 | 0 | $\pm\infty$ | 1 | $\pm\infty$ |
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 2 |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 2 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ |
| 90° | 1 | 0 | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | 1 |

**Правило знаков тригонометрических функций**

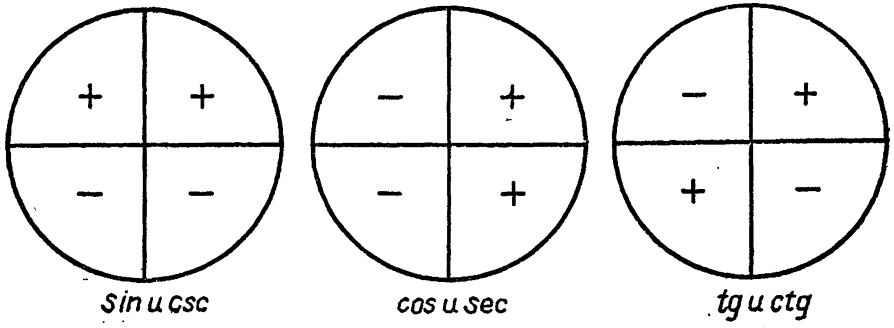



Рис. 243.

## Выражение одних тригонометрических функций через другие

| Функции | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\csc\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | | $\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ | $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$ | $\dfrac{1}{\csc\alpha}$ |
| $\cos\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ | | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\sec\alpha}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ | | $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ | $\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ | $\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ | | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$ | $\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}$ |
| $\sec\alpha$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$ | | $\dfrac{\csc\alpha}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$ |
| $\csc\alpha$ | $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ | $\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$ | |

### Периодичность

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha; \quad \csc(\alpha + 2\pi n) = \csc\alpha;$$
$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha; \quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha;$$
$$\sec(\alpha + 2\pi n) = \sec\alpha; \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Если $\sin\alpha = a\,(|a| \leqslant 1)$, то $\alpha = 180°n + (-1)^n \alpha_1$, где $-\alpha_1$ наименьший аргумент, удовлетворяющий данному уравнению ($\arcsin a$), а $n$ — целое положительное число или 0 ($n \geqslant 0$).

Например, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, то $\alpha_1 = 30°$, и тогда $\alpha = 180°n + (-1)^n 30°$.

Если $\cos\alpha = a$, то $\alpha = 360°n \pm \alpha_1 = 2\pi n \pm \alpha_1$.

Для $\operatorname{tg}\alpha = a$ общий вид угла $\alpha = \pi n + \alpha_1$.

Для $\operatorname{ctg}\alpha = a$ общий вид угла $\alpha = \pi n + \alpha_1$.

### Четность и нечетность
(отрицательные углы)

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha; \quad \sec(-\alpha) = +\sec\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \quad \csc(-\alpha) = -\csc\alpha.$$

### Формулы приведения

| Тригонометрические функции | Углы | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $90°-\alpha$ | $90°+\alpha$ | $180°-\alpha$ | $180°+\alpha$ | $270°-\alpha$ | $270°+\alpha$ | $360°-\alpha$ | $360°n+\alpha$ |
| sin | $+\cos\alpha$ | $+\cos\alpha$ | $+\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $+\sin\alpha$ |
| cos | $+\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $+\sin\alpha$ | $+\cos\alpha$ | $+\cos\alpha$ |
| tg | $+\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $+\operatorname{tg}\alpha$ | $+\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $+\operatorname{tg}\alpha$ |
| ctg | $+\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $+\operatorname{ctg}\alpha$ | $+\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $+\operatorname{ctg}\alpha$ |
| sec | $+\csc\alpha$ | $-\csc\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\csc\alpha$ | $+\csc\alpha$ | $+\sec\alpha$ | $+\sec\alpha$ |
| csc | $+\sec\alpha$ | $+\sec\alpha$ | $+\csc\alpha$ | $-\csc\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\csc\alpha$ | $+\csc\alpha$ |

### Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

**Формулы двойного угла, половины угла и тройного угла**

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

**Формулы приведения к виду, удобному для логарифмирования**

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha);$$
$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha);$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2\csc 2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha;$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos\alpha};$$

$$1 \pm \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \pm 1 = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$1 - \operatorname{ctg}^2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta};$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

**Приведение к логарифмическому виду выражений, содержащих углы треугольника**

Если $A$, $B$ и $C$ — углы треугольника, то $A + B + C = 180^\circ$. В этом случае некоторые тригонометрические выражения, содержащие углы $A$, $B$ и $C$, можно привести к логарифмическому виду при помощи следующих формул:

$$\sin A + \sin B = 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin C}{\cos A \cos B};$$

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin C}{\sin A \sin B};$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C;$$

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

### Соотношения между элементами треугольника

1. Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

или

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

2. Формулы половинных углов:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{r}{p-a},$$

где $a$, $b$, $c$ — стороны; $A$, $B$, $C$ — углы треугольника (рис. 242); $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; $r$ — радиус вписанной окружности.

3. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Из теоремы синусов получаем две формулы.

Формула Региомонтана (теорема тангенсов):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

Формула Мольвейде:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Радиус вписанной окружности

$$r=\frac{S}{p}=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Радиус описанного круга

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{a}{2\sin A},$$

где $S$ — площадь треугольника.

Площадь треугольника

$$S=\frac{ah}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=rp=\frac{bc\sin A}{2}=$$

$$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=2R^2\sin A\sin B\sin C=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

где $p$ — полупериметр, $h$ — высота, $r$ — радиус вписанной окружности.

### Решение косоугольных треугольников

I случай. Имеем два угла $A$ и $B$ и сторону $c$.

Определяем третий угол по формуле

$$C=180^\circ-(A+B).$$

По теореме синусов находим сторону $a$:

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}.$$

По теореме синусов находим сторону $b$:

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C} \quad \text{и} \quad S=\frac{C^2\sin A\sin B}{2\sin C}.$$

II случай. Имеем две стороны $a$ и $b$ и угол между ними $C$.

По теореме косинусов находим сторону $c$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

По теореме синусов находим угол $A$

$$\sin A=\frac{a\sin C}{c};$$

$\angle A$ будет острым, если $\frac{b}{a}>\cos C$, и тупым, если $\frac{b}{a}<\cos C$.

Третий угол определяется по формуле

$$B = 180° - (A + C).$$

Если вычисления производить при помощи логарифмов, то удобнее в данном случае решить треугольник следующим образом.

По теореме тангенсов находим

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Отсюда получим $A - B$. Зная $A + B$ и $A - B$, определяем углы $A$ и $B$. Сторону $c$ вычисляем по теореме синусов: $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, а площадь $S$ — по формуле $S = \frac{ab \sin C}{2}$.

III случай. Имеем две стороны $a$, $b$ и угол $B$, противолежащий одной из них.

По теореме синусов находим угол $A$, противолежащий стороне $a$:

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}.$$

При $a > b$; $a \sin B = b$ имеем одно решение: угол $A$ будет прямой.

При $a > b$; $a \sin B < b$ имеем два решения: угол $A$ может быть острым или тупым.

При $a \leqslant b$ имеем одно решение: угол $A$ будет острый.

При $a > b$; $a \sin B > b$ решения не будет.

Угол $C$ находится по формуле

$$C = 180° - (A + B).$$

Сторону $c$ находим по теореме синусов:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

а площадь — по формуле

$$S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

IV случай. Имеем три стороны $a$, $b$, $c$ треугольника $ABC$. По теореме косинусов ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$) находим угол $A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

По теореме синусов $\left(\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin B} = \frac{b}{\sin C} = 2R\right)$ находим угол $B$:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Угол $C$ находим по формуле

$$C = 180° - (A + B).$$

Если производить вычисления при помощи логарифмов, то в данном случае удобнее решить треугольник следующим способом.

Определяем площадь по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Затем вычисляем угол, лежащий против меньшей стороны, например $\angle A$, применяя формулу

$$S = \frac{bc \sin A}{2},$$

откуда

$$\sin A = \frac{2S}{bc}.$$

Аналогично находим угол, лежащий против второй из меньших сторон, например $\angle B$:

$$\sin B = \frac{2S}{ac}.$$

Угол $C$ определяем из равенства

$$C = 180° - (A + B).$$

**Преобразование произведения двух тригонометрических функций в алгебраическую сумму**

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)].$$

**Некоторые вспомогательные формулы**

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}};$$

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}};$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1}x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3}x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5}x \sin^5 x - \ldots;$$

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2}x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4}x \sin^4 x - \ldots$$

**Обратные тригонометрические (круговые) функции**

Обратных тригонометрических (круговых) функций шесть:

$\arcsin x$; $\arccos x$; $\operatorname{arctg} x$; $\operatorname{arcctg} x$; $\operatorname{arcsec} x$; $\operatorname{arccsc} x$.

Главный угол (дуга) $\arcsin x$ есть угол (дуга), заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен $x$: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Главный угол (дуга) $\arccos x$ есть угол (дуга), заключенный между 0 и $\pi$, косинус которого равен $x$: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

Главный угол (дуга) $\operatorname{arctg} x$ есть угол (дуга), заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен $x$: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

Главный угол (дуга) $\operatorname{arcctg} x$ есть угол (дуга), заключенный между 0 и $\pi$, котангенс которого равен $x$: $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

Множествами допустимых значений аргумента для этих функций являются:

для $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ числа $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

для $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ числа $-\infty < x < +\infty$;

для $y = \operatorname{arcsec} x$ и $y = \operatorname{arccsc} x$ числа $|x| \geqslant 1$.

### Формулы, выражающие обратные тригонометрические функции через их главные значения

$$\operatorname{Arcsin} x = n\pi + (-1)^n \arcsin x;$$
$$\operatorname{Arccos} x = 2n\pi \pm \arccos x;$$
$$\operatorname{Arctg} x = n\pi + \operatorname{arctg} x;$$
$$\operatorname{Arcctg} x = n\pi + \operatorname{arcctg} x,$$

где $n$ — любое целое число или 0.

### Графики обратных тригонометрических функций

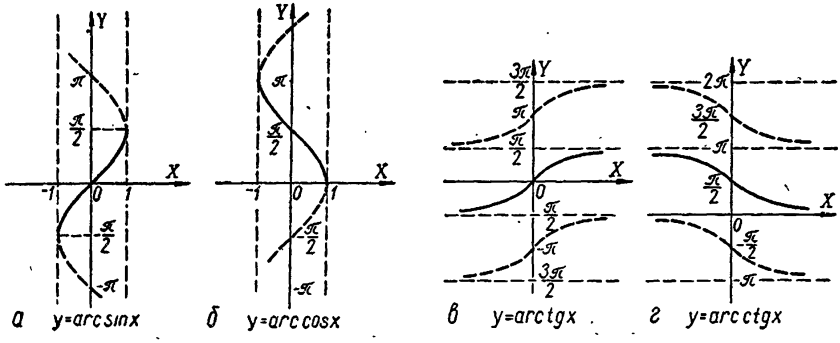



Рис. 244.

### Основные формулы для обратных тригонометрических функций

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ имеют место соотношения

$$\sin(\arcsin x) = x;$$

$$\arcsin(\sin x) = x;$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеют место соотношения

$$\cos(\arccos x) = x;$$
$$\arccos(\cos x) = x;$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

В промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ имеют место соотношения

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x;$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

В промежутке $(0; \pi)$ имеют место соотношения

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$
$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x;$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 0 \leqslant x < 1;$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 0 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad x > 0.$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leqslant a \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy),$$

если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$;

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}),$$

если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$;

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}),$$

если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$;

$$\arccos x - \arccos y = \arcsin(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}),$$

если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$;

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y},$$

если $x > 0$ и $y > 0$;

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy},$$

если $x > 0$ и $y > 0$;

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y},$$

если $x > 0$ и $y > 0$;

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arctg}\frac{y-x}{1+xy},$$

если $x > 0$ и $y > 0$.

## Таблица тригонометрических функций для значений аргумента от 0 до $\frac{\pi}{2}$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\operatorname{tg} x$ | $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\operatorname{tg} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,40 | 0,3894 | 0,9211 | 0,4228 |
| 0,01 | 0100 | 1,0000 | 0100 | 0,41 | 3986 | 9171 | 4346 |
| 0,02 | 0200 | 0,9998 | 0200 | 0,42 | 4078 | 9131 | 4466 |
| 0,03 | 0300 | 9996 | 0300 | 0,43 | 4169 | 9090 | 4586 |
| 0,04 | 0400 | 9992 | 0400 | 0,44 | 4259 | 9043 | 4708 |
| 0,05 | 0,0500 | 0,9988 | 0,0500 | 0,45 | 0,4350 | 0,9004 | 0,4831 |
| 0,06 | 0600 | 9982 | 0601 | 0,46 | 4439 | 8961 | 4954 |
| 0,07 | 0699 | 9976 | 0701 | 0,47 | 4529 | 8916 | 5080 |
| 0,08 | 0799 | 9968 | 0802 | 0,48 | 4618 | 8870 | 5206 |
| 0,09 | 0899 | 9960 | 0902 | 0,49 | 4706 | 8823 | 5334 |
| 0,10 | 0,0998 | 0,9950 | 0,1003 | 0,50 | 0,4794 | 0,8776 | 0,5463 |
| 0,11 | 1098 | 9940 | 1104 | 0,51 | 4882 | 8727 | 5594 |
| 0,12 | 1197 | 9928 | 1206 | 0,52 | 4969 | 8678 | 5726 |
| 0,13 | 1296 | 9916 | 1307 | 0,53 | 5055 | 8628 | 5859 |
| 0,14 | 1395 | 9902 | 1409 | 0,54 | 5141 | 8577 | 5994 |
| 0,15 | 0,1494 | 0,9888 | 0,1511 | 0,55 | 0,5227 | 0,8525 | 0,6131 |
| 0,16 | 1593 | 9872 | 1614 | 0,56 | 5312 | 8473 | 6269 |
| 0,17 | 1692 | 9856 | 1717 | 0,57 | 5396 | 8419 | 6410 |
| 0,18 | 1790 | 9838 | 1820 | 0,58 | 5480 | 8365 | 6552 |
| 0,19 | 1889 | 9820 | 1923 | 0,59 | 5564 | 8309 | 6696 |
| 0,20 | 0,1987 | 0,9801 | 0,2027 | 0,60 | 0,5646 | 0,8253 | 0,6841 |
| 0,21 | 2085 | 9780 | 2131 | 0,61 | 5729 | 8196 | 6989 |
| 0,22 | 2182 | 9759 | 2236 | 0,62 | 5810 | 8139 | 7139 |
| 0,23 | 2280 | 9737 | 2341 | 0,63 | 5891 | 8080 | 7291 |
| 0,24 | 2377 | 9713 | 2447 | 0,64 | 5972 | 8021 | 7445 |
| 0,25 | 0,2474 | 0,9689 | 0,2553 | 0,65 | 0,6052 | 0,7961 | 0,7602 |
| 0,26 | 2571 | 9664 | 2660 | 0,66 | 6131 | 7900 | 7761 |
| 0,27 | 2667 | 9638 | 2768 | 0,67 | 6210 | 7838 | 7923 |
| 0,28 | 2764 | 9611 | 2876 | 0,68 | 6288 | 7776 | 8087 |
| 0,29 | 2860 | 9582 | 2984 | 0,69 | 6365 | 7712 | 8253 |
| 0,30 | 0,2955 | 0,9553 | 0,3093 | 0,70 | 0,6442 | 0,7648 | 0,8423 |
| 0,31 | 3051 | 9523 | 3203 | 0,71 | 6518 | 7584 | 8595 |
| 0,32 | 3146 | 9492 | 3314 | 0,72 | 6594 | 7518 | 8771 |
| 0,33 | 3240 | 9460 | 3425 | 0,73 | 6669 | 7452 | 8949 |
| 0,34 | 3335 | 9428 | 3537 | 0,74 | 6743 | 7385 | 9131 |
| 0,35 | 0,3429 | 0,9394 | 0,3650 | 0,75 | 0,6816 | 0,7317 | 0,9316 |
| 0,36 | 3523 | 9359 | 3764 | 0,76 | 6889 | 7248 | 9505 |
| 0,37 | 3616 | 9323 | 3879 | 0,77 | 6961 | 7179 | 9697 |
| 0,38 | 3709 | 9287 | 3994 | 0,78 | 7033 | 7109 | 9893 |
| 0,39 | 3802 | 9249 | 4111 | $\frac{\pi}{4}$ | 7071 | 7071 | 1,0000 |
| | | | | 0,79 | 7104 | 7038 | 0092 |

| $x$ | sin $x$ | cos $x$ | tg $x$ | $x$ | sin $x$ | cos $x$ | tg $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,80 | 0,7174 | 0,6967 | 1,0296 | 1,20 | 0,9320 | 0,3624 | 2,5722 |
| 0,81 | 7243 | 6895 | 0504 | 1,21 | 9356 | 3530 | 6503 |
| 0,82 | 7311 | 6822 | 0717 | 1,22 | 9391 | 3436 | 7328 |
| 0,83 | 7379 | 6749 | 0934 | 1,23 | 9425 | 3342 | 8198 |
| 0,84 | 7446 | 6675 | 1156 | 1,24 | 9458 | 3248 | 9119 |
| 0,85 | 0,7513 | 0,6600 | 1,1383 | 1,25 | 0,9490 | 0,3153 | 3,0096 |
| 0,86 | 7578 | 6524 | 1616 | 1,26 | 9521 | 3058 | 1133 |
| 0,87 | 7643 | 6448 | 1853 | 1,27 | 9551 | 2963 | 2236 |
| 0,88 | 7707 | 6372 | 2097 | 1,28 | 9580 | 2867 | 3414 |
| 0,89 | 7771 | 6294 | 2346 | 1,29 | 9608 | 2771 | 4672 |
| 0,90 | 0,7833 | 0,6216 | 1,2602 | 1,30 | 0,9636 | 0,2675 | 3,6021 |
| 0,91 | 7895 | 6137 | 2864 | 1,31 | 9662 | 2579 | 3,7471 |
| 0,92 | 7956 | 6058 | 3133 | 1,32 | 9687 | 2482 | 3,9033 |
| 0,93 | 8016 | 5978 | 3409 | 1,33 | 9711 | 2385 | 4,0723 |
| 0,94 | 8076 | 5898 | 3692 | 1,34 | 9735 | 2288 | 4,2556 |
| 0,95 | 0,8134 | 0,5817 | 1,3984 | 1,35 | 0,9757 | 0,2190 | 4,4552 |
| 0,96 | 8192 | 5735 | 4284 | 1,36 | 9779 | 2092 | 4,6734 |
| 0,97 | 8249 | 5653 | 4592 | 1,37 | 9799 | 1994 | 4,9131 |
| 0,98 | 8305 | 5570 | 4910 | 1,38 | 9819 | 1896 | 5,1774 |
| 0,99 | 8360 | 5487 | 5237 | 1,39 | 9837 | 1793 | 5,4707 |
| 1,00 | 0,8415 | 0,5403 | 1,5574 | 1,40 | 0,9854 | 0,1700 | 5,7979 |
| 1,01 | 8468 | 5319 | 5922 | 1,41 | 9871 | 1601 | 6,1654 |
| 1,02 | 8521 | 5234 | 6281 | 1,42 | 9887 | 1502 | 6,5811 |
| 1,03 | 8573 | 5148 | 6652 | 1,43 | 9901 | 1403 | 7,0555 |
| 1,04 | 8624 | 5062 | 7036 | 1,44 | 9915 | 1304 | 7,6018 |
| 1,05 | 0,8674 | 0,4976 | 1,7433 | 1,45 | 0,9927 | 0,1205 | 8,2381 |
| 1,06 | 8724 | 4889 | 7844 | 1,46 | 9939 | 1106 | 8,9886 |
| 1,07 | 8772 | 4801 | 8270 | 1,47 | 9949 | 1006 | 9,8874 |
| 1,08 | 8820 | 4713 | 8712 | 1,48 | 9959 | 0907 | 10,9834 |
| 1,09 | 8866 | 4625 | 9171 | 1,49 | 9967 | 0807 | 12,3499 |
| 1,10 | 0,8912 | 1,4536 | 1,9648 | 1,50 | 0,9975 | 0,0707 | 14,101 |
| 1,11 | 8957 | 4447 | 2,0143 | 1,51 | 9982 | 0608 | 16,428 |
| 1,12 | 9001 | 4357 | 0660 | 1,52 | 9987 | 0508 | 19,670 |
| 1,13 | 9044 | 4267 | 1198 | 1,53 | 9992 | 0408 | 24,498 |
| 1,14 | 9086 | 4176 | 1759 | 1,54 | 9995 | 0308 | 32,461 |
| 1,15 | 0,9128 | 0,4085 | 2,2345 | 1,55 | 0,9998 | 0,0208 | 48,078 |
| 1,16 | 9168 | 3993 | 2958 | 1,56 | 9999 | 0108 | 92,620 |
| 1,17 | 9208 | 3902 | 3600 | 1,57 | 1,0000 | 0008 | 1255,766 |
| 1,18 | 9246 | 3809 | 4273 | | | | |
| 1,19 | 9284 | 3717 | 4979 | $\frac{\pi}{2}$ | 1,0000 | 0,0000 | $\infty$ |

*Николай Савельевич Залогин*

**Конкурсные задачи по математике**

Редактор *И. Я. Шапиро*
Редакторы издательства *А. М. Новик*, инж. *Я. А. Самохвалов*
Переплет художника *Ю. С. Яхниса*
Технические редакторы *В. В. Терещенко*, *С. М. Шафета*
Корректоры *Т. Е. Царинская*, *Л. Б. Осипова*, *В. В. Кожукало*

Подписано к печати 4/VI 1964 г. Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$.
Объем: 38,5 физ. лист.; 38,5 усл. лист.; 41,02 учетно-издат. лист. Тираж 70 000
Зак. № 4-282. БФ 03304. Цена 1 руб. 38 коп.

Издательство «Техніка», Киев, 4, Пушкинская, 28.

Напечатано с матриц Киевской Книжно-журн. ф-ки на Книжной фабрике им. Фрунзе
Государственного комитета Совета Министров УССР по печати,
Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.